

Kontaktphysikalische Simulation von Schichtsystemen

Vom Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Phys. Michael Leidner

Geboren am 14.10.1962 in Lambrecht/Pfalz

Referent: Prof. Dr.-Ing. Helmut Schlaak

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Frank Berger

Tag der Einreichung: 08.12.2008

Tag der mündlichen Prüfung: 27.05.2009

Zusammenfassung

Basierend auf Papkowich-Neuber Potentialen werden numerische Verfahren vorgestellt, mit deren Hilfe sowohl die elastisch-plastische Deformation, die Verteilung der inneren Spannungen, als auch der Engewiderstand sowie die Stromdichteverteilung im Kontaktpunkt realer elektrischer Kontakte simuliert werden kann. Die Verfahren erlauben neben der Analyse gemessener 3D-Oberflächen auch die Simulation virtueller Oberflächentopographien mit vorgegebenen Rauheiten, fraktalen Eigenschaften bzw. Oberflächen-Anisotropien. Aufwendige FEM-Modelle zur Abbildung der Oberflächentopographie werden daher nicht benötigt. Die Kontaktpartner können wahlweise als Ein-, Zwei- oder Dreifachschichtsysteme unterschiedlicher Materialpaarungen modelliert werden. Die mechanische Kontaktbelastung lässt sich sowohl durch Normalkraft als auch durch zusätzliche statische Reibkraft vorgeben. Aufgrund der verwendeten FFT (Fast Fourier Transformation) und Multigrid Algorithmen wurden die erforderlichen Rechenzeiten so weit minimiert, dass mittels gängiger PC Hardware Berechnungen mit Auflösungen von $124 \times 124 \times 64$ Raumpunkten innerhalb weniger Minuten durchgeführt werden können. Die mit dem vorgestellten Verfahren simulierte Abhängigkeit zwischen Normalkraft und Kontaktwiderstand zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit experimentell gemessenen Werten. Sämtliche Verfahren wurden in einer einfach zu bedienenden Software implementiert. Simulationsparameter und Ergebnisse lassen sich mittels einer Datenbank verwalten und dreidimensional visualisieren.

Abstract

Due to ongoing miniaturization in electronics, connector contact designs have to follow the same trends. The prediction of the mechanical and electrical performance of low force connector contacts becomes increasingly important. This paper shows a new approach to model the elastic plastic contact of two multi-layered non-conforming rough bodies subjected to pressure and shear traction. Three main considerations will be presented. 1. To investigate the influence of the surface topography on contact performance, measured three dimensional digitized surfaces are not always available. Hence a numerical description of a real rough surface is of great importance. It can be shown, that an engineering surface can be modeled by five scale independent parameters, RMS roughness, x/y correlation length, kurtosis and skew. 2. Based on Papkovich-Neuber Potentials and both multi grid and conjugate gradient methods, a numerical algorithm has been developed to calculate the stresses and deformations in a contact system with up to three different layers per contact partner. The plastic deformation of the individual contact points (a-spots) can be interpolated using different material hardening behaviors. 3. If the a-spot distribution is known, the constriction resistance of the true contact area can be calculated. The voltage drop inside the contacting bodies is interpolated by solving the Laplace equation iteratively. The different electrical properties of the contact layers as well as the interaction of the individual a-spots, is also taken into account. The simulation algorithms are validated using a Au/Ni/CuSn6 contact system. The results show excellent agreement between measured and simulated contact resistance results over a normal force range from 1 gram up to 250 grams. The algorithms are implemented with an 'easy to use' windows interface "First Contact". The software also incorporates a material database that when used together with a surface modeler; allows for the fast calculation and 3d visualization of all mechanical and electrical contact characteristics.

Widmung

Meinen Eltern

Abkürzungsverzeichnis

R_E	Engewiderstand eines Kontaktpunktes / Ω
R_a, R_b	Kontaktradien simulierter Oberflächen / mm
a	Radius Hertz Kontakt / a-Spot / m
α	Radius eines a-Spot Clusters / m; Radius im Frequenzraum $\sqrt{m^2 + n^2}$
A	Hertz'sche Kontaktfläche bzw. Kontaktbereich (Integral)
Ω	Integrationsbereich Kontaktvolumen
ω_x, ω_y, m, n	Unabhängige Variablen im Frequenzraum
ω_R	Relaxationsfaktor
P	Spezifischer Widerstand / Ωm
P^*	Raumladungsdichte / C/m^3
ϵ	Dielektrizitätskonstante / $AsV^{-1}m^{-1}$
ϵ^{itera}	Abbruchkriterium bzw. jeweiliger Fehler einer Iterationsschleife
$\Delta\epsilon$	Reduktionsfaktor mit welchen ϵ^{itera} nach jeder Iterationsschleife multipliziert wird
Λ	Wärmeleitfähigkeitskoeffizient / $WK^{-1}m^{-1}$
L_{WF}	Wiedemann-Franz-Konstante / V^2K^{-2}
U_c	Spannungsabfall über einen Kontaktpunkt / V
F_N	Kontaktnormalkraft [N]
R	Radius eines sphärischen Kontaktpunktes / m
\vec{E}	Vektor der elektrischen Feldstärke / Vm^{-1}
\vec{J}	Vektor der elektrischen Stromdichte / Am^{-2}
E	E-Modul / Pa
E^+	$\frac{E}{1 - \nu^2}$
$\frac{1}{E^*}$	$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$
Y	(Yield Strength) Druckfestigkeit/Streckgrenze / MPa
ν	Querkontraktionszahl
r_{ij}	Makroskopischer Kontaktradius; Kontakt $i = 1,2$; Radius $j = 1,2$
a, b	Halbachsen der Hertz'schen Kontaktellipse
u_{h1}, u_{h2}	Kompression zweier Hertz'scher Kontakte in z-Richtung
u_i	Deformation / μm ; $i = x, y, z$
u_i^*	Vorgegebene Deformation / μm ; $i = x, y, z$
$\sigma_{i,j}$	Komponenten des Spannungstensors / mPa; $i, j = x, y, z$
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$	Spannung bei Verwendung von Polarkoordinaten
$\hat{\sigma}_{ij}^k$	Diskrete Fouriertransformierte in x,y-Richtung der Komponenten des Spannungstensors $i, j = x$ oder y ; k = Schichtindex = 1 oder 2 / Nm^{-2}
F_N	Kontaktnormalkraft / N
T_i	Tangentiale Kontaktbelastung, $i = x, y$
τ_{rz}	Tangentiale Kontaktbelastung bei Polarkoordinaten
\hat{u}_i^k	Diskrete Fouriertransformierte in x,y-Richtung der Komponenten Deformationsvektors $i = x, y, z$; k = Schichtindex = 1 oder 2 / m

G	Lame-Koeffizient $\frac{E}{2(1+\nu)}$
H_c	Kontakthärte / 10^8Nm^{-2}
H_{eff}	Effektive Härte einer Kontaktschicht / MPa
H	Mittlere Dichte an Aspheritäten (GW-Modell); Höhe des Rechengebietes in z-Richtung zur iterativen Berechnung des Engewiderstandes / μm
L	Laterale Länge eines Oberflächenprofils / μm
L_{WF}	Lorentz-Zahl = $2.44 \cdot 10^8 \text{V}^2 \text{K}^{-2}$
D	Fraktale Dimension
G	Fraktaler Rauheitsparameter
Γ	Fraktale Konstante
$z_{i,j}$	Matrixkomponente der z-Werte eines Oberflächenprofils
N_x, N_y	Auflösung in x- und y-Richtung
$H(i,j)$	Zweidimensionale Zufallszahlenverteilung
Θ_{mn}	Normalverteilte zweidimensionale Matrix-Phasenwinkel (Ausloos Bermann)
R	Radius einer Aspherität
σ	rms-Rauheit (Standardabweichung des Oberflächenprofils)
σ^*	rms-Rauheit (Standardabweichung eines normalverteilten Oberflächenprofils)
m_0, m_2, m_4	Spektrale Momente; Varianz der z-Koordinaten, der Steigung bzw. Krümmung eines Linienprofils
B	Korrelationslänge
Ψ	Plastizitätsindex
μ	Gleitreibungskoeffizient
H	Viskosität eines Schmierfilms
X	Faktor, um den der Rechenbereich zur Vermeidung von Aliasing-Effekten expandiert wird.
ρ_F	Dichte eines Schmierfilms
P	Druck / Nm^{-2}
H	Spalt zwischen zwei in z-Richtung benachbarten Oberflächenpunkten / m
v_m	Mittlere Strömungsgeschwindigkeit eines Schmiermittels
K_I	Formänderungsfestigkeit / Nm^{-2}
U_E	Dehnungsenergie
$U_0^*(\sigma_{i,j})$	Komplementäre Energiedichte
U_E^*	Innere komplementäre Energie
Φ	Stressfunktion
$\Phi(x_i, y_j, z_k)$	Potentialwert im Kontaktinnern / V
Φ_1, Φ_2	Potentialwert an der Rändern des Rechengitters in z-Richtung bei der iterativen Berechnung von R_E / V
I	Strom durch die Kontaktfläche / A
Φ	Skalares Papkovich-Neuber-Potential
Ψ	Vektorielltes Papkovich-Neuber-Potential
J_0	Bessel-Funktion
$A^{(r)}, \bar{A}^{(r)}, B^{(r)} \dots$	Koeffizient der fouriertransformierten Papkovich-Neuber-Potentiale
\wedge	Logisches Und
$P_{i,i,k}$	Index-Punkt in einem dreidimensionalen Rechengitter
$K1_{i,j}, K2_{i,j}$	Index-Punkt auf Kontaktoberfläche
K	Topographiefaktor

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Zielsetzung	1
1.1	Problemstellung	2
1.2	Zielsetzung und Durchführung	4
1.3	Aufbau der Arbeit	5
2	Kenngößen für Steckverbinderkontakte	6
2.1	Klassifizierung von Steckverbindern	6
2.2	Kontaktübergangswiderstand	9
2.3	Stromtragfähigkeit geschlossener Kontakte	11
2.4	Steckhäufigkeit bzw. Steck- und Ziehkraft	16
3	Kontaktmaterialien	24
3.1	Kupfer-Legierungen als Basiswerkstoffe	24
3.2	Beschichtungsmaterialien	28
3.2.1	Edle Kontaktwerkstoffe	28
3.2.2	Unedle Kontaktwerkstoffe	30
3.2.3	Paarungsmöglichkeit unterschiedlicher Kontaktwerkstoffe	31
4	Herstellungsprozesse von Steckverbinderkontakten	32
4.1	Herstellung Rohbänder	32
4.2	Umform- und Stanzprozesse	33
4.3	Veredelungsprozesse	36
5	Messverfahren für kontaktphysikalische Kenngrößen	39
5.1	Oberflächentopographien	39
5.2	Widerstandsmessung	41
6	Theoretische Grundlagen zur Simulation elektrischer Kontakte	44
6.1	Simulation von Oberflächentopographien	45
6.1.1	Vergleich möglicher Simulationstechniken	49
6.1.2	Fraktale Modelle	49
6.1.3	Statistische Modelle	53
6.1.4	Geschwindigkeitsoptimierte Modelle	58
6.1.5	Erzeugen nicht normalverteilter Oberflächen	62
6.2	Spannungen und Deformationen	64
6.2.1	Statistische Modelle	66
6.2.2	Direkte Matrixmultiplikation	67

6.2.3	Moving Grid Methode	70
6.2.4	MLMS- und CG-Verfahren	72
6.2.5	Prinzip der kleinsten Energie	89
6.2.6	DC-FFT-Verfahren	93
6.2.7	Spannungsverteilung und Deformation beschichteter Kontaktkörper	99
6.3	Der Engewiderstand	107
6.3.1	Grundlegende theoretische Arbeiten	107
6.3.2	Angewandte Verfahren zur numerischen Simulation des Engewiderstandes	109
7	Implementierung und Verifikation	116
7.1	Simulierte Oberflächen	116
7.1.1	Vergleich mit gemessenen realen Oberflächen	118
7.2	Dehnungen und Spannungen beschichteter Kontaktkörper	152
7.2.1	Vergleich mit bestehenden Modellen und Test auf Plausibilität der Algorithmen	160
7.3	Simulation des Engewiderstandes	170
7.3.1	Vergleich mit bestehenden Modellen und Test auf Plausibilität der Algorithmen	172
8	Ergebnisse der Simulationsrechnungen	176
8.1	Kennlinien und Einflussgrößen des Engewiderstandes	176
8.1.1	Vergleich der Simulation mit gemessenen Kontaktkraft–Widerstands-Kennlinien	176
8.1.2	Abhängigkeit des Kontaktwiderstandes von der Oberflächenrauheit	180
8.1.3	Abhängigkeit des Kontaktwiderstandes von der a-Spot-Anzahl	182
8.1.4	Abhängigkeit des Kontaktwiderstandes vom Kontaktradius	187
8.1.5	Abhängigkeit des Engewiderstandes von der Oberflächenbeschichtung	191
8.2	Abhängigkeit der mechanischen Kontaktbelastung von der Schichtabfolge	198
8.2.1	Vergoldete Oberflächen	199
8.2.2	Versilberte Oberflächen	201
8.2.3	Verzinnte Oberflächen	202
9	Zusammenfassung und Ausblick	204
	Literaturverzeichnis	206

Anhang	214
Anhang 1: Formeln Hertz'scher Kontakte für beliebige elliptische Geometrien	214
Anhang 2: Aliasing-Problem und Gibbs-Phänomen	216
Anhang 3: Papkovitch-Neuber Potentiale	219
Anhang 4: Spannung in zz-Richtung	224
Anhang 5: Spannungen in xx-Richtung	226
Anhang 6: Spannung in yy-Richtung	228
Anhang 7: Spannungen in zx(xz)-Richtung	230
Anhang 8: Spannung in zy(yz)-Richtung	232
Anhang 9: Spannung in xy (yx)-Richtung	234
Anhang 10: Deformation in z-Richtung	236
Anhang 11: Deformation in x-Richtung	237
Anhang 12: Deformation in y-Richtung	238
Anhang 13: Koeffizienten des linearen Gleichungssystem (Berechnung der PN-Koeffizienten)	239
Anhang 14: Laplace Gleichung	245
Anhang 15: Kennwerte simulierter und gemessener Oberflächen	246
Anhang 16: Software „FirstContact“	271
Danksagung	283
Lebenslauf	284
Eidestattliche Erklärung	285

1 Einleitung und Zielsetzung

Zurzeit beträgt der weltweite Steckverbindermarkt etwa 33 Milliarden USD [8]. Elektrische Kontakte sind in allen Bereichen des täglichen Lebens zu finden. Unter einem elektrischen Kontakt ist im Folgenden die stromführungsfähige Berührungsfläche zweier Kontaktstücke zu verstehen. Angefangen von kleinsten Abmessungen von nur einigen Zehntel Millimetern in der Elektronik bis hin zu großen Bauformen von einigen Zentimetern Durchmesser in der Energieübertragung, dienen elektrische Kontakte zur Verbindung einzelner Stromkreissegmente. Je nach Anwendung werden über die Kontaktpunkte hohe Leistungen von mehreren hundert Ampere oder Datensignale mit einer Rate von mehreren Gigahertz geleitet. Man unterscheidet hierbei Kontakte, die während des Betriebes stets geschlossen bzw. während des Betriebes lösbar sind. Zur ersten Gruppe gehören zum Beispiel Schraub-, Klemm-, Crimp- oder Lötverbindungen. Zur zweiten Gruppe werden die Steckverbinder- und Relaiskontakte gezählt. Der Fokus dieser Arbeit liegt auf den Steckverbinderkontakten, wobei jedoch ein Großteil der erarbeiteten Ergebnisse auch auf die Relaiskontakte anwendbar ist. Als Kenngrößen der Steckverbinderkontakte kann man zum einen die Steckhäufigkeit nennen, welche in erster Linie von der mechanischen Beanspruchung (Kontaktnormalkraft) und Oberflächenbeschaffenheit (Oberflächenbeschichtung) abhängt. Zum anderen gilt als weitere Kenngröße der Kontaktübergangswiderstand, der sich in erster Linie aus einer Kombination des Engewiderstands, des Bahnwiderstandes und weiteren Widerstandskomponenten auf Grund von Fremdschichten auf der Kontaktoberfläche einstellt.

Zurzeit gibt es noch kein durchgängiges Modell, mit dem sich die mechanischen und elektrischen Eigenschaften eines Steckverbinderkontaktes genau vorhersagen lassen. Die Notwendigkeit eines solchen Modells wird jedoch ersichtlich, wenn man den Entstehungsprozess eines Steckverbinders betrachtet. Die Herstellung eines elektrischen Kontaktes umfasst Schneid-Biegeprozesse, für die zum Teil sehr aufwendige Stanzwerkzeuge benötigt werden. Die Herstellung dieser Werkzeuge bedarf zum einen mehrere Wochen und zum anderen einen hohen Investitionsbedarf von mehreren Zehntausend Euro. Die vorgestanzten Kontaktelemente müssen anschließend veredelt und nach einem weiteren Trennprozess in ein entsprechendes Kunststoffgehäuse gefügt werden. Zur Herstellung des Kunststoffgehäuses wird ebenfalls entsprechendes Spritzgießwerkzeug benötigt. Falls das Kontaktdesign hinsichtlich Steckhäufigkeit und Kontaktwiderstand nicht den Anforderungen entspricht, sind oft zeit- und kostenaufwendige Änderungen in den Stanzwerkzeugen notwendig, um die Kontaktradien bzw. die Kontaktkräfte anzupassen. Ein genaues Vorhersagemodell kann deshalb Zeit und Kosten sparen und einen Wettbewerbsvorteil bieten. Betrachtet man stark fluktuierende teils hohe Materialkosten bei den Kontaktmaterialien, so ergibt sich die Notwendigkeit, den Materialverbrauch durch eine optimierte Schichtdicke zu minieren. Hierzu ist die Kenntnis der inneren Spannungen im Schichtsystem zur Vorhersage des Verschleißverhalten zwingend notwendig. Während zum Beispiel der Gold-Preis 1972 2,55 €/g betrug, liegt der aktuelle Kurs bei 17,1USD/g (24.06.2007). Des Weiteren ist die experimentelle Messung des Kontaktübergangswiderstandes bei Kontaktnormalkräften < 10 cN kaum durchführbar, da die verwendeten Messeinrichtungen keine reproduzierbaren Messwerte in diesem Normalkraftbereich ergeben. Gerade der Bereich kleinster Kontaktkräfte gewinnt jedoch im Rahmen der immer fortschreitenden Miniaturisierung immer mehr an Bedeutung.

1.1 Problemstellung

Unabhängig davon, ob Leistungen oder Signale übertragen werden, stellen elektrische Kontaktpunkte immer einen Engpunkt innerhalb einer Leitung dar [41]. Bedingt dadurch, dass die Berührungsfläche zweier unterschiedlich geformter Kontaktkörper immer nur einen Bruchteil des Leitungsdurchmessers beträgt, kommt es im Berührungspunkt zu einer Einschnürung des Strompfades, was letztendlich zu dem so genannten Engwiderstand [41] [35] führt (siehe hierzu Abbildung 1.1). Zieht man weiterhin in Betracht, dass jede noch so glatt erscheinende Oberfläche eine mikroskopische Rauheit aufweist und es deshalb nur zu vereinzelt punktuellen Berührungen kommt (a-Spot), wird dieser Effekt (Engwiderstand) noch zusätzlich verstärkt.

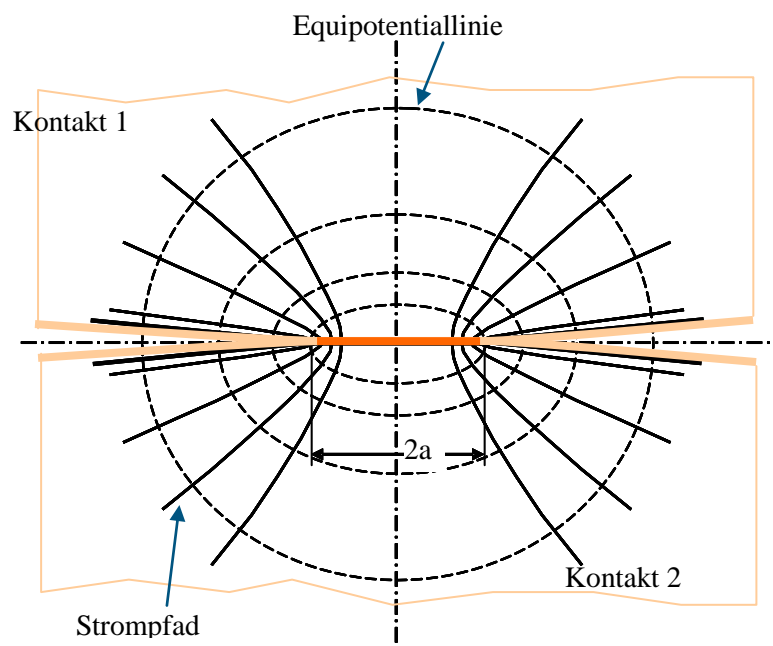


Abbildung 1.1: Einengung des Strompfades in einem Kontaktpunkt

Je nach Höhe der mechanischen Belastung und Oberflächentopographie sind diese Berührungspunkte entweder elastisch oder bereits plastisch deformiert [159] und bilden einen rein metallischen Kontakt oder beinhalten noch isolierende Anteile von Deckschichten. Diese Deckschichten können in Form von Dickschicht-Kontaminationen in Folge von Oxidation, Resten von Flussmitteln oder Befettungen auftreten und wirken im Allgemeinen als isolierend. Dünnschicht-Kontaminationen stellen aus der Atmosphäre absorbierte Monolayer aus O_2 , H_2O oder andere organische Verbindungen dar. Diese Deckschichten sind nur etwa einen Nanometer dick und können von den Leitungselektronen noch durchtunnelt werden [6][134][135]. In der Steckverbinderindustrie wird der Kontaktwiderstand bzw. die Flächenpressung der Kontaktpunkte zurzeit noch wie folgt abgeschätzt. Nach Holm [41] errechnet sich der Engwiderstand eines kreisförmigen Kontaktpunktes zu:

$$R_E = \frac{\rho}{2a} \quad (1.1)$$

wobei ρ den spezifischen Widerstand des Kontaktmaterials und a den Kontaktpunktradius darstellen.

Basierend auf der Arbeit von Heinrich Hertz „Über die Berührung fester elastischer Körper“ [38][38][39] kann in Abhängigkeit von der Normalkraft der Kontaktradius zweier elastischer sphärischer Körper berechnet werden (siehe auch Anhang 1)

$$a = \sqrt[3]{\frac{3(1-\nu^2)F_N r}{E}} \quad (1.2)$$

Formel (1.2) gilt im Falle identischer Kugeln mit Radius r . E und ν beschreiben den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl. F_N kennzeichnet die Kontaktnormalkraft. Somit ergibt sich im Falle zweier elastischer sphärischer Kontakte folgende Abhängigkeit:

$$R_E \sim (F_N)^{-1/3} \quad (1.3)$$

Praktische Erfahrungen zeigen jedoch eine Abhängigkeit in der Form (siehe auch Abbildung 2.7):

$$R_E \sim (F_N)^{-2/3} \quad (1.4)$$

In [131] wird auch ein Wert des Exponenten von 0,5 angegeben. Des Weiteren gibt die Hertz'sche Kontakttheorie keine Aussagen über die mechanischen Spannungen innerhalb der Kontaktpartner. Da es sich bei den hier betrachteten elektrischen Kontakten immer um beschichtete Kupferlegierungen handelt, ist jedoch die Kenntnis der inneren Spannungen speziell an den Grenzflächen der einzelnen Schichten von großer Bedeutung. Gerade bei sehr dünnen Oberflächenbeschichtungen wie zum Beispiel Hauchgold (0,2 μm Schichtdicke) muss sichergestellt werden, dass die inneren Spannungen nicht zum Abscheren der Oberflächenbeschichtung an der darunter liegenden Kontaktschicht führt.

Zieht man weiterhin in Betracht, dass es sich bei den Kontaktoberflächen immer um raue Topographien handelt, kommt es bei der Berührung der beiden Kontaktpartner, wie in Abbildung 1.2 dargestellt, immer erst zum Aufeinandertreffen einiger weniger mikroskopisch kleiner Punkte¹.

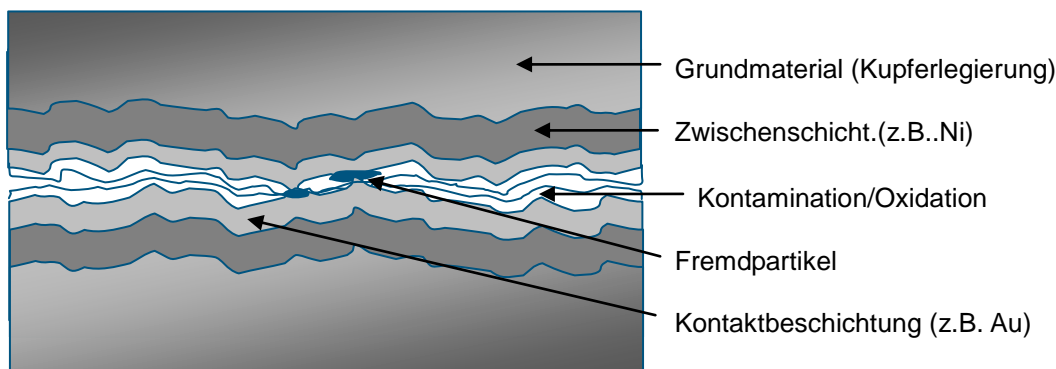


Abbildung 1.2: Schematische Darstellung eines Schnitts durch einen Kontaktpunkt

Die daraus resultierende mikroskopisch kleine Berührungsfläche ist nicht in der Lage, die resultierende hohe Flächenpressung zu tragen. Es kommt deshalb zu einer Deformation der initialen Berührungspunkte und in Folge davon zu einer weiteren Erhöhung der in Kontakt tretenden Oberflächenspots. Dies geschieht so lange, bis sich ein Gleichgewicht zwischen resultierender Berührungsfläche und Flächenpressung einstellt. Maßgebliche Parameter hierzu sind zum einen die Materialparameter

¹ Zu Beginn sollte sich streng genommen nur ein Punkt berühren.

wie die maximale Bruchspannung (Yield Strength) und Oberflächenrauheit. Zusätzlich ist zu beachten, dass reale Oberflächen ab einer bestimmten Vergrößerung fraktale (siehe hierzu Kapitel 6.1.2) Eigenschaften zeigen. Bearbeitungsspuren z.B. aus Schleif- oder Walzprozessen sind hier nicht mehr zu erkennen [91][150]. Auf Grund der fraktalen Eigenschaften realer Oberflächen differiert die Zahl und Größe bzw. der Radius der Berührungspunkte, je nach betrachteter Auflösung der Oberflächentopographie [72]. Wegen der obigen Überlegung ist deshalb zu erwarten, dass es immer Berührungspunkte gibt, die so hohe Flächenpressungen erfahren, dass es hier schon zu einer plastischen Deformation kommt. Laut Willner [159] sind bei realen Oberflächen die Deformationen der Berührungspunkte immer im plastischen Bereich. Um eine genauere Vorhersage bezüglich Kontaktwiderstand und Verschleißverhalten rauer und plastisch deformierbarer Oberflächen machen zu können, ist eine Erweiterung der Hertz'schen Kontakttheorie zwingend notwendig.

In Tabelle 1.1 werden die Unterschiede zwischen dem Hertz'schen Kontaktmodell und einem realen elektrischen Kontakt aufgezeigt.

Tabelle 1.1: Vergleich zwischen Hertz'schen und realen Kontakten

Hertz'scher Kontakt	Realer Kontakt
Mathematische Beschreibung der Berührungsflächen in max.2 Variablen (Kontaktradius)	oft Freiformflächen, mathematisch nicht einfach beschreibbar
Keine Rauigkeit	gegebene Oberflächentopografie
keine Mehrschichtsysteme	gegebene Schichtsysteme mit verschiedenen inhomogenen Materialeigenschaften, auch Verbundmaterialien
rein elastische Deformation der Kontaktpunkte	Bereiche mit plastischer Deformation der Kontaktfläche
keine Beschreibung der inneren Spannungen für mehrschichtige Systeme	Maximale mechanische Spannungen je nach Lastfall innerhalb des Schichtsystems
keine tangential Beanspruchung	tangential und rotorische Beanspruchungen teils gegeben
keine Normal-Beanspruchung der Oberflächen außerhalb der Kontaktzone	Beanspruchung der Oberflächen im Übergang der Kontaktzone durch Deckschichten und Partikel
Nur eine homogene Berührungsfläche	Mehrere Berührungspunkte

1.2 Zielsetzung und Durchführung

Ziel dieser Arbeit ist es, ein Simulationswerkzeug zu entwickeln, das es erlaubt, die mechanische Stressbelastung und die elektrischen Kennwerte eines elektrischen Kontaktes zu bestimmen und graphisch darzustellen. Die zu erstellende Software soll es ermöglichen, komplexe Analysen durch wenige Benutzereingaben und geringem Schulungsaufwand durchzuführen, damit Entwickler aus den entsprechenden Fachabteilungen Optimierungen des Kontaktdesigns gemäß den Anforderungsvorgaben auf schnelle und einfache Weise durchführen können. Hierbei ist darauf zu achten, dass die Hardwareanforderungen und Rechenzeiten auf ein Minimum beschränkt bleiben, um eine Implementierung der Software auf normalen Arbeitsplatzrechner zu ermöglichen. Um doppelte Simulationsrechnungen zu vermeiden, bzw. um bestehende Ergebnisse abrufen zu können, sollen alle Simulationsparameter und Ausgangsdaten in einer Datenbankanwendung dokumentiert werden. Da die Simulationssoftware auf Windows-Rechnern laufen soll und auf diesen Rechnern standardmäßig MS-Office installiert ist, wurde die Datenbankschnittstelle so gewählt, dass mittels MS-Access ein Datenzugriff ermöglicht ist. Zur eigentlichen Programmentwicklung dient die Entwicklungsumgebung Turbo C++ der Firma Borland. Um etwaige Lizenzkosten zu vermeiden, wurde bei der Programmierung darauf

geachtet, dass die Software auch mit der frei erhältlichen Explorer-Variante zu bearbeiten und kompilieren ist. Zur graphischen Darstellung der Simulationen wurde das als „Open Source“ verfügbare „Visualization Toolkit“ VTK5.0 der Firma Kitware gewählt [132][5].

Als Eingangsgrößen des Modells dienen die in Tabelle 1.2 aufgeführten Parameter.

Tabelle 1.2: Eingangs- und Ausgangsgrößen der Kontaktpunktsimulation:

Eingangsgrößen	Ausgangsgrößen
Schichtaufbau (z.B. Sn / Ni / CuSi6)	Elastisch plastische Deformation der Kontaktpunktes
Oberflächentopographie (gemessen / simuliert)	Mechanische Spannungsverteilung innerhalb der Kontaktschichten
Kontaktgeometrie	Anzahl der a-Spots / wahre Kontaktfläche
Kontaktnormal- und Tangentialkraft (Reibkoeffizient)	Kontaktwiderstand (Engwiderstand und Bahn-widerstand)
Mechanische Kennwerte der Kontaktmaterialien (E-Module, Bruchdehnung)	Optional Wärmebelastung
Elektrische Kennwerte der Kontaktmaterialien (spezifischer Widerstand)	

1.3 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist nach folgendem Leitfaden aufgebaut. Zu Beginn wird auf die wesentlichen Merkmale von Steckverbindern wie Klassifizierung sowie elektrische und mechanische Kennwerte eingegangen (Kapitel 2). Im Anschluss daran erfolgt eine Gegenüberstellung der verwendeten Kontaktmaterialien. Hierbei wird zwischen den Kupferbasis-Legierungen und den eigentlichen Kontaktbeschichtungen unterschieden. Diese werden wiederum in edle und nicht edle Metalle unterteilt. Kapitel 4 beschreibt kurz die relevanten Herstellungsverfahren wie Walz-, Umform- und Beschichtungsverfahren. Nach einer Vorstellung der verwendeten Meßverfahren bzw. –Geräte zur Messung der Oberflächentopographien und Kontaktübergangswiderstände beginnt in Kapitel 5 der Hauptteil der Arbeit.

Da sich diese Arbeit mit drei Schwerpunkten beschäftigt:

1. Oberflächentopographien
2. Spannungen und Deformationen in Mehrschichtsystemen
3. Kontaktübergangswiderstand

sind die Themenblöcke Theorie (Kapitel 6) und Implementierung (Kapitel 7) entsprechend in diese drei Hauptthemenpunkte unterteilt. Alle in die Software implementierten Algorithmen werden soweit möglich mit Beispielen aus der Literatur beziehungsweise mit realen Messergebnissen verglichen und validiert. In Kapitel 8 werden die grundlegenden Einflussgrößen wie Oberflächentopographie, Kontaktnormalkraft und Schichtaufbau auf den Kontaktwiderstand beziehungsweise die Spannungen und Deformationen typischer Steckverbinderkontakte untersucht. Kapitel 9 beinhaltet eine Zusammenfassung aller Ergebnisse und schließt mit einem Ausblick auf weiterführende Arbeiten ab.

Dem Literaturverzeichnis folgt ein ausführlicher Anhang mit allen relevanten mathematischen Herleitungen. Weiterhin wird eine kurze Beschreibung und Benutzerführung der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Software „First Contact“ gegeben.

2 Kenngrößen für Steckverbinderkontakte

Auf Grund der großen Bandbreite an Anwendungen, welche ein Steckverbindersystem abdecken muss und der Vielfalt an Typen und Designs, macht die Auswahl eines geeigneten Steckverbinders mitunter sehr schwer. Es liegt deshalb nahe, Steckverbinder mit Hilfe eines standardisierten Schemas zu klassifizieren. Hierzu gibt es zum Beispiel eine Arbeitsgruppe innerhalb des ZVEI (AK Steckverbinder), die mittels Klassenmerkmalen analog zu objektorientierten Strukturen in der Informatik Steckverbinder so zu beschreiben versucht, dass diese mittels online-Datenbanksystemen (eClass) verwaltet werden können. Dieser Ansatz ist jedoch bisher (Stand Juni 2007) noch nicht zum Abschluss gekommen.

2.1 Klassifizierung von Steckverbindern

In der IEC 61360 wird ein Klassifizierungsschema definiert, das Steckverbinder über deren Form (rund oder rechteckig) oder deren Anwendungsbereich ordnet. Dieses System findet jedoch in der Steckverbinderindustrie wenig Verwendung. Jeder Steckverbinderhersteller hat mitunter eine eigene Methode, seine Produkte innerhalb der Kataloge zu gruppieren [27]. Das in Tabelle 2.1 aufgelistete Beispiel zeigt ein Klassifizierungsmuster von Tyco Electronics.

Tabelle 2.1: Klassifizierung von Steckverbinderfamilien

Einteilung	Untergliederung	Beispiel
In-System-Steckverbinder ² (On Board - Board to Board)	Sockel	DIP, SIP, PLCC, PQFP, PGA- µPGA-, BGA- and LGA- Sockel, MPI (Abbildung 2.1)
	Card Edge, direkte Steckverbinder	Simm, Dimm, PCI-, ISA-Bus (Abbildung 2.2)
In-System-Steckverbinder (Board to Board)	Produktfamilien	Modular connectors DIN 41621, MicroMatch, Fine Pitch, SMD (Abbildung 2.3)
	Rückwand (Backplane) Steckverbinder	DIN 41612, 2.5 mm SIPAC, 2mm Z-Pack, Denis Pack (Abbildung 2.4)
In System Steckverbinder (Board to Wire)	Flachbandkabel- / Folien Steckverbinder	Latch connectors, DIN – ribbon cable (Abbildung 2.5 links), MicroMaTch, FlexFoil, FPC-FFC
	Einzeldraht Signal Steckverbinder	Modulare Steckverbinder , Multifitting, DuoPlug (Abbildung 2.5 rechts), Kabel Steckverbinder für Rückwand Anwendungen
	Leistungs- Steckverbinder	Pin und Sockel, Mate-N-Lock
IO-Steckverbinder zur Signal-Leistungsübertragung an externe Schnittstellen	Produktfamilien	D-Sub (Abbildung 2.6 links), Rückwand Kabel Steckverbinder, DIN 41612;
		PC- DIN, USB, RJ45 (Abbildung 2.6 Mitte), M8, M12 (Abbildung 2.6 rechts)
		Stromversorgungs- Steckverbinder

² Steckverbinder, die sich innerhalb eines Gerätes/Gehäuses befinden

Ein weiteres Klassifizierungsmerkmal ist die Art der Kontaktierung zwischen unterschiedlichen Komponenten des Strompfades. Man unterscheidet hier zwischen Kontakten, welche permanent während des Betriebes geschlossen sind und Kontaktstellen, die während des Betriebes gelöst werden können. Zur ersteren Gruppe gehören zum Beispiel Schraub-, Schweiß- oder Lötverbindungen, auf die in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen wird. Zur zweiten Gruppe gehören Steckverbinder- und Relaiskontakte [138]. Steckverbinderkontakte und Relaiskontakte haben ein sehr unterschiedliches Anforderungsprofil. Während Steckverbinder-Kontakte nur einige zehn (Sn, Ag Oberfl.) bis einige hundert Mal gesteckt werden, schalten Relais Kontakte einige Hunderttausend bis mehrere Millionen Mal. Während Steckverbinderkontakte vornehmlich durch die Reibung während des Steckvorgangs verschleifen, kommt es bei Relaiskontakten durch einen Verschleiß durch Abbrand der Kontakte. Steckverbinderkontakte haben in der Regel nur eine wenige μm dicke Kontaktbeschichtung. Relaiskontakte bestehen im Allgemeinen aus einem massiven Kontakt. Die in dieser Arbeit aufgeführten Simulationstechniken sind jedoch sowohl für Steckverbinder- als auch für Relaiskontakte anwendbar. An Hand der in Abbildung 2.1 bis Abbildung 2.6 dargestellten wenigen Beispiele kann man die Vielfalt an unterschiedlichen Steckverbinderformen erkennen. All diesen unterschiedlichen Bauformen ist jedoch das gleiche Kontaktprinzip zu Grunde gelegt.

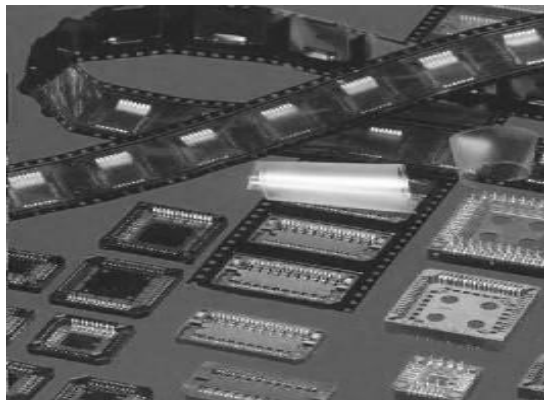


Abbildung 2.1: Beispiel von IC Sockeln (Quelle Tyco Electronics)

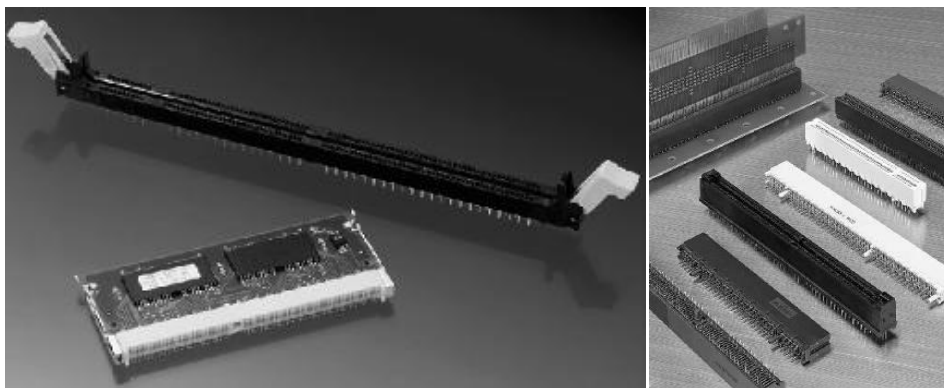


Abbildung 2.2: SIMM DIMM direkte Steckverbinder (links) und Standard-Bus-Steckverbinder (rechts)
(Quelle Tyco Electronics)

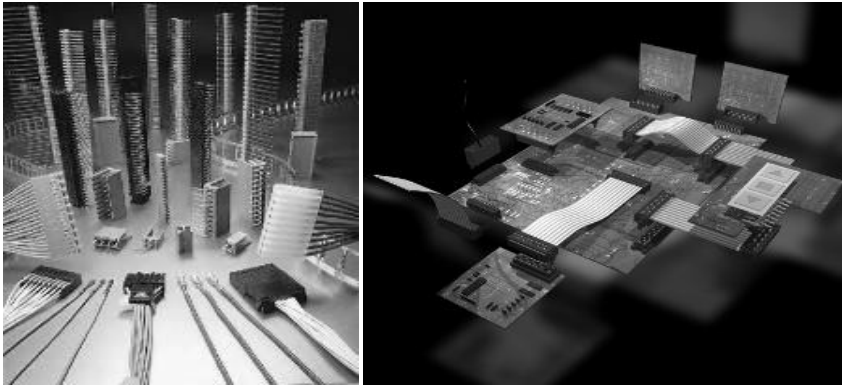


Abbildung 2.3: Beispiel zweiteiliger Leiterplatten-Steckverbinder (Quelle Tyco Electronics)

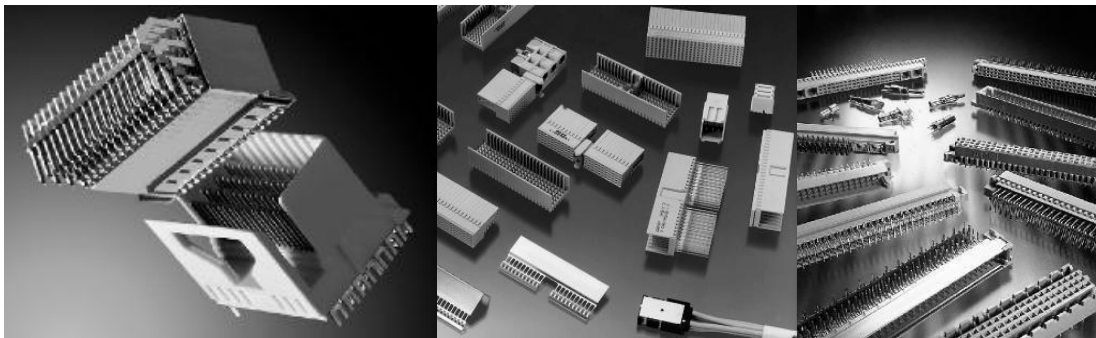


Abbildung 2.4: Beispiel von Rückwand-Steckverbindern (von links nach rechts: Densi Pack, Z-Pack, 2.5 mm SIPAC) (Quelle Tyco Electronics)

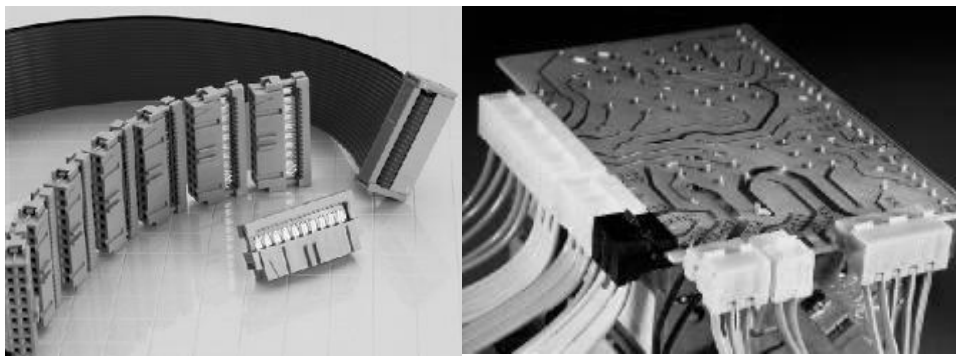


Abbildung 2.5: Beispiel von Leiterplatten zu Kabel-Steckverbindern (Quelle Tyco Electronics)

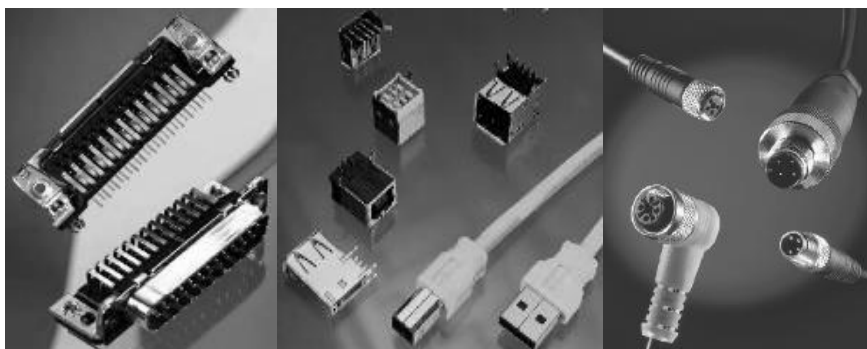


Abbildung 2.6: Beispiel einiger IO-Steckverbinder-Familien (von links nach rechts D-Sub, RJ45 und USB, M8 und M12) (Quelle Tyco Electronics)

Neben den bauförmbedingten Gruppierungsmerkmalen sind die physikalisch-elektrischen Eigenschaften eines Kontaktpunktes die wichtigsten Kenngrößen. Neben Kenngrößen wie Spannungsfestigkeit

(Kontakt zu Kontakt, Kontakt zu Gehäuse), Anzahl der Pole oder Signalübertragungsgeschwindigkeit, sind Kontaktwiderstand, die daraus resultierende Stromtragfähigkeit und die maximal zulässige Stechkäufigkeit die limitierenden Größen während des Betriebes. Faktoren wie Spannungsfestigkeit oder gegenseitige Kapazität werden im Nachfolgenden nicht behandelt, da diese Kennwerte nicht aus den Simulationsergebnissen abgeleitet werden können bzw. in der Thematik der Arbeit keine Rolle spielen.

2.2 Kontaktübergangswiderstand

Der gesamte Widerstand eines Steckverbinderkontakts setzt sich aus drei Anteilen zusammen.

$$R_{\text{Kontakt}} = R_{\text{Grundmaterial}} + R_{\text{Enge}} + R_{\text{Tunnel}} \quad (2.1)$$

Der Widerstand des Grundmaterials wird in der Literatur auch häufig als Bahnwiderstand und der Tunnelwiderstand als Fremdschichtwiderstand bezeichnet. Betrachtet man zum Beispiel einen Kupferdraht mit einem Durchmesser von ~2,5 mm. Dann erzeugt ein Drahtstück mit einer Länge von 1 cm bei einem spezifischen Widerstand von $0,0175 \Omega \text{mm}^2/\text{m}$ einen Widerstand von $R_{\text{Grundmaterial}} = 0,028 \text{ m}\Omega$. Die Länge von 1 cm entspricht in etwa der Länge eines Steckverbinderkontaktes. Der typische Widerstand eines elektrischen Kontaktes beträgt etwa $R_{\text{Enge}} + R_{\text{Tunnel}} = 1 \text{ m}\Omega$. Somit wird über die Länge eines Steckverbinderkontaktes etwa 80% der gesamten Wärme innerhalb des Kontaktpunktes erzeugt. Eine Reduzierung des Kontaktwiderstandes kann bei vorgegebener Materialpaarung nur über die Vergrößerung der effektiven Kontaktfläche erreicht werden. Eine Vergrößerung der Kontaktfläche wird durch eine Erhöhung der Kontakt-Normalkraft erreicht. Die Erhöhung der Kontakt-Normalkraft erhöht jedoch die Verschleißneigung und reduziert die Anzahl der maximal erreichbaren Steckzyklen. Weiterhin kann eine Erhöhung der Kontaktkraft bei gleicher Kontaktfeder-Materialdicke nur durch den Einsatz von Kupferlegierungen mit höherer Federsteifigkeit erreicht werden. Eine höhere Federsteifigkeit geht jedoch mit einer Erhöhung des spezifischen Widerstandes und somit des gesamten Widerstandes einher.

Unabhängig davon, ob ein Kontaktpunkt (Steckverbinder oder Relais) als Flächen-, Linien- oder Punktkontakt konstruiert ist, ergibt sich bei der Berührung dieser Kontaktstücke immer nur eine so genannte scheinbare Kontaktfläche. Denn auf Grund der Oberflächentopographie kommt es immer nur zur Berührung einzelner mikroskopisch kleiner Punkte (a-Spots), die je nach Belastung ihre Größe ändern, miteinander verschmelzen oder Cluster bilden. Analog zu Holm [41] setzt sich der Engewiderstand aus Anteilen der einzelnen Engewiderstände der a-Spots und der a-Spot-Cluster zusammen. Um die gegenseitige Beeinflussung eng beieinander liegender a-Spots zu berücksichtigen, wird zum Beispiel von Greenwood [35] folgende Formel angegeben.

$$R_E = \rho \left(\frac{1}{2na} + \frac{1}{2\alpha} \right) \quad (2.2)$$

Hierbei steht a für den Radius eines a-Spot, der hier als konstant angenommen wird. Die Anzahl der a-Spots wird mit n angegeben und der Radius des Clusters mit α . Der spezifische Widerstand des Kontaktmaterials wird mit ρ gekennzeichnet. Da es durch die gegenseitige Beeinflussung der nahe beieinander liegenden a-Spots zu einer Widerstandserhöhung kommt, kann aus dem experimentell bestimmten Kontaktwiderstand nicht auf die wahre Kontaktfläche zurück geschlossen werden.

Neben dem Widerstand auf Grund der Einengung der Strompfade muss zusätzlich der Einfluss von Deckschichten beachtet werden. Von allen verwendeten Kontaktbeschichtungen besitzt Gold die geringste Deckschicht. Silber zeigt zwar ebenfalls keine Oxidationsschichten, neigt jedoch zur Sulfidbildung an der Oberfläche. Zinn- und Zinn-Blei-Legierungen besitzen immer eine nicht leitfähige Oxidschicht. Um einen elektrischen Kontakt zu gewährleisten, müssen diese Schichten mechanisch durchdrungen werden. Dies geschieht im Allgemeinen durch die Reibbewegung während des Steckvorganges bzw. durch eine ausreichend hohe Kontaktnormalkraft. Misst man den Kontakt-Übergangswiderstand in Abhängigkeit von der Kontaktnormalkraft [43], so ergibt sich das in Abbildung 2.7 gezeigte Verhalten³. Gemessen wurde mit einer Au-Sonde mit einem Radius von 1,5 mm. Die Sonde wurde ohne Relativbewegung auf die zu messende Schicht aufgesetzt.

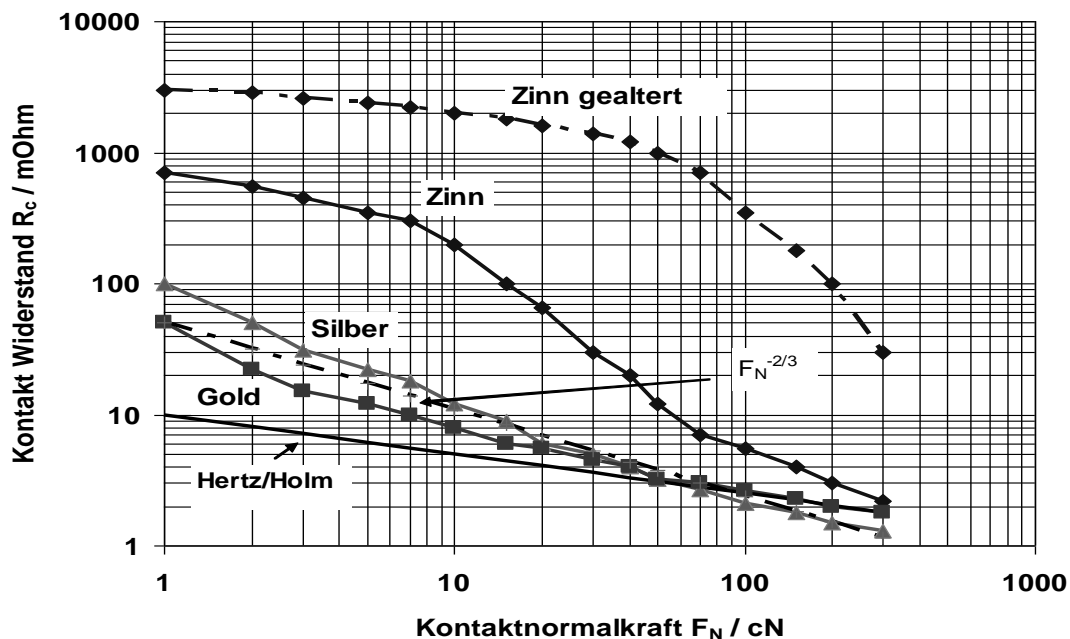


Abbildung 2.7: Gemessene Abhängigkeit des Kontaktwiderstandes gängiger Kontaktmaterialien von der Kontaktnormalkraft⁴

Obwohl Silber bei Raumtemperatur mit $1.47 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ einen geringeren spezifischen Widerstand besitzt als Gold ($2.02 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$), zeigt dieses Material bis zu einer Normalkraft von 50 cN einen höheren Kontakt-Übergangswiderstand. Erst ab einer Kontakt-Normalkraft von größer 50 cN werden die Sulfidschichten durchdrungen und es stellt sich ein geringerer Widerstand als bei Gold ein. Bei Zinn erkennt man das Durchdringen der Zinn-Oxidschicht ab einer Normalkraftbelastung von 10 cN bzw. bei stärker oxidierten Proben bei 50 cN. Bei einer Kontakt-Normalkraft größer 100 cN sind diese immer vorhandenen Deckschichten unabhängig von der Kontaktbeschichtung durchbrochen und spielen im Falle eines ruhenden Kontaktes keine Rolle mehr. Neben der Stromführung über rein metallische Kontaktpunkte tritt im Falle dünnster Schichten im Nanometerbereich noch ein weiterer Stromfluss auf Grund von Tunneleffekten auf [134][135]. In [65] werden einige spezifische Tunnelwider-

³ Messverfahren gemäß Kapitel 5.2

⁴ Quelle: Tyco Electronics Bensheim

stände als Funktion der Schichtdicke angegeben (siehe Tabelle 2.2). Der Vollständigkeit halber sei hier eine Faustformel für den Tunnelwiderstand analog zu [65] angegeben:

$$R_{Tunnel}/\Omega \approx 10^9 / cNcm^{-2} \frac{\rho_{Tunnel}/\Omega cm^2 \cdot H_B}{F/cN} \quad (2.3)$$

Hierbei stellt H_B die Brinell-Härte und F die Kontaktkraft in cN dar.

Tabelle 2.2: Typische Werte des spezifischen Tunnelwiderstands

Filmdicke / Angström	Spez. Tunnelwiderstand $\rho_{Tunnel}/\Omega cm^{-2}$
5	10^{-8}
10	$10^{-7} - 7 \cdot 10^{-7}$
25	$2 \cdot 10^{-7} - 10^{-6}$
100	$10^{-3} - 10^{-2}$

Eine grobe Näherung zur Vorhersage des Kontaktwiderstandes wird von Holm [41] gegeben. Holm erkannte, dass die Korrelation zwischen Kontaktnormalkraft und Kontaktwiderstand neben dem spezifischen Widerstand der Kontaktpartner noch von den mechanischen Eigenschaften der Kontaktmaterialien abhängt.

$$R = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \sqrt{\frac{H_c}{F_N}} \quad (2.4)$$

Hierbei gibt H_c die so genannte Kontakthärte (Meyer's Härte) des weicheren Materials an. Die in der Literatur angegebenen Werte für die gängigen Kontaktmaterialien differieren jedoch sehr stark. So wird z.B. in [136] für Silber ein Wert zwischen $3 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2 - 7 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ und für Kupfer ein Wert zwischen $4 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2 - 9 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ angegeben.

Aus den oben dargestellten Formeln können jedoch noch keine Einflüsse von Zwischenschichten oder Grundmaterial auf den Kontaktwiderstand abgeleitet werden. Aus Messungen⁵ ist jedoch bekannt, dass der gesamte Schichtaufbau letztendlich die maximale Stromtragfähigkeit bestimmt.

2.3 Stromtragfähigkeit geschlossener Kontakte

Ausschlaggebend für die Stromtragfähigkeit eines elektrischen Kontaktes ist letztendlich das Verhältnis zwischen der entstehenden Wärmemenge auf Grund des Ohm'schen Widerstandes und der abgeführten Wärmemenge auf Grund von Wärmeleitung, Wärmestrahlung und Konvektion. Einige grundlegende Arbeiten hierzu sind in [48][12][44] zu finden. Bei metallischen Leitern erfolgt der Wärmetransport vor allem durch die Leitungselektronen und ist deshalb eng mit dem spezifischen Widerstand des Materials gekoppelt. Aus dem Wiedemann-Franz-Lorenz-Gesetz ergibt sich:

⁵ Tyco Electronics Bensheim

$$\frac{\rho \cdot \lambda}{T} = L_{WF}; \quad L_{WF} = 2.44 \cdot 10^{-8} \frac{V^2}{K^2} \quad (2.5)$$

mit dem spezifischen Widerstand ρ , der thermischen Leitfähigkeit λ und der Wiedemann-Franz-Konstante L_{WF} . Nach Holm ergibt sich als Zusammenhang zwischen dem Potentialabfall über einen a-Spot (kreisförmige Verengung) und der Temperaturerhöhung folgender vereinfachter Zusammenhang:

$$\int_{T_0}^{T_0+\Delta T} \rho \lambda dT = \frac{U_c^2}{8} \quad (2.6)$$

Anwenden von Formel (2.5) ergibt:

$$\int_{T_0}^{T_0+\Delta T} \rho \lambda dT = \int_{T_0}^{T_0+\Delta T} L_{WF} T dt = \frac{1}{2} L_{WF} ((T_0 + \Delta T)^2 - T_0^2) = \frac{U_c^2}{8} \quad (2.7)$$

Beziehungsweise:

$$((T_0 + \Delta T)^2 - T_0^2) = \frac{U_c^2}{4 L_{WF}} \quad (2.8)$$

Aufgelöst nach ΔT ergibt:

$$\Delta T = -T_0 + \sqrt{T_0^2 + \frac{U_c^2}{4 \cdot L_{WF}}} = -T_0 + \sqrt{T_0^2 + \frac{R_{Ea-Spot}^2 \cdot I_{a-Spot}^2}{4 \cdot L_{WF}}} \quad (2.9)$$

Für $(T_0 + \Delta T)^2 \gg T_0^2$ vereinfacht sich Formel (2.8) zu:

$$T_0 + \Delta T = 3200 \frac{K}{V} \cdot U_c \quad (2.10)$$

Legt man zum Beispiel bei einem elektrischen Kontakt 100 a-Spots zugrunde und einen Gesamtwiderstand von $\sim 1 \text{ m}\Omega$, so ergibt sich für den mittleren a-Spot-Engewiderstand $\sim 100 \text{ m}\Omega$. Hierbei wurde vereinfacht von einer Parallelschaltung der einzelnen a-Spots ausgegangen. Nimmt man als Randbedingung eine Umgebungstemperaturerhöhung von $T_0 = 273^\circ\text{K}$ an, zeigt Abbildung 2.8 die Abhängigkeit der a-Spot-Erwärmung vom Engewiderstand und der Strombelastung. Wie schon aus der im a-Spot umgesetzten ohmschen Leistung ($P_{a-Spot} = R_E I^2$) steigt die Kontakterwärmung zu Beginn näherungsweise mit dem Quadrat des durchfließenden Stromes, um im Falle hoher Ströme asymptotisch in eine lineare Form überzugehen.

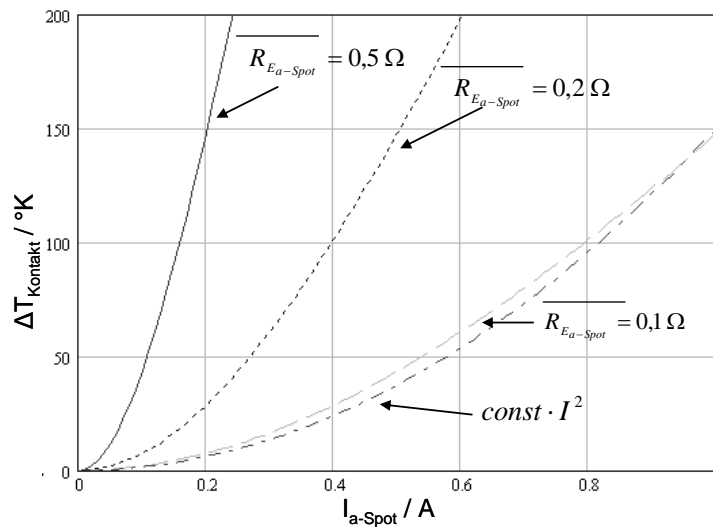


Abbildung 2.8: Abhängigkeit der a-Spot Erwärmung vom Engwiderstand und der Strombelastung;
const = 400 Ω/A (siehe I^2 Linie)

Wie zu Beginn von Kapitel 2.2 bereits erwähnt, werden 80% der Wärme direkt im Kontaktpunkt erzeugt. Die erzeugte Wärmeenergie muss vom Grundmaterial abgeführt werden. Abbildung 2.9 zeigt ein Schliffbild durch einen direkten Leiterplatten-Steckverbinderkontakt. Man erkennt deutlich das geringe Verhältnis zwischen eigentlichem Kontaktbereich und den stromführenden Teilen. Weiterhin ist im rechten Teil der Abbildung die Kontaktbeschichtung zu sehen. Neben der Kontaktnormalkraft ist diese Beschichtung ausschlaggebend für die Stromtragfähigkeit und die mögliche Steckhäufigkeit.

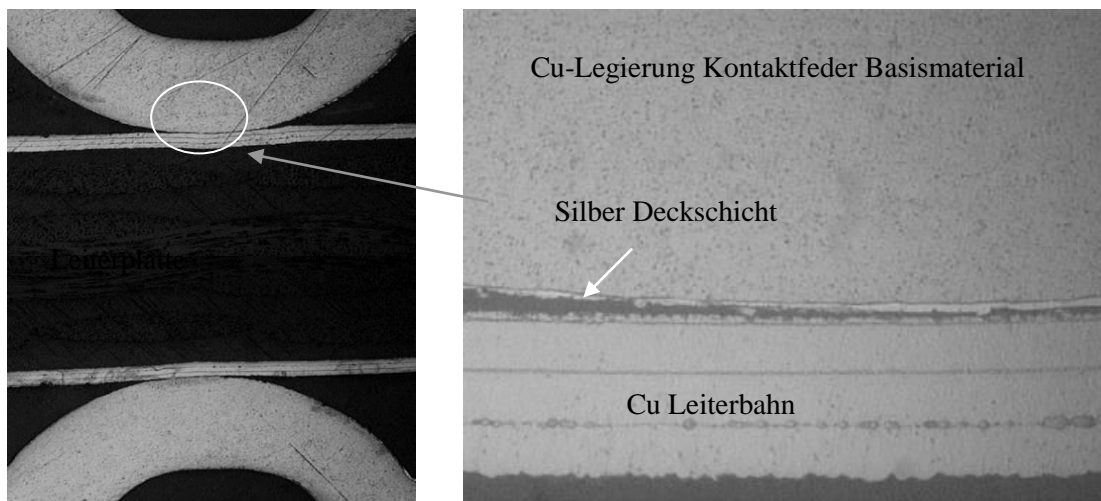


Abbildung 2.9: Schliffbild durch die Kontaktpunkte eines direkten Leiterplatten-Steckverbinderkontaktes (Kontaktschicht Ag).⁶

Tabelle 2.3 verdeutlicht das unterschiedliche Stromtragverhalten von reinen Kontaktschichten und beschichteten Kontakten. In der Messung [44] wird ein Flachkontakt gegen eine Probe von 1,5 mm

⁶ Quelle Tyco Electronics

Radius mit einer Normalkraft von 2 N gedrückt⁷. Im Falle der beschichteten Proben wird immer die gleiche Schichtdickenabfolge 2 µm Kontaktschicht über 4 µm Nickel Zwischenschicht auf Kupfer-Grundmaterial gewählt. Beschichtete Kontakte zeigen gegenüber den reinen Kontaktmaterialien eine deutlich geringere Stromtragfähigkeit. Da Silber als einziges aufgeführtes Material eine höhere Leitfähigkeit als Kupfer besitzt (Ag/Cu → 1.47/1.72), sollte zu erwarten sein, dass nur im Falle von Ag eine Verringerung der Stromtragfähigkeit bei beschichteten Kontakten festzustellen ist.

Zwar ist der Rückgang der Stromtragfähigkeit auf ~ 20% des Ausgangswertes bei Ag am höchsten, Gold und Zinn zeigen jedoch ebenfalls eine Reduktion auf ~30% des Ursprungswertes. Es ist zu vermuten, dass die Unternickelung von 4µm einen starken Einfluss auf die Stromtragfähigkeit besitzt. Ni ist jedoch als Funktionsschicht unerlässlich (siehe Kapitel 3.2). Der Einfluss der Nickel-Zwischenschicht kann mit den oben aufgeführten Formeln jedoch nicht erfasst werden. Der Einfluss einer Zwischenschicht auf den Kontaktübergangswiderstand konnte in analytischer Form nicht in der Literatur gefunden werden und wird im Laufe dieser Arbeit durch ein numerisches Verfahren gelöst (siehe hierzu Kapitel 7.3). Wie in Formel (2.8) und (2.9) ersichtlich ist, hängt die maximale Stromtragfähigkeit auch von der Umgebungstemperatur T_0 ab. Die Stromtragfähigkeit eines Steckverbinders wird deshalb über die so genannte Derating-Kurve angegeben.

Definiert man die maximale zulässige Temperatur als:

$$T_{\max} = \Delta T + T_0 \quad (2.11)$$

So ergibt die Umstellung der Glg. (2.9) folgende Abhängigkeit:

$$I(T_0) = \sqrt{(T_{\max}^2 - T_0^2) \cdot \frac{4 \cdot L}{R_E^2}} \quad (2.12)$$

Für eine Strompfad-Verengung mit einem Engwiderstand von 2 mΩ und einer maximal zulässigen Übertemperatur von 150°C ergibt sich der in Abbildung 2.10 dargestellte Verlauf. In der Praxis wird die Derating-Kurve mit einem Sicherheitsfaktor angegeben. Typischerweise wird der maximal zulässige Strom nur mit 80% des gemessenen Stromes angegeben.

Tabelle 2.3: Übertemperatur in Folge des Stromflusses. ($F_N = 2$ N, Radius Messsonde = 1,5 mm; 2 µm Kontaktschicht über 4 µm Ni auf Cu-Grundmaterial)

Kontakttyp	Reines Material		Beschichteter Kontakt	
	$\Delta T = 1$ K	$\Delta T = \text{Schmelztemp.} / ^\circ\text{C}$	$\Delta T = 1$ K	$\Delta T = \text{Schmelztemp.} / ^\circ\text{C}$
Ag	17 A	165 A	3,3 A	34 A
Au	9 A	85 A	2,6 A	27 A
AuPd	Keine Angabe	Keine Angabe	1,8 A	21 A
Pd	2 A	20 A	Keine Angabe	Keine Angabe
Sn	4 A	35 A	1,5 A	13 A

⁷ Quelle: Tyco Electronics Werte wurden aus Graphik übertragen und stellen keine exakten Werte dar.

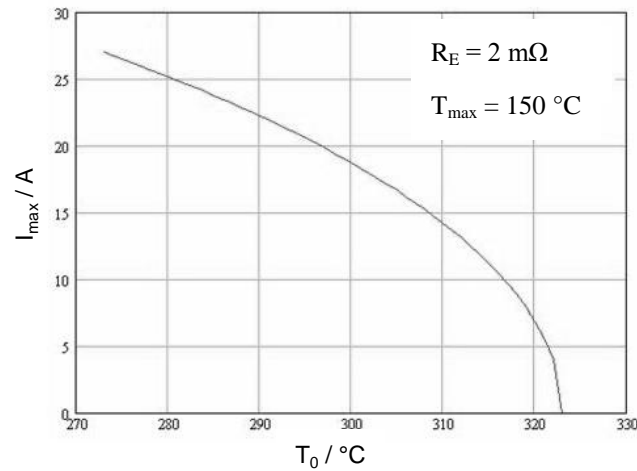


Abbildung 2.10: Schematische Darstellung einer Derating-Kurve.

Wie aus Tabelle 2.3 ersichtlich ist, werden Steckverbinder-Kontakte für Hochstromanwendungen im Allgemeinen als Silber-beschichtete Kontakte ausgeführt. Um den gesamten Kontaktwiderstand weiter zu verringern, werden Steckverbinderkontakte als Mehrfachkontakte ausgeführt. Hierbei werden je Kontaktfeder–Stift-Paar mehrere Kontaktpunkte realisiert. In Folge der Parallelschaltung dieser Kontakte kommt es zu einer entsprechenden Verringerung des Gesamtwiderstandes und zu einer entsprechenden Verringerung der Stromdichte pro Kontaktpunkt. Während Abbildung 2.9 einen typischen Doppelkontaktpunkt zeigt, wird in Abbildung 2.11 ein Hochstrom-Steckverbinderkontakt dargestellt, bei welchem die Kontaktpunkte über eine Ringfeder realisiert werden. Hierdurch wird eine sehr hohe Anzahl an Kontaktpunkten bei gleichzeitig geringer Steckkraft erreicht.

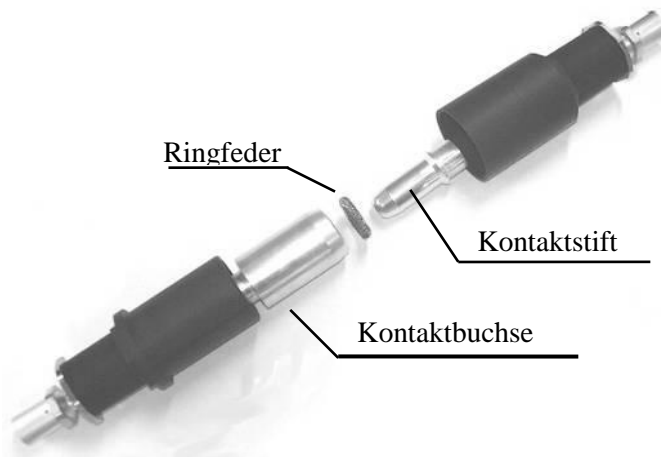


Abbildung 2.11: Hochstrom-Steckverbinder-Kontakt; Ringfeder zur Realisierung multipler Kontaktpunkte (Tyco Electronics).

2.4 Stechkäufigkeit bzw. Steck- und Ziehkraft

Neben den elektrischen Kenngrößen eines Steckverbinders sind die mechanischen Eigenschaften von großer Bedeutung. Bei den folgenden Aussagen wird immer davon ausgegangen, dass beim Öffnen bzw. Schließen der Kontaktpartner keine Spannung anliegt, die zur Ausbildung eines Lichtbogens führt. Die hier behandelten Verschleißmechanismen sind ausschließlich mechanischer Natur. Die Stechkäufigkeit eines Steckverbinders sei so definiert, dass es nach einer spezifizierten Anzahl von Steckzyklen weder zu einem Durchrieb der Steckoberfläche noch zu einer Erhöhung des Durchgangswiderstandes um mehr als 50% des Ursprungswertes kommt⁸.

Bei gleitenden Kontaktstücken ist die Verschleißfestigkeit deshalb von zentraler Bedeutung. Die Verschleißfestigkeit hängt von zahlreichen Parametern ab:

1. Dicke und Härte des Deckschicht
2. Art und Dicke der Zwischenschicht
3. Oberflächenverunreinigungen
4. Kontakt-Normalkraft
5. Anzahl der Steckzyklen
6. Kontaktpunkt-Geometrie
7. Geometrie der der Einlaufzonen (Kontaktstift-Spitze, Öffnungswinkel der Kontaktfeder)
8. Oberflächentopographie
9. Befettung
10. Bei Hartgoldschichten Zeitpunkt der Befettung

Die Komplexität der Wechselwirkung soll nachfolgend an Hand der DensiPac⁹-Steckverbinder-Familie verdeutlicht werden. In Abbildung 2.12 wird ein Schnitt durch solch einen Steckverbinder gezeigt. Die Kontaktmesser befinden sich in einer Position, bei der es gerade zu einem Öffnen der Kontaktfedern kommt. Der eigentliche Kontaktpunkt (Knickpunkt) ist noch nicht erreicht. Allgemein kann gesagt werden, dass je höher die Steckkraft eines Kontaktpaares ist, desto höher ist die tangentielle mechanische Beanspruchung der Kontaktoberfläche.

⁸ Siehe auch IEC 60512 (9a)

⁹ DensiPac: Hochpoliger Telekommunikation-Steckverbinder Tyco Electronics

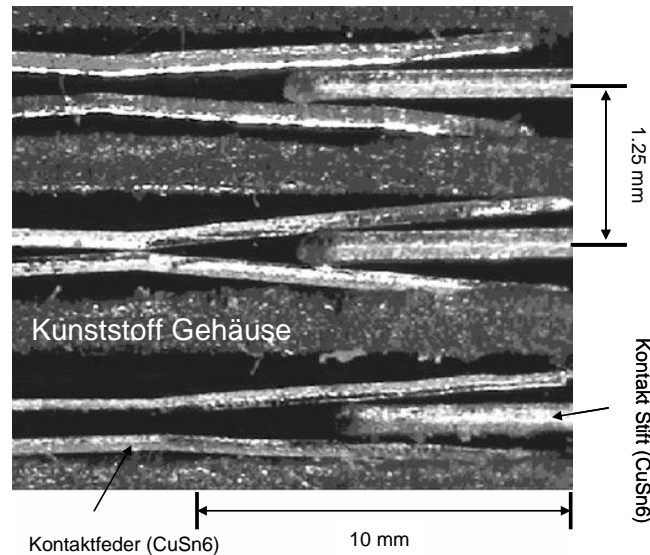


Abbildung 2.12: Schnitt durch den Kontaktbereich eines DensiPac-Steckverbinders.

Abbildung 2.13 zeigt den möglichen Einfluss einer Hartgoldbeschichtung auf das Steck- / Ziehkraft-Verhalten eines 72-poligen DensiPac-Steckverbinders. Die Überhöhung der Steckkraft in Abbildung 2.13 (links und rechts, Teil oberhalb der x-Achse) fällt mit der Position der Kontaktmesser in Abbildung 2.12 zusammen. In diesem Bereich muss neben der Reibkraft noch zusätzlich Energie in das System eingebracht werden, um die Kontaktfedern zu öffnen. Analog zu [129] kann die Steckkraft nach folgender Formel angenähert werden:

$$F_{Steck}(x) = p \cdot n \cdot \left(\mu(x) + \frac{dy}{dx} \right) \cdot F_N(x) \quad (2.13)$$

Für die Ziehkraft gilt:

$$F_{Zieh}(x) = p \cdot n \cdot \mu(x) \cdot F_N(x) \quad (2.14)$$

Hierbei bezeichnet p die Polzahl des Steckverbindersystems und n die Anzahl der Reibstellen (Kontaktpunkte). Die Stecktiefe wird mit x parametrisiert. Für die Federöffnung steht die Größe y . Es ist zu beachten, dass sowohl der Reibkoeffizient μ , als auch die Kontaktnormalkraft F_N ortsabhängige Größen darstellen, was im Besonderen auf die Kraft/Weg-Kennlinie des Steckvorganges einen großen Einfluss hat. Beim Ziehvorgang wird diese elastische Energie wieder freigesetzt, was zu einem Abfall der Ziehkraft unter den Bereich der Gleitreibung führen muss (Abbildung 2.13 rechts, unbeschichtete Kontaktpaare). Im Falle der mit Hartgold beschichteten Kontaktpartner kommt es jedoch in diesem Bereich zu einer Überhöhung der Ziehkraft. Dieser Anstieg der Ziehkraft kann nur auf das unterschiedliche Verhalten der Goldschicht gegenüber der Kupfer CuSn6-Legierung erklärt werden. Im Falle von Hartgold als Kontaktschicht kommt es zu einer zusätzlichen Kraft, die durch adhäsive Kräfte verursacht wird.

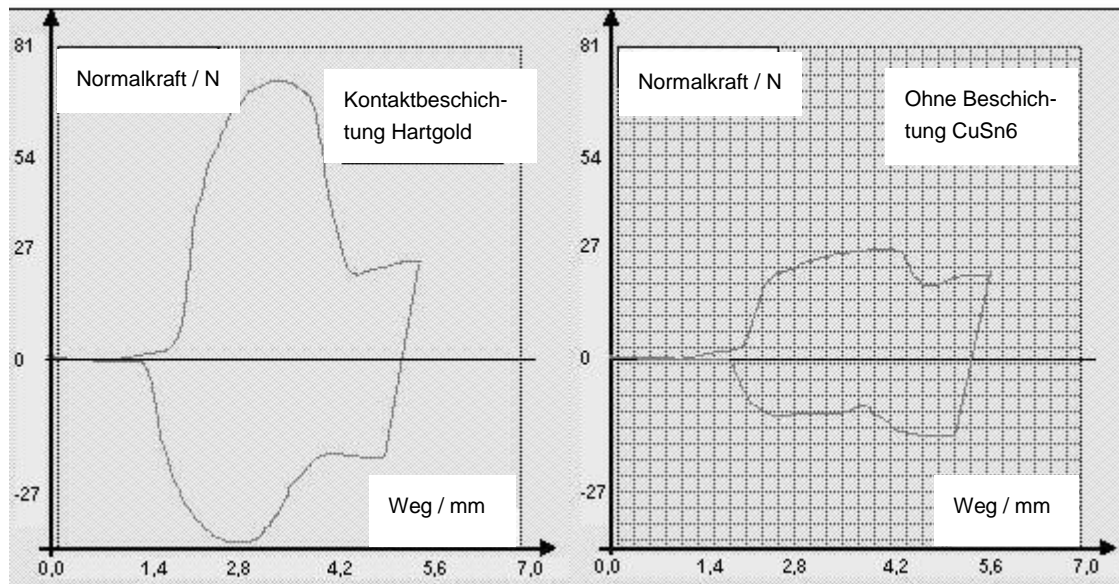


Abbildung 2.13: Steck-Ziehkraft-Verlauf eines 72-poligen Densipac-Steckverbinder-Kontaktes; links mit Au-Beschichtung; rechts ohne Beschichtung.

Nachdem die Kontaktfedern vollständig geöffnet sind, verbleibt nur noch der Einfluss der Gleitreibung, die gemäß Formel (2.15) gegeben ist.

$$F_{\text{Gleit}} = \mu \cdot F_N \quad (2.15)$$

Im Falle rauer Oberflächen ist die Reibkraft analog zu Tabor [141] von folgenden drei Parametern abhängig:

1. der wahren Kontaktfläche zwischen den sich berührenden Flächen
2. die Art und Stärke der Verbindung an den Berührungspunkten
3. der Art und Weise in welcher die Kontaktregionen während des Reibvorganges geschert und aufgerissen werden.

Allgemein anerkannt ist das Amonton'sche Gesetz (2.16), das besagt:

1. Die Reibkraft ist direkt proportional zur Normalkraft
2. Die Reibkraft ist unabhängig von der scheinbaren (nominellen) Kontaktfläche

Somit gilt:

$$\mu = \frac{F_{\text{Reib}}}{F_N} \quad (2.16)$$

Für elastisch beanspruchte Oberflächen ergibt sich laut Achard [1] jedoch folgender experimentell bestimmter Zusammenhang:

$$\mu \cong \text{Const} \cdot F_N^{-\frac{1}{3}} \quad (2.17)$$

Betrachtet man den Reibkoeffizienten als das Verhältnis zwischen Kontaktnormalkraft und realer Kontaktfläche, so ergibt sich aus der Hertzschen Kontakttheorie folgende Argumentationsfolge. Im Falle eines sphärischen Kontaktpunktes ergibt sich eine Kontaktfläche die proportional zu $F_N^{2/3}$ ist.

Wenn nun die Reibkraft proportional zur realen Fläche A ist, so folgt aus (2.16) $\mu \sim F_N^{-1/3}$. Bei hoher Flächenpressung und plastischer Deformation ist die Fläche eines a-Spots proportional zu F_N , was in einem konstanten Reibkoeffizienten resultiert. Diese Annahme gilt jedoch nur für individuelle Kontaktpunkte. Im Falle von rauen Oberflächen gibt es sowohl elastisch als plastisch deformierte Bereiche. Die plastisch belasteten Kontaktpunkte können tangentialen Kräften keinen Widerstand entgegenbringen. Hierdurch kommt es bei steigender Kontaktkraft zu einem Abfall des Reibkoeffizienten [20]. Im Bereich geringer Kontaktkräfte kommt ein weiteres Phänomen zum Tragen. Die aktuelle Kontaktbelastung der wahren Kontaktfläche setzt sich dann aus der Kontaktnormalkraft und einer nicht mehr zu vernachlässigbaren Adhäsionskraft, die auf Grund intermolekularer Kräfte oder Meniskuseffekten basiert.

Betrachtet man den statischen Reibkoeffizienten so kann dieser beim Vorhandensein von Adhäsionskräften gemäß [29] nach Formel (2.18) geschrieben werden. Die entsprechenden Kräfte sind in Abbildung 2.14 skizziert.

$$\mu_{\text{statisch}} = \frac{F_{\text{max}}}{F_N} = \frac{F_{\text{max}}}{F_{\text{Gleichgewicht}} - F_{\text{Adhäsion}}} \quad (2.18)$$

Bei geringen Relativgeschwindigkeiten können μ_{stat} und μ in etwa gleichgesetzt werden (siehe hierzu auch Abbildung 2.16).

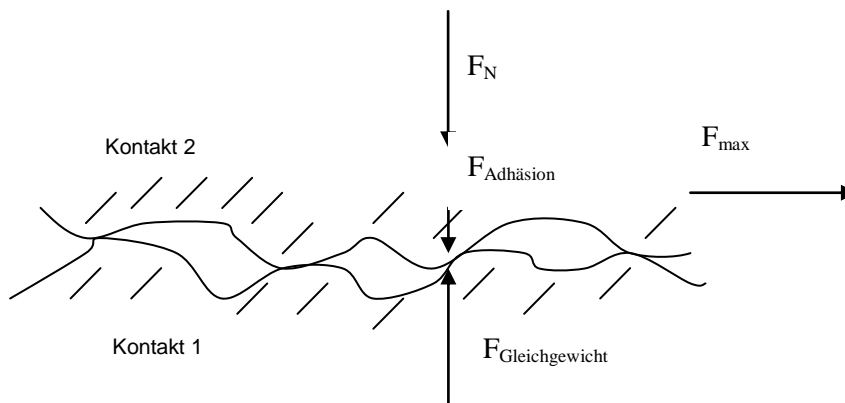


Abbildung 2.14: Kräftegleichgewicht zweier Kontaktkörper

Ein ähnlicher Ansatz wird von Nosonowsky [111] verwendet. Hier setzt sich der Reibkoeffizient aus mehreren Einzelkoeffizienten zusammen.

$$\mu = \mu_a + \mu_{ds} + \mu_{dp} + \mu_{Rast} = \frac{F_a + F_{ds} + F_{dp}}{F_N} + \mu_{Rast} = \frac{A_a \cdot \tau_a + A_{ds} \cdot \tau_{ds} + A_{dp} \cdot \tau_{dp}}{F_N} + \mu_{Rast} \quad (2.19)$$

Die einzelnen Koeffizienten bilden der Adhäsionskoeffizient μ_a , die Deformationskoeffizienten μ_{ds} für die a-Spots und μ_{dp} für Oberflächenpartikel. Der Term μ_{Rast} bezeichnet einen so genannten Verrastungskoeffizienten. Die entsprechenden Kräfte ergeben sich aus dem Produkt der jeweiligen Berührungsflächen mit den dazugehörigen Scherfestigkeiten. Laut Adams [2] kann es bei dünnen Schmierfilmen auf Grund von Meniskus-Effekten bei sinkender Normalkraft abhängig von der Oberflächenrauheit zu einem steigenden Reibkoeffizient kommen, da der "dünne" Flüssigkeitsfilm zu einer stark ansteigenden Adhäsionskraft führt. Numerische Ansätze zur Beschreibung von Meniskus-

Effekten werden in [17] und [18] diskutiert. Während der laufenden Fertigung der DensiPac Steckverbinderfamilie zeigten sich Schwankungen von mehr als 100% ($0.2 < \mu < 0.6$) des Reibkoeffizienten im Bereich der Kontaktöffnungszone. Selbst eine nachträgliche Befettung zeigte keine befriedigenden Ergebnisse. Messungen der Reibkoeffizienten am Kernforschungszentrum Karlsruhe erbrachte keine Korrelation zwischen Normalkraft, Befettung und Oberflächenrauheit σ . Abbildung 2.15 zeigt schematisch das Messverfahren.

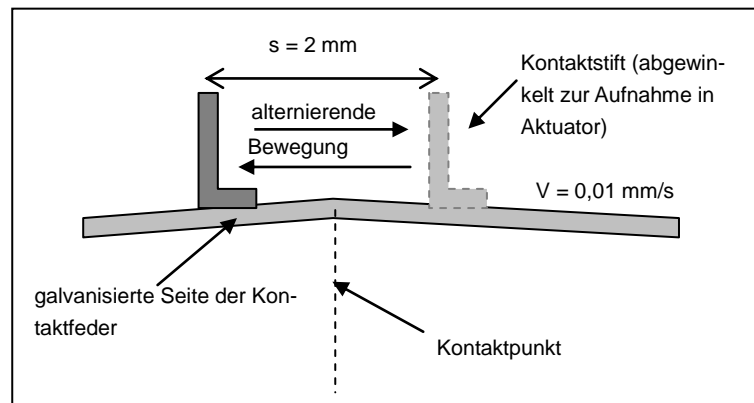


Abbildung 2.15: Schematische Darstellung der Messung des Gleitreibungskoeffizienten

Zur besseren Aufnahme sind die Kontaktmesser hinter dem eigentlichen Kontaktierungsbereich rechtwinklig abgebogen, ohne dass es zu einer Beeinflussung der Oberflächenbeschichtung im Gleitbereich kommt. Die so gefassten Kontaktstifte werden dann mit einer definierten Normalkraft (1 N) und Reibgeschwindigkeit mittels eines Piezo-Aktuators über die Kontaktfeder geführt. Die Reibgeschwindigkeit ist mit 0,01 mm/s gering gewählt, um Stick-Slip-Effekte detektieren zu können. Anhand dieser Messungen und begleitenden Fertigungsversuchen in der Galvanik¹⁰ ergibt sich letztendlich, dass eine Passivierung / Befettung der Au-Oberfläche direkt in der Galvanik einen gleich bleibenden minimalen Reibkoeffizienten sicherstellt (siehe hierzu Abbildung 2.16). Eine gezielte Bedeckung der Oberfläche (HF-Fett oder Stanzöl), noch bevor es zur Bildung dünnster Oberflächenfilme aus der Atmosphäre kommt, entscheidet letztendlich über das tribologische Verhalten der Au-Schichten. Dies zeigt jedoch auch, dass die adhäsiven Effekte und somit der Reibkoeffizient gerade bei Au-Kontaktschichten nicht allein über die Oberflächenrauheit oder eine Adhäsionsenergie [166][73] simuliert werden können. Bei der Simulation des mechanischen Verhaltens von Kontakten wird deshalb der Reibkoeffizient vorgegeben. Eine numerische Vorhersage des tribologischen Verhaltens wird nicht versucht. Wie Eingangs schon erwähnt, kommt es wegen der hohen punktuellen Flächenpressung bei den verwendeten Kontaktschichten zu einer notwendigen plastischen Deformation der Berührungspunkte (a-Spots).

Eine Befettung der Oberflächen muss, um den metallischen Kontakt der Kontaktpartner zu gewährleisten, immer durchdrungen werden. Eine Befettung kann somit auch nicht den Durchrieb der Kontaktbeschichtung auf Dauer verhindern.

¹⁰ Interne Untersuchung der Siemens AG Bereich EC B Speyer; 2002

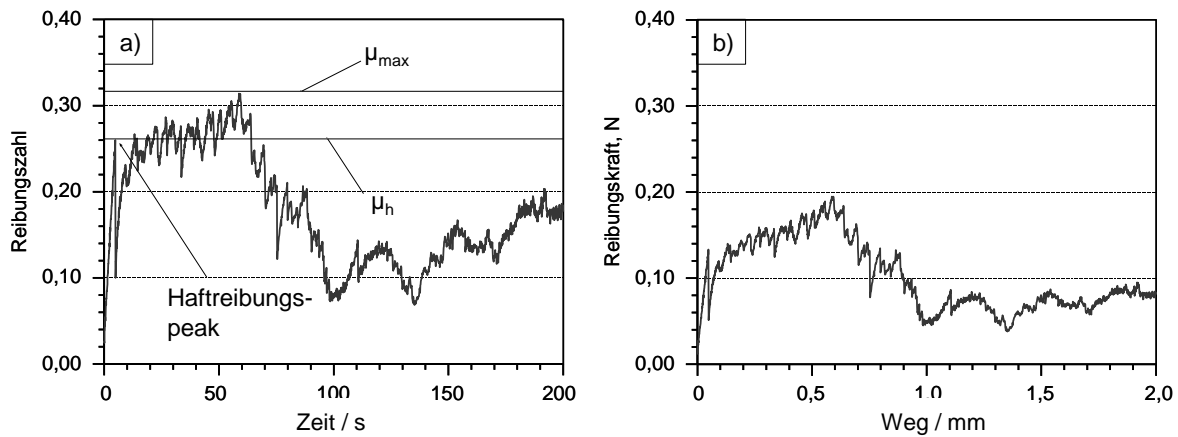


Abbildung 2.16: Gleitreibungskoeffizient eines DensiPac Kontaktfederpaares; a.: Nach Auslagerung be fettet; b.: Befettung direkt in der Galvanik

Neben der Beeinflussung des Gleitverhaltens dient eine Befettung im Falle nicht edler Kontaktwerkstoffe als Korrosionsschutz. Gerade bei Zinn kommt es zu einer sofortigen Oxidation der Oberfläche unter Atmosphäreneinfluss. Kommt es während des Betriebes eines Zinn-Kontaktes wegen thermischer oder mechanischer Einflüsse zu ständigen kleinen Relativbewegungen von einigen μm der Kontaktpartner zueinander, so wird ständig jungfräuliches Zinn mit der Atmosphäre in Kontakt gebracht. Dieses jungfräuliche Zinn bildet sofort eine hochohmige harte Oxidschicht, die beim nächsten Kontaktieren wieder durchbrochen werden muss. Bei oftmaliger Wiederholung dieses Vorganges kommt es zu einer so starken Anreicherung der Zinnoxide, dass es zu einem regelrechten Aufschwimmen der Kontaktpartner auf den Zinnoxiden kommt. Dies führt letztendlich zu einem Versagen des Kontaktes. Dieser Effekt wird auch als Reibkorrosion bezeichnet. Eine angepasste Befettung hat die Aufgabe, die Zinnoberfläche so zu bedecken, dass Sauerstoff aus der Atmosphäre nicht mit den jungfräulichen Zinnbereichen in Kontakt treten kann. Abbildung 2.17 zeigt den Einfluss einer optimierten Befettung auf das Verschleiß- bzw. Oxidationsverhalten eines Zinn-Kontaktes.

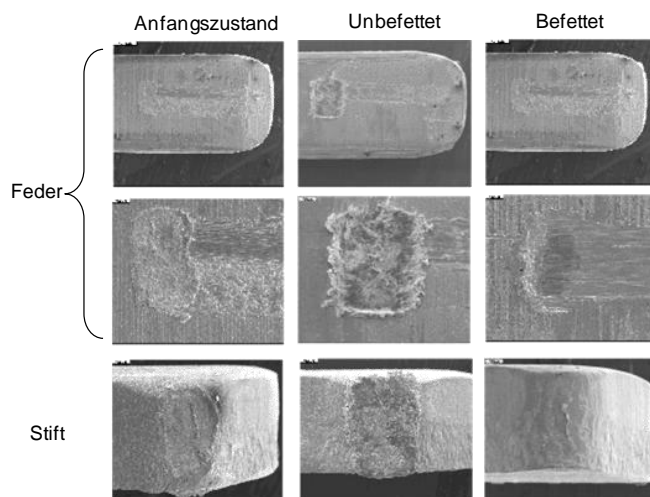


Abbildung 2.17: Einfluss der Befettung auf das Verschleiß-Oxidationsverhalten von Zinn-Kontaktschichten (Bildquelle Tyco Electronics)

Hierbei wurden 10000 alternierende Relativbewegungen mit einer Amplitude von 0,04 mm durchgeführt. Man erkennt, dass es zu einer deutlichen Verringerung des Kontaktpunktverschleißes kommt.

An dieser Stelle sei kurz auf den Einfluss von Schmiermittel auf das Gleitverhalten von rauen Oberflächen eingegangen. Zwar beschäftigt sich diese Arbeit mit ruhenden Kontakten, gerade jedoch bei Zinnoberflächen ist eine Abschätzung des Materialabriebs, der bereits beim ersten Steckvorgang einen Großteil der Schichtdicke betragen kann, von großer Bedeutung. Hierzu muss die Druckverteilung der relativ zueinander bewegten Kontaktstücke bekannt sein, wobei eventuell aufgebrauchte Schmiermittel einen großen Einfluss haben. Der Einfluss von Schmiermitteln wird in der Literatur als das „EHL“-Problem bezeichnet. EHL steht für "Elastohydrodynamic Lubrication". Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Software (Anhang 16) ist so aufgebaut, dass das EHL-Problem als Zusatzmodul eingebaut werden kann. Hierbei wird das Verhalten einer Flüssigkeitsschicht im Spalt zweier sich kontaktierender (rauer) Flächen mit Hilfe der Reynolds-Gleichung [64][168][146] beschrieben.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_F h^3}{12\eta(p)} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho_F h^3}{12\eta(p)} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{\partial(v_m \rho_F h)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho_F h)}{\partial t} = 0 \quad (2.20)$$

Hierbei gibt ρ_F die Dichte und η die Viskosität des Schmiermittels an. Der Term v_m bezeichnet die mittlere Geschwindigkeit der viskosen Flüssigkeit relativ zu den Kontaktkörpern. Die Fließrichtung läuft parallel zur x-Achse. Der Ausdruck $h = h_1 + h_2$ gibt die Größe des Spaltes in z-Richtung zweier in Kontakt stehender Körper an (siehe Abbildung 2.18).

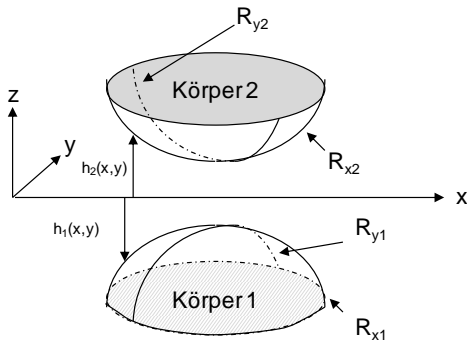


Abbildung 2.18: Koordinatensystem der Reynolds-Gleichung

Unter der Annahme einer konstanten Dichte und Fließgeschwindigkeit vereinfacht sich Glg. (2.20) zu:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\eta(p)} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\eta(p)} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - v_m \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (2.21)$$

Die ersten beiden Terme in Glg. (2.21) beschreiben den Fluss auf Grund des Druck-Gradienten und werden die Poisseuille-Terme genannt. Der dritte Term beschreibt den Materialfluss auf Grund der mittleren Geschwindigkeit v_m und wird als Couette-Term bezeichnet. Der letzte Term beschreibt den Materialfluss durch Einengungs- oder Quetscheffekte. Im Falle der stationären Lösung reduziert sich Glg. (2.21) weiter zu:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\eta(p)} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\eta(p)} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - v_m \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.22)$$

Bei der Reynolds-Gleichung ist zu beachten, dass Bereiche in denen ein negativer Druck-Gradient gegeben ist, es zu negativen Drücken kommen kann (Venner [146], Kapitel 4). Negative Drücke sind jedoch physikalisch nicht gegeben. In diesen Bereichen kommt es zu einem Aufkochen der Flüssigkeit und der Druck reduziert sich zum Dampfdruck der Flüssigkeit. Dieser Vorgang wird Kavitation genannt. Da der Dampfdruck eine vernachlässigbare Größe darstellt, wird $p(x,y)$ in diesen Bereichen Null gesetzt. Die Druckabhängigkeit der Viskosität gehorcht einem exponentiellen Gesetz und wird gemäß folgender Gleichung beschrieben.

$$\eta(p) = e^{(const \cdot p)} \quad (2.23)$$

Ein ausführlich beschriebener Lösungsalgorithmus wird in [146] gegeben und kann bei Bedarf als weiteres Modul in die Software implementiert werden.

In Tabelle 2.4 ist die typische Steckzyklenanzahl der gängigsten Kontaktwerkstoffe aufgelistet.

Tabelle 2.4: Steckzyklenvergleich der meist verwendeten Kontaktwerkstoffe¹¹

	Gold >1 µm	Gold 0,8 µm	Silber	Zinn
Vickers Härte	130 - 200	130 - 200	70 - 100	10 - 30
Steckzyklen	> 200	20 - 200	1 - 50	1 - 20

Die maximale Anzahl von Steckzyklen wird neben der Kontaktnormalkraft maßgeblich von der Härte und der Dicke der Oberflächenschicht bestimmt. Input-Output-Kontakte, die eine hohe Anzahl (>200) Steckzyklen gewährleisten müssen, werden in der Regel vergoldet. Silber besitzt zwar eine deutlich höhere Härte als Zinn, neigt jedoch zum Kaltverschweißen. Eine Steckzyklenzahl von etwa 50 kann nur durch optimierte Designs (Mehrfachkontaktierung) und Oberflächenbehandlungen erzielt werden. Zinn zeigt wie zu erwarten die geringste Steckzyklentoleranz und wird im Allgemeinen innerhalb von Geräten eingesetzt.

¹¹ Quelle Tyco Electronics

3 Kontaktmaterialien

Die in den Steckverbinder-Kontakten verwendeten Materialien werden hinsichtlich Leitfähigkeit, Federeigenschaften, Verarbeitbarkeit und Kosten ausgewählt. Ein weiterer Aspekt ist die Langzeitstabilität der entsprechenden physikalischen Eigenschaften nach der Herstellung. So dürfen die Kontaktschichten während der Kontaktlebensdauer von teilweise mehreren Jahrzehnten nicht auf Grund von Rekristallisations- oder Diffusionseffekten hochohmig werden. Weiterhin muss das Grundmaterial seine Federeigenschaften behalten, damit die benötigte Kontaktnormalkraft im spezifizierten Bereich verbleibt. Nachfolgend sollen die wichtigsten Merkmale der verwendeten Materialien näher betrachtet werden.

3.1 Kupfer-Legierungen als Basiswerkstoffe

In der Steckverbinderindustrie bestehen nahezu alle Basiswerkstoffe aus Kupferlegierungen. Man kann einen Steckverbinderkontakt als ein leitfähiges Teil definieren, an dessen einem Ende der lösbare Kontaktpunkt und am anderen Ende eine feste Verbindung zu einem Stromkreis realisiert ist. Die feste nicht lösbare Verbindung wird im Falle von Drahtanschlüssen im Allgemeinen durch Crimp-, Schneid/Klemm- oder Einstich (Pircing) – oder Löt-Verbindungen hergestellt. Abbildung 3.1 zeigt von links nach rechts ein Schliffbild durch eine Crimp- Schneid/Klemm- und Durchdring- Verbindung. Während die Lötverbindung keine Anforderungen an die mechanische Stabilität des Grundmaterials stellt, müssen bei den anderen Verfahren mehrere Faktoren beachtet werden.

Beim Crimpen werden abisolierte Drähte, die sowohl Einzel- als auch Litzendrähte sein können, in ein Federgehäuse eingelegt, welches anschließend in einem Crimpwerkzeug verpresst wird. Bei den Crimpkontakten muss gewährleistet sein, dass eine gute Umformbarkeit des Crimpzylinders (Federgehäuse) gegeben ist. Weiterhin muss der verpresste Draht plastisch verformt werden und unter den einzelnen Litzen und dem Crimpzylinder eine gasdichte metallische Verbindung eingehen. Die erforderlichen Kräfte sind im Vergleich zur Kontaktnormalkraft um ein Vielfaches höher.

Bei den Schneid/Klemm-Verbindungen wird der entsprechende Draht (Einzel oder Litze) in einen Schneidspalt gedrückt. Hierbei wird die Isolation durchgeschnitten und die Seele des Leiters innerhalb des Schneidspaltes so eingepresst, dass wiederum eine gasdichte, metallische Verbindung entsteht.

Bei den Durchdring-Verbindungen muss das kontaktierende Element eine ausreichende Stabilität besitzen, um nicht nur die Isolation zu durchstoßen, sondern auch in die Kupferlitze einzudringen. Hierbei müssen die einzelnen Litzen so verpresst werden, dass keine isolierenden Schichten zwischen den Einzelleitern verbleiben können.

Weitere permanente Verbindungen stellen so genannte Press-In-Verbindungen dar. Diese Technologie findet bei der Kontaktierung zu einer Leiterplatte Anwendung. In Abbildung 3.2 sind die Schliffbilder dreier bei Tyco Electronics gefertigter Press-In-Varianten zu sehen. Allen Varianten ist gemeinsam, dass der Übergang zwischen Kontaktstift und Durchkontaktierung der Leiterplatte über die gesamte Produktlebensdauer so stark verpresst ist, dass eine gasdichte Verbindung gewährleistet bleibt. Dies bedeutet, dass das gewählte Grundmaterial sowohl hinsichtlich Umformbarkeit als auch Federeigenschaften und Relaxationsverhalten für den jeweiligen Anwendungsfall ausgewählt wird. Gerade hin-

sichtlich des Relaxationsverhaltens bei erhöhten Umgebungstemperaturen zeigen sich große Unterschiede zwischen den einzelnen Kupferlegierungen (siehe Tabelle 3.1). Die früher wegen der guten mechanischen und elektrischen Eigenschaften verwendeten Kupfer-Beryllium-Legierungen werden wegen der gesundheitlichen Risiken bei der Herstellung nur noch in Anwendungen mit hoher Umgebungstemperatur ($>150^{\circ}\text{C}$) verwendet.



Abbildung 3.1: Von links nach rechts: Durchschnitt durch eine Crimp-, Schneid/Klemm- und Durchdring-Verbindung

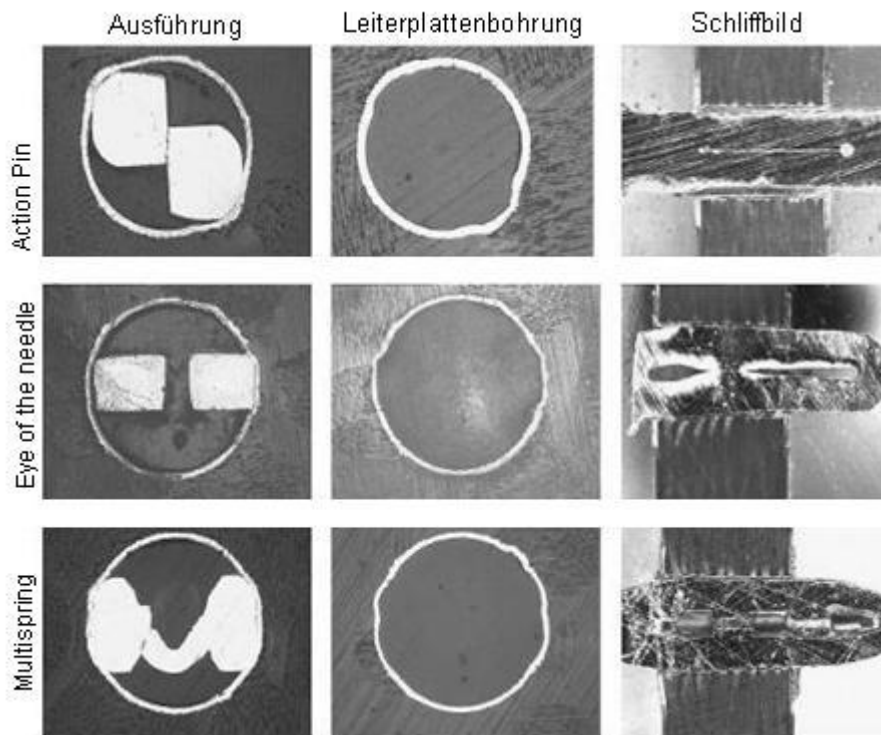


Abbildung 3.2: Schliff durch drei unterschiedliche Press-In-Verbindungen. Von oben nach unten Action Pin, Eye of the Needle, Multispring (Quelle Tyco Electronics); Leiterplattenbohrung (1 mm) nach dem Auspressen der Kontaktstifte.

Tabelle 3.1: Verbleibende mechanische Restspannung eines belasteten Biegebalkens in % nach 1000 h Temperaturlagerung. Anfangsspannung 500 MPa (Herstellerangaben).

Umgebungstemperatur / °C	Federspannung in %			
	Cu	CuZn30	CuSn6	CuBeCo
100	50	75	90	95
150	15	40	80	92
250	10	10	20	90

Die bei den permanenten Verbindungen gemachten Aussagen lassen sich auch auf lösbare Kontakte übertragen. Abgesehen von den Löt- und Schweißverbindungen sind bei den oben angesprochenen permanenten Verbindungen die Flächenpressungen so hoch, dass es zu einer gasdichten intermetallischen Verbindung kommt, die während der Produkt-Lebensdauer keinerlei Relativbewegung mehr erfährt.

Bei den lösbaren Kontaktpunkten ist ebenfalls eine gasdichte intermetallische Verbindung erforderlich. Das heißt, es muss zu einer plastischen Deformation der Berührungspunkte kommen. Weiterhin sind jedoch beim Steck-Ziehvorgang die erforderlichen Kräfte in einem akzeptablen Bereich zu halten. Zum einen dürfen die Steck- und Ziehkräfte bei hochpoligen Steckverbindern nicht zur Zerstörung der Kontaktgehäuse führen, zum anderen darf der abrasive Verschleiß bei der Relativbewegung der Kontaktpartner nicht zu einem Durchrieb der Kontaktschicht führen. Weiterhin ist zu beachten, dass bei der ständig fortschreitenden Miniaturisierung der Steckverbinder immer weniger Bauraum zur Verfügung steht. Teilweise werden Kontaktfedern aus 0.2 mm dicken Rohbändern gefertigt. Diese Bänder müssen neben einem hohen E-Modul eine hohe Zugfestigkeit bei guter elektrischer Leitfähigkeit besitzen. Die nachfolgende Formel beschreibt die Abhängigkeit der Federkraft (und somit Kontaktnormalkraft) von E-Modul, Federdicke d , Federlänge l und Federauslenkung z .

$$F_{\text{Feder}}(z) = \text{Const} \cdot z = \frac{3 \cdot E \cdot l}{d^3} z \quad (3.1)$$

Abbildung 3.3 a. und b. zeigt die Kraft-Weg-Kennlinie zweier unterschiedlicher Kontaktfedern.

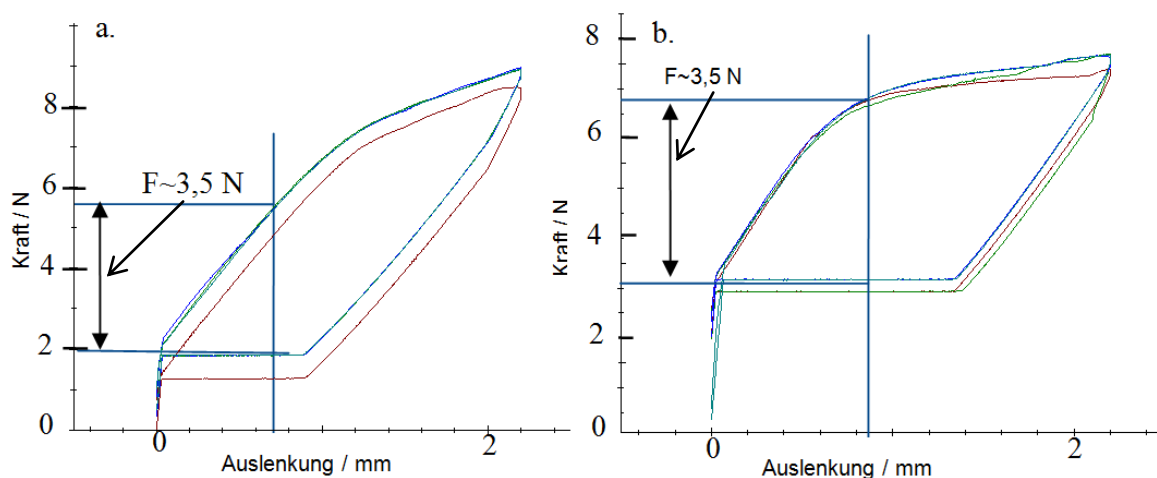


Abbildung 3.3: Arbeitspunkte einer Kontaktfeder. a.: Kontaktfeder mit hoher Zugfestigkeit; b.: Mit schlecht dimensioniertem Arbeitspunkt bzw. geringer Zugfestigkeit (Quelle Tyco Electronics).

Beide Kontaktfedern erzeugen bei gleicher Auslenkung die gleiche Rückstellkraft von $\sim 3,5 \text{ N}$. Während in Beispiel a. der Arbeitspunkt bei etwa 60% der maximalen Federspannung liegt, ist der im Beispiel b. gezeigte Arbeitspunkt bereits nahe der maximalen Zugspannung. In diesem Fall ist mit einer starken Relaxation der Federkraft zu rechnen. Betrachtet man die in Tabelle 3.2 aufgeführten Legierungen, so wird deutlich, dass mit steigender Festigkeit des Materials es zu einem Anstieg des spezifischen Widerstandes kommt.

Messinglegierungen entstehen durch die Zulegierung von Zink zum Kupfer. Messinglegierungen haben eine gute Leitfähigkeit und eine höhere Festigkeit als Kupfer. Die Zugfestigkeit ist im Vergleich

zu anderen Kupferlegierungen jedoch noch gering. Auch zeigen diese Legierungen eine höhere Tendenz zur Relaxation. Messinglegierungen werden deshalb bei Anwendungen eingesetzt, die keine hohen Ansprüche an die Federeigenschaften stellen und keine erhöhten Temperaturen erwarten lassen.

Gängige Bronzelegierungen sind Legierungen aus Kupfer und 4% – 8% Zinn. Alle Legierungen dieser Familie enthalten etwa 0,16% Phosphor als Beimengungen. Phosphor dient als Deoxidationsmittel in der Schmelze. Bronzelegierungen haben zwar einen höheren spezifischen Widerstand als Messinglegierungen, zeigen jedoch eine deutlich höhere Zugfestigkeit und besseres Relaxationsverhalten. Phosphorlegierungen können durch Kaltumformprozesse (Kaltwalzen) gehärtet werden. Bei sämtlichen Biegeprozessen muss daher darauf geachtet werden, ob Biegungen parallel oder senkrecht zur Walzrichtung durchgeführt werden. Biegungen senkrecht zur Walzrichtung können mit engeren Biegeradien ausgeführt werden als Biegungen parallel zur Walzrichtung.

Die silberfarbenen Kupfer-Nickel-Legierungen besitzen moderate Zugfestigkeiten und besitzen ein höheres E-Modul als die bisher besprochenen Legierungen. Kupfer-Nickel-Legierungen sind gut löt-, form- und bearbeitbar.

Tabelle 3.2: Materialparameter einiger gängiger Kupferlegierungen

Legierung	Spez. Widerstand / $\Omega\text{mm}^2\text{m}^{-1}$	Wärmeleitfähigkeit / $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$	E-Modul / GPa	Zugfestigkeit / MPa
Cu	0,0172	390	118	250
Bronzelegierungen (Phosphor-Bronze)				
CuSn4	0,098	100	120	570
CuSn5	0,118	96	120	550
CuSn6	0,1228	75	118	560
CuSn8	0,1618	67	115	630
Messinglegierungen				
CuZn0,5	0,0225	350	127	280
CuZn5	0,0312	243	127	300
CuZn10	0,0418	184	124	300
CuZn15	0,0593	159	122	350
Kupfer-Nickel-Legierungen				
CuNi12Sn24	0,356	45	125	550
CuNi18Zn27	0,356	32	135	650
CuNi18Zn20	0,5933	33	135	580
Niedrig legiertes Kupfer				
CuNiSi	0,029	260	135	400
CuFe2P	0,029	280	123	400

Niedrig legiertes Kupfer zeigt den niedrigsten spezifischen Widerstand und besitzt eine mit Messing vergleichbare Zugfestigkeit. Diese Legierungen sind daher zur Herstellung von Kontaktfedern mit geringen geforderten Normalkräften geeignet.

Kupfer-Beryllium-Legierungen besitzen die besten Federeigenschaften bei gleichzeitig geringstem spezifischen Widerstand. Das Einatmen von Kupfer-Beryllium-Staub birgt jedoch große gesundheitliche Risiken. Da während der Verarbeitung in den Stanz-Biegwerkzeugen staubförmiges Material entstehen kann, werden diese Legierungen nur noch eingesetzt, wenn keine Ersatzmaterialien zur Verfügung stehen (z.B. direkte Kontaktierung von Heizwendeln).

3.2 Beschichtungsmaterialien

Die Funktion, die ein Beschichtungssystem zu erfüllen hat, sind vielfältig. Oberflächenbeschichtungen müssen eine gute Leitfähigkeit besitzen. Sie müssen bei möglichst geringer Flächenpressung möglichst viele metallische Kontakte (a-Spots) bilden und gleichzeitig abriebfest sein. Die Beschichtungen dürfen nicht korrodieren oder Deckschichten ausbilden, die im Falle fehlender elektrischer Energie (dry contact) von den rein mechanischen Kräften nicht durchdrungen werden können. Eine weitere Anforderung an eine Oberflächenbeschichtung kann die Lötbarkeit darstellen. In Tabelle 3.3 sind die Materialparameter einiger gängiger Beschichtungsmaterialien aufgeführt. Man unterscheidet hauptsächlich zwischen edlen und unedlen Kontaktwerkstoffen. Zu den edlen Kontaktwerkstoffen gehören Gold, Silber, Rhodium, Ruthenium, Palladium und Platin. Zu den unedlen Kontaktwerkstoffen gehören Zinn, Zinn-Blei und Nickel. Zinn-Blei wird wegen der RoHS¹² Bestimmungen zurzeit fast vollständig durch niedrig legierte bleifreie Zinnlegierungen ersetzt und wird hier nicht weiter betrachtet.

Tabelle 3.3: Materialparameter einiger gängiger Kontakt-Beschichtungsmaterialien¹³

Legierung	Spez. Widerstand / $\Omega\text{mm}^2\text{m}^{-1}$	Wärmeleitfähigkeit / $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$	Schmelzpunkt / K	E-Modul polykristallin / GPa	Zugsfestigkeit Zustand hart / MPa
Edle Kontaktwerkstoffe					
Au	0,022	318	1064	78	220
Pd	0,108	71,8	1554	121	325
Pt	0,1058	71,6	1772	170	200 – 300
Rh	0,047	150	1965	379	1380 – 2070
Ag	0,0163	429	961	82,7	330
Unedle Kontaktwerkstoffe					
Sn	0,126	66,8	232	49,9	14 ¹⁴
SnPb	0,148	50,2	K. A.	K. A.	K. A.
Ni	0,069	90,9	1453	199	660

3.2.1 Edle Kontaktwerkstoffe

Zu den edlen Kontaktmaterialien zählen Gold, Silber, Palladium, Platin und Rodium. Bedingung für eine funktionierende Beschichtung mit einer edlen Kontaktoberfläche ist deren Porenfreiheit. Im Falle von Poren und einer feuchten Umgebung kommt es zu lokalen galvanischen Elementen zwischen dem unedleren Grundmaterial und der edlen Oberflächenschicht. Auf Grund der lokalen Elemente kommt es zu einer Auflösung des weniger edlen Materials, welches sich als hochohmige Schicht nieder-

¹² RoHS “Restriction of the use of certain Hazardous Substances in electrical and electronic equipment”; EG-Richtlinie 2002/95/EG

¹³ Quelle: www.goodfellow.com

¹⁴ Quelle Wikipedia

schlägt. Die Anzahl an Poren hängt sehr stark von der Rauheit des Grundmaterials, dem Galvanikprozess und der Schichtdicke ab.

Gold als Edelmetall reagiert nicht mit der Atmosphäre in Form von Oxidschichten oder Farbbänderungen. Kein anderes Kontaktmaterial zeigt eine reinere Oberfläche. Gerade bei Dry Circuits (max. 20 mV 100 mA) stellen metallische Oxidschichten eine hochohmige Schicht dar, die mechanisch durch eine Reibbewegung bzw. die Kontaktnormalkraft zerstört werden muss. Auf Grund der praktisch nicht vorhandenen Oxidschicht benötigen goldbeschichtete Kontakte die geringsten Normalkräfte. Je nach Kontaktgeometrie genügen bereits zwischen 0,3 N und 0,5 N, um einen akzeptablen elektrischen Kontakt zu erzeugen [144]. In der Praxis werden jedoch Doppelkontaktvarianten mit einer Kontaktnormalkraft von 1 N eingesetzt. Der hohe Goldpreis zwingt die Steckverbinderhersteller zu besonderen Anstrengungen, den Goldverbrauch zu minimieren. Hierzu gehört zum einen eine selektive Beschichtung nur in der Kontaktzone und zum anderen eine Optimierung der Schichtdicke. Je nach Anforderungen an die Porenfreiheit und Stechkäufigkeit werden Schichtdicken typischerweise zwischen 0,2 µm und 1 µm verwendet. Bezüglich Stechkäufigkeit kann folgende Regel angewendet werden.

1. Für 200 und mehr Steckzyklen bei Input/Output-Steckverbindern werden Schichtdicken > 1 µm benötigt.
2. Für geforderte Steckzyklen zwischen 20 und 200 reichen 0,8 µm aus.

Eine Hauchgold Beschichtung mit ~0,2 µm wird bei Palladium oder Palladium/Nickel-Kontakten verwendet. Hier spielt die Porosität der dünnen Goldschicht eine geringe Rolle. Gold hat hier die Funktion, eine fremdschichtfreie Oberfläche zur Verfügung zu stellen und die tribologischen Eigenschaften zu verbessern.

Platin hat ebenfalls eine exzellente Korrosionsbeständigkeit. Seine Beständigkeit gegenüber Materialabrieb macht Platinkontakte im Anwendungsbereich niedriger Spannungen und Ströme zur guten Wahl. Die niedrige Leitfähigkeit macht Platinkontakte ungeeignet für Hochstromanwendungen. Auch der zurzeit doppelt so hohe Preis gegenüber Gold führt dazu, dass Platin ein wenig beachtetes Kontaktmaterial ist. Bei Vorhandensein organischer Dämpfe kann Platin eine katalytische Reaktion hervorrufen. Die so gebildeten Deckschichten können, falls keine Reibbewegung oder keine ausreichend hohen Normalkräfte vorhanden sind, zu einem Ausfall des Kontaktes führen.

Palladium zeigt ausgenommen bei hohen Temperaturen ebenfalls keine Oxidation. Auf Grund des hohen Schmelzpunktes zeigt Palladium eine erhöhte Resistenz gegenüber Lichtbogenerosion. Um spannungsfreie galvanische Schichten zu erzeugen, wird Nickel oder Silber als Zulegierung verwendet. Neben elektrochemischer Abscheidung eignen sich Palladium und Silber-Palladium auch zur Walzplattierung. Ähnlich wie Platin zeigt Palladium im Vorhandensein organischer Dämpfe, die z.B. aus dem umgebenden Kunststoffgehäuse stammen können, katalytische Reaktionen. Eine Zulegierung von Silber verringert die Reaktionsfreudigkeit. Silber-Palladium mit Hauchgold verbessert die tribologischen Eigenschaften der Oberfläche.

Silber hat den geringsten spezifischen Widerstand aller hier aufgeführten Kontaktoberflächen und wird bei Anwendungen mit mittleren oder hohen Strombelastungen eingesetzt (<1A/12V). Da Silber zur Bildung einer Sulfidschicht neigt, eignen sich solche Kontakte weniger in Anwendungen mit niedrigen Spannungen bzw. Strömen. Des Weiteren neigt Silber zur Elektromigration. Silber hat einen relativen geringen Schmelzpunkte von 961°C. Durch die Neigung zum Kaltverschweißen sind die

erzielbaren Steckzyklen mit Silberkontakten auf < 50 (Mehrfachkontaktierung mit minimierten Kontaktnormalkräften) begrenzt.

3.2.2 Unedle Kontaktwerkstoffe

Zu den unedlen Kontaktwerkstoffen zählen Zinn, Zinn-Blei und Nickel. Im Gegensatz zu den edlen Kontaktwerkstoffen besteht hier nicht die Gefahr einer Porenkorrosion. Unedle Kontaktmaterialien besitzen immer eine oxidierte Oberfläche, die höhere Kontaktnormalkräfte erfordert, um die nicht leitende Oxidschicht zu durchdringen. Die verwendeten Zinnschichtdicken sind mit $2\text{ }\mu\text{m} - 5\text{ }\mu\text{m}$ deutlich dicker als die der edlen Kontaktmaterialien ($0,2\text{ }\mu\text{m} - 2\text{ }\mu\text{m}$).

Das am meisten verwendete und kostengünstigste unedle Kontaktmaterial ist Zinn. Zinn ist sehr gut lötbar, tendiert aber bei hohen Kontaktkräften zum Kaltverschweißen. Das relativ weiche Zinn ist zudem nicht sehr abriebfest. Die früher am häufigsten verwendeten Zinn/Blei-Legierungen (SnPb) finden, wie bereits gesagt, wegen der RoHS-Reglementierung immer weniger Beachtung. Neben der niedrigen Steckzyklenzahl kommt es bei Zinn-Oberflächen zur so genannten Reibkorrosion. Reibkorrosion tritt auf, wenn es während der Anwendung zu wiederholter kleiner Relativbewegung zwischen den Kontaktpartnern kommt. Hierdurch wird ständig metallisches Zinn mit der Atmosphäre in Kontakt gebracht. Blankes Zinn bildet jedoch sofort eine nicht leitende Oxidschicht, die beim erneuten mechanischen Kontakt wieder durchdrungen und beiseite geschoben werden muss. Der ständige neue Nachschub an Zinnoxid führt jedoch mit der Zeit zu einer Anhäufung der Oxide im Kontaktbereich. Diese Anhäufung kann von den Kontaktkräften nicht mehr durchdrungen werden, was letztendlich zu einem Ausfall des Kontaktes führt. Die Relativbewegungen können durch Vibrationen oder thermische Einflüsse hervorgerufen werden. Zinnkontakte sollten deshalb so konstruiert sein, dass die Kontaktkörper so gelagert sind, dass es zu keiner Kraftübertragung durch äußere Komponenten wie Kabel oder Gehäuse kommt. Zinnoberflächen tendieren bei Vorhandensein von inneren oder äußeren mechanischen Spannung zu Wiskerbildung. Zinn-Whisker sind monokristalline, mikroskopisch dünne, haarartige Strukturen, die mehrere Millimeter Länge erreichen und Kurzschlüsse erzeugen können. Zwischenbeschichtungen werden in erster Linie verwendet, um die Diffusion des Grundmaterials in die Funktionsschicht zu unterbinden. Gold darf nicht direkt auf Messing oder Zink enthaltende Materialien aufgebracht werden. In die Goldschicht eindiffundiertes Zink führt zu einer Oxidation und zu einer Verschlechterung des Kontaktverhaltens. Kupfer oder Nickel als Zwischenbeschichtung dienen hier als Diffusionssperre. Unter hoher Temperatur besteht jedoch weiterhin die Gefahr einer Zinkdiffusion.

Nickel wird häufig eingesetzt, um neben der diffusionshemmenden Wirkung die Effekte auf Grund von Porenbildung der edlen Deckschicht zu reduzieren. Wegen seiner Härte fungiert Nickel als spannungsabbauende Schicht und erhöht die Beständigkeit der Deckschicht.

3.2.3 Paarungsmöglichkeit unterschiedlicher Kontaktwerkstoffe

Im Allgemeinen sollten unterschiedliche Kontaktbeschichtungen nicht miteinander gekreuzt werden. Ausnahmen bilden die Kombination silberbeschichteter Kontakte mit verzinnnten Kontakten. Tabelle 3.4 zeigt die Kreuzbarkeit herkömmlicher Kontaktoberflächen.

Tabelle 3.4: Kreuzbarkeit von Kontaktoberflächen (Quelle Tyco Electronics)

	Au/Ni/ Basis	Au/PdNi/Ni/ Basis	Au/NiP/Ni/ Basis	Ag/Ni/ Basis	Ag/ Basis	Gal_Sn/ Ni/Basis	Feuer-Sn/ Basis	Ni/ Basis
Au/Ni/ Basis	++	+	0	(2)	(2)	Ausfall	Ausfall	-
Au/PdNi/Ni/ Basis		++	0	(2)	(2)	Ausfall	Ausfall	-
Au/NiP/Ni/ Basis			++	(2)	(2)	Ausfall	Ausfall	-
Ag/Ni/ Basis				++	++	+	+	-
Ag/ Basis					++	0	0	-
Gal_Sn/ Ni/Basis						++	+	-
Feuer-Sn/ Basis							++	-
Ni/ Basis								(1)

(1) Nur für höhere Spannungen und Schirmbleche;

(2) Korrosionsgefahr mit Ag-Ausblühungen

4 Herstellungsprozesse von Steckverbinderkontakten

Die Oberflächenrauheit hat einen Einfluss auf das Steck- und Ziehverhalten, den Kontakt-Übergangswiderstand sowie auf die Neigung der Oberfläche zur Porosität nach dem Galvanikprozess. Die Rauheit entsteht durch sich addierende Einflüsse aus dem gesamten Herstellungsprozess, angefangen vom Walzen der Kupferrohnbänder, den Stanz- und Biegeoperationen, bis hin zur Dicke und Art der unterschiedlichen Veredelungsschichten. Die Rauheit erhöht sich im allg. während des Stanzbiegeprozesses. Chemische Vorbehandlungen des Bandmaterials vor dem Beschichtungsprozess sollen deshalb eine möglichst glatte und saubere Oberfläche sicherstellen. Das Aufbringen von einebnenden Zwischenschichten ist weniger effektiv, da diese Schichten eine Stärke von mehreren μm besitzen müssten. Weiterhin wären hierdurch schwer vorhersehbare Effekte hinsichtlich Widerstand und Biegebarkeit zu erwarten.

4.1 Herstellung Rohbänder

Im Folgenden werden Verfahren beschrieben, wie sie bei der Firma Wieland Werke AG zum Einsatz kommen. Die Fertigung der Rohbänder beginnt mit dem Einschmelzen der Legierungsbestandteile. Neben reinem Kupfer, Zinn oder Zink werden hierbei auch Recycling-Werkstoffe beigemischt. Zum Schmelzen werden Induktionsöfen verwendet. Das eigentliche Gießen erfolgt, indem die Schmelze durch ein Ventil in eine wassergekühlte unten offene Form (Kokille) gegossen wird. Zu Beginn ist der Boden der Form von einer nach unten beweglichen Bodenplatte verschlossen. Durch das Absenken des Bodens mit einer definierten Geschwindigkeit entsteht so ein erstarrter Strang der entsprechenden Legierung. Am unteren Ende des durch Transportwalzen gefassten Stranges, der jetzt selbst als Kokillenboden dient, werden Einheiten von gewünschter Länge durch ein Sägeverfahren abgetrennt. Hierdurch wird ein kontinuierlicher Fertigungsprozess erreicht. Das hier beschriebene Verfahren wird auch als Wieland-Junghans-Stranggießverfahren bezeichnet [158]. Die für die Steckverbinderindustrie notwendigen Walzplatten (Brammen) aus Kupferlegierungen werden in so genannten diskontinuierlichen Stranggießanlagen hergestellt. Diese Rohlinge bestehen aus Platten von etwa 8 m Länge und bis zu 20 Tonnen Gewicht [158]. Die Dicke der Walzplatten beträgt in der Regel 250 mm. Die Breite variiert zwischen 600 mm und 800 mm. Zur Entnahme der fertig gegossenen Walzplatten wird der Gießvorgang unterbrochen. Gleich große Walzplatten aus reinem Kupfer werden hingegen in einem kontinuierlichen Prozess gewonnen. Im Gegensatz zu den Induktionsöfen, die mit legiertem Material beschickt werden, kommen hier gasbefeuerte Öfen zum Einsatz. Hier werden Kathoden aus elektrolytisch gewonnenem Kupfer kontinuierlich geschmolzen.

Nach dem Gießen der Brammen schließt sich das so genannte Warmwalzen an. Hierzu werden die Brammen auf Temperaturen zwischen 750°C und 950°C vorgewärmt. Anschließend werden die Brammen durch einen in der Richtung alternierenden Walzvorgang auf eine Dicke von etwa 25 mm und eine Breite von 80 mm heruntergewalzt. Durch allseitiges Abfräsen um etwa 0,5 mm wird die während des Aufheizens entstandene Zunderschicht entfernt. In einem nachfolgenden Walzvorgang werden die Bänder auf eine Dicke von 4 mm abgewalzt. Die durch den Walzvorgang gehärteten Bänder werden in einem 10- bis 15-stündigen Prozess wieder weich geglüht. Die hier entstehende Oxid-

schicht wird durch Beizverfahren entfernt. Hier schließen sich weitere Kaltwalz- und Glühvorgänge an. Hiermit können Banddicken von etwa 0,08 mm Dicke gefertigt werden. Während der Walzprozesse werden die Dickenmaße elektronisch überwacht. Als Messverfahren dienen taktile Verfahren mittels induktiver Taster oder berührungsloser Röntgenabsorptionsgeräte. Die Dickenauflösung beträgt hier bis zu 1 μm [158]. Nach dem Erreichen der Enddicke werden die Bänder in so genannten Rollenscheren auf die gewünschte Breite geschnitten. Die minimale Breite beträgt hier 3 mm. Um eine Säbelförmigkeit der Bänder zu vermeiden und um eine hohe Planheit zu gewährleisten, werden die Bänder auf Streckbiegerichtmaschinen gerichtet. Um „endlose“ Bandlängen zu erreichen, werden die Bänder beim Aufrollen auf die versandfertigen Spulen aneinandergeschweißt. Diese Schweißnähte können jedoch zu Störungen bzw. Schäden in den Stanzbiegwerkzeugen führen. Deshalb werden die Schweißnähte farblich markiert, um eine automatische Abschaltung der Stanzbiegautomaten mittels Farbsensoren sicherzustellen. Da ein Stopp der Presse zwangsläufig einem Produktionsstopp gleichkommt, ist eine maximale Anzahl Schweißungen pro Bandrolle spezifiziert. Ein Anlassen der Bänder mit einer Temperatur zwischen 160°C und 200°C schließt den Fertigungsverfahren ab.

Bedingt durch die Walzprozesse kommt es zu einer Abbildung der Walzenoberfläche auf die Rohbänder. Dies äußert sich in Form von Riefen quer zur Walzrichtung. Partielle Stauchungen und Dehnungen können ebenfalls zu einer so genannten Orangenhaut führen. Diese Strukturen müssen bei der Simulation von Kontaktgeometrien berücksichtigt werden.

4.2 Umform- und Stanzprozesse

Einen weiteren Einfluss auf die Oberflächentopographie haben die Stanz- und Biegeprozesse. In dieser Produktionsphase werden zuerst die Konturen der Kontakte frei geschnitten. Daran schließt sich das Prägen des eigentlichen Kontaktpunktes an. Auch hier kommt es wieder zur Abbildung der Oberflächenstruktur des Prägestempels auf den Kontaktpunktbereich. Im Falle von Kontaktfedern bzw. bei der Fertigung von Kontakten mit Crimp- oder Schneid/Klemm-Anschlüssen erfolgt ein teilweise mehrstufiger Biegevorgang (siehe Abbildung 4.1). Die Werkzeuge hierzu sind modular aufgebaut. Abbildung 4.2 zeigt die untere Hälfte eines Mutterwerkzeuges mit zwei eingebauten Schneid- bzw. Prägemodulen. Die Mutterwerkzeuge werden wiederum in so genannte Stanzautomaten eingesetzt.

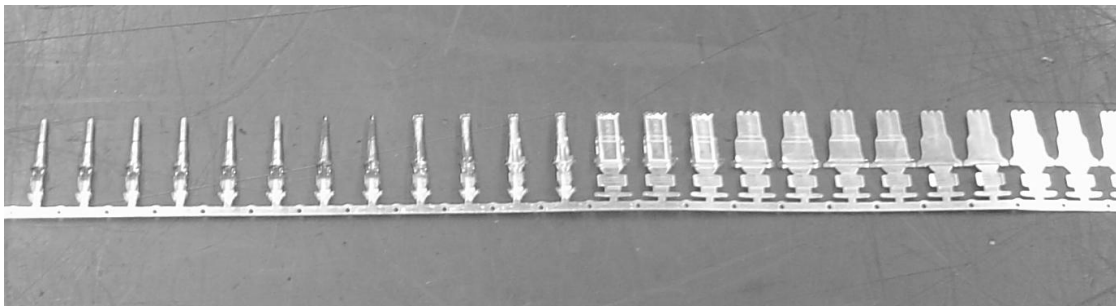


Abbildung 4.1: Biegeoperationen im Kontakt- und Crimpbereich.

Die Presskraft der in der Steckverbinderindustrie (Tyco Electronics) eingesetzten Stanzautomaten liegt zwischen 25 und 50 Tonnen. Sowohl Pressenhub, Presskraft als auch Hubzahl sind regelbar.

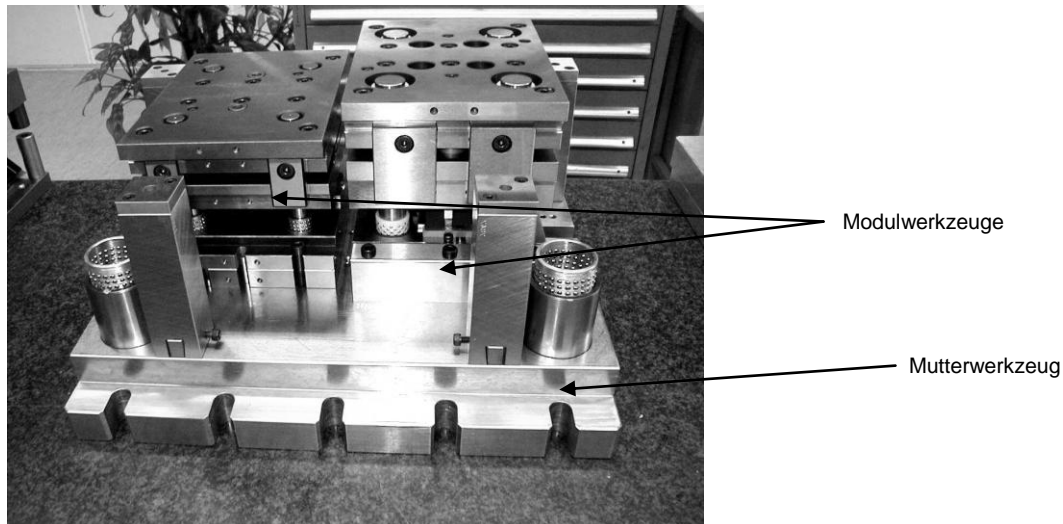


Abbildung 4.2: Mutterwerkzeug (Unterteil) mit Schneid- und Prägemodulen

Verarbeitet werden im Allgemeinen Rohbänder bzw. feuerverzinnnte Bänder. Falls ausschließlich Biegeoperationen durchgeführt werden, kommen auch galvanisierte Bänder zum Einsatz. Je nach Komplexität der Stanz-Biegeprozesse und abhängig von Banddicke und Material werden Hubgeschwindigkeiten zwischen 200 und 800 Hübe pro Minute gefahren.

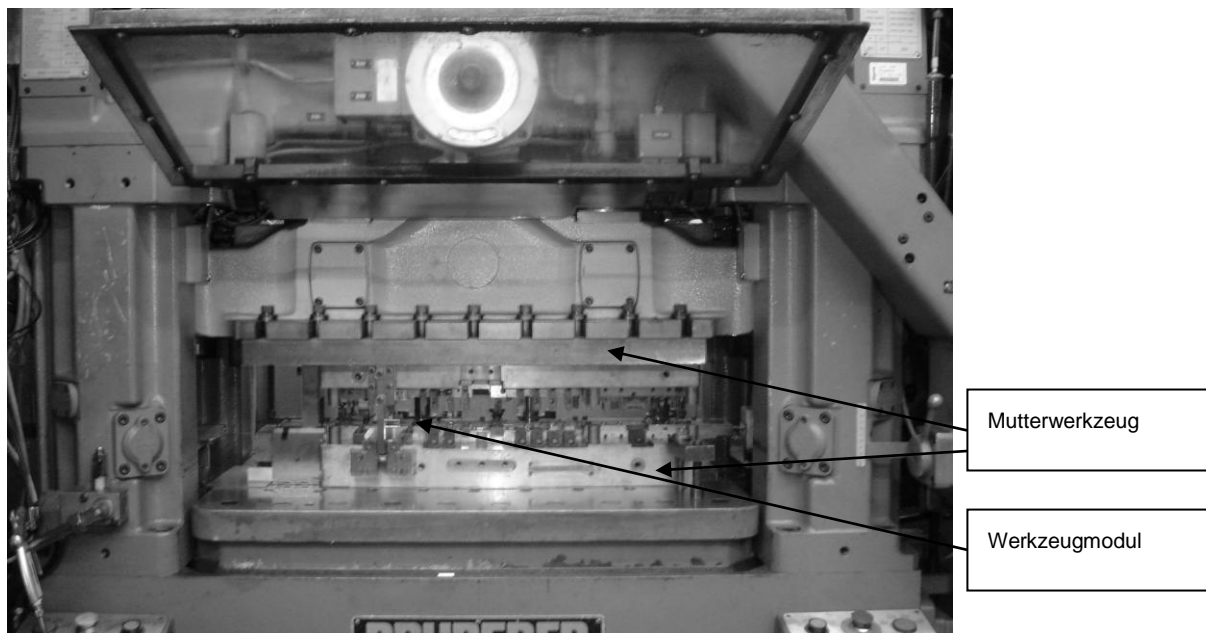


Abbildung 4.3: Stanzautomat mit eingebautem Stanzbiegewerkzeug

Hierbei muss eine genaue Positionierung der Bänder bei jedem Vorschubtakt gegeben sein. Die Toleranzen liegen hier im Bereich $<0,01$ mm. Die Positionierung erfolgt dabei über so genannte Sucherlöcher (siehe auch Abbildung 4.4), die bereits im ersten Bearbeitungsschritt ausgestanzt werden. Die Klemmung der Bänder erfolgt über Federplatten in den einzelnen Werkzeugmodulen. Bei allen Schneid- und Biegeprozessen muss eine ausreichende Benetzung der Bänder mit Stanzöl gewährleistet sein. Obwohl vornehmlich rückstandsfrei abdampfende Schneidöle verwendet werden, muss bei einer nachfolgenden Beschichtung durch entsprechende Vorbehandlungen sichergestellt sein, dass sämtliche Oberflächenrückstände entfernt werden.

Gemeinsam an den Stanz-, Präge- und Umformprozessen ist, dass das Werkstück an den Umformzonen über dessen Formänderungsfestigkeit k_1 [158] hinaus belastet wird. In dieser Arbeit wird das von Mises Kriterium analog Formel (7.21) verwendet.

$$k_1 = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} \quad (4.1)$$

Hierbei bezeichnen σ_1 , σ_2 und σ_3 die drei Hauptspannungsrichtungen (Eigenwerte des Spannungstensors), wobei gilt:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (4.2)$$

Positive Werte repräsentieren Druckspannungen. Negative Werte repräsentieren Zugspannungen. Die Formänderungsfestigkeit k_1 entspricht der bei Zugversuchen ermittelten Zugfestigkeit (Yield Strength).

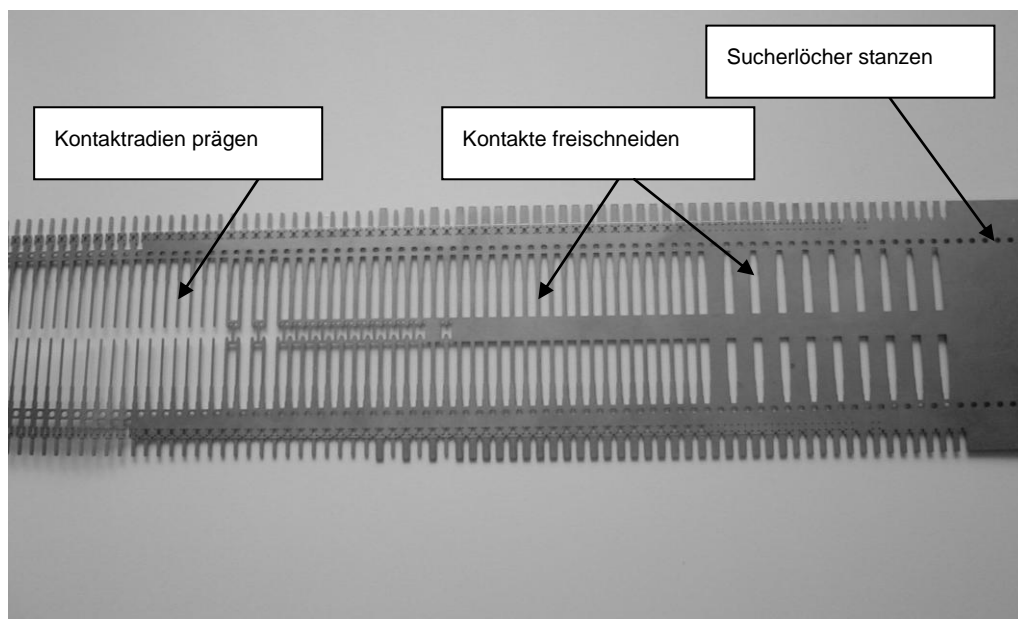


Abbildung 4.4: Bandanschnitt mit unterschiedlichen Ausstanz-, Umschneide- und Prägeoperationen

Das Prägen der Kontaktradien erfolgt jedoch in geschlossenen Gesenken, wodurch nahezu kein Wegfließen des Bandmaterials möglich ist. Die hierzu erforderlichen Kräfte sind wegen der geringen Dicke der Bänder sehr hoch und liegen im Bereich von mehreren Tonnen. Deshalb müssen die Pressen bei Prägeprozessen mit einer einstellbaren maximalen Presskraft gefahren werden können. Bei geprägten Kontaktradien gehen Oberflächenstrukturen auf Grund von Walzvorgängen verloren und die Struktur der Prägestempeloberfläche wird ähnlich wie beim Münzprägen als Negativ abgebildet. Die Stirnflächen der Präge- bzw. Schneidstempel können je nach Form und Endbearbeitung unterschiedliche charakteristische Topographien aufweisen. Als Endbearbeitungsprozesse kommen zum Beispiel Verfahren wie Fräsen, Schleifen, Draht- und Senkerodieren in Frage. Bei gebogenen Kontaktradien (siehe z.B. Abbildung 4.1) bleiben jedoch die Walzspuren erhalten. Bei engen Biegeradien kann es darüber hinaus noch zu einer so genannten Orangenhaut kommen.

4.3 Veredelungsprozesse

Abgesehen von Aufdampf- oder Zerstäubungsverfahren für Einzelkontakte, kommen in der Steckverbinderindustrie fast ausschließlich kontinuierliche Verfahren zum Einsatz, wie die elektrolytische Beschichtung in einer Bandgalvanik, oder wie im Falle von Zinn durch Eintauchen in eine Zinn-Schmelze. Zu Beginn soll hier kurz über die Anforderungen einer Kontaktbeschichtung eingegangen werden.

1. Die Beschichtung muss eine gute Haftung besitzen. Fertigungsprozesse wie Stanzen, Biegen oder Prägen dürfen zu keinem Abplatzen der Schicht führen. Auch darf es durch Steckvorgänge nicht zu einer Delamination der Schicht kommen.
2. Im Falle edler Kontaktschichten darf es zu keiner Porenbildung kommen.
3. Die Beschichtung muss frei von Verunreinigungen sein, damit es zu keiner Änderung des Kontaktwiderstandes kommt.
4. Die Prozesse müssen mit vertretbarem Aufwand reproduzierbar beherrschbar sein.
5. Die verwendete Oberfläche muss für den jeweiligen Anwendungsfall geeignet sein.

Als Prozesse kommen in Frage:

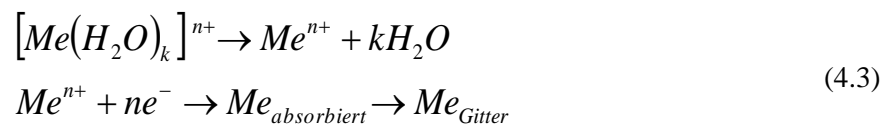
1. Plattieren
2. Elektrolytische Verfahren
3. Vakuum-Abscheidung
4. Rollnahtschweißen
5. Aufschweißen oder Aufnieten individueller Kontakte (Relaistechnik)
6. Feuerverzinnung

Im Folgenden wird hier kurz auf die beiden am häufigsten eingesetzten Verfahrenen Feuerverzinnung und elektrolytische Abscheidung eingegangen.

Bei der Feuerverzinnung durchlaufen die Rohbänder mehrere Prozessschritte. Der erste Schritt stellt eine Reinigungsstufe dar, in welcher organische Rückstände und Partikel entfernt werden. Daran schließt sich eine Aktivierung der Oberfläche durch Flussmittel an. In einem darauf folgenden Schritt wird das mit Flussmittel benetzte Band durch eine Schmelze aus Zinn bzw. einer Zinnlegierung gezogen. Hierbei reagiert das Flussmittel mit der Schmelze und bildet eine dünne intermetallische Reaktionsschicht (intermetallische Phase) zwischen der Schmelze und dem Rohband. Hierdurch kommt es zu einer festen Haftung der Beschichtung mit dem Grundmaterial. Die Schichtdicke wird reguliert, indem das aus der Schmelze auftauchende Band entweder über mechanische Abstreifer oder durch Abblasdüsen (HAL-Zinn „Hot Air Leveled Zinn“) geführt wird. Die hier erzielbaren Schichtdicken liegen zwischen $0,5\ \mu\text{m}$ und $15\ \mu\text{m}$. Die durch eine Feuerverzinnung abgeschiedenen Schichten besitzen nur geringe innere Spannungen, weshalb hier die Gefahr der Whiskerbildung wie bei elektrolytischen Zinnschichten kaum gegeben ist.

Das in der Steckverbinderindustrie am häufigsten angewendete Beschichtungsverfahren ist jedoch die galvanische (elektrolytische) Abscheidung. Die hierzu notwendigen Prozesse werden in den heute üblichen Bandgalvaniken (siehe Abbildung 4.5) hintereinander geschaltet und erlauben einen kontinu-

ierlichen Produktionsfluss. Neben der Beschichtung des kompletten Trägerbandes, kann durch entsprechende Blenden bzw. Eintauchtiefen in das Elektrolyt auch eine selektive Abscheidung erreicht werden. Bei der elektrolytischen Metallabscheidung wird das als Kathode dienende Trägerband durch eine wässrige Elektrolytlösung geführt. Diese Lösung besteht aus Salzen des abzuscheidenden Metalls und weiteren Zusätzen wie zum Beispiel Glanzbildner. Durch Anlegen einer Gleichspannung bildet sich ein entsprechender Stromfluss der positiv geladenen Metallionen (Kationen). Im Falle unedler Beschichtungsmaterialien werden Anoden aus dem zu beschichtenden Material verwendet (z.B. Nickel oder Zinn). Diese Anoden gehen hierbei selbst in Lösung. Im Falle edler Kontaktmaterialien werden Anoden aus Platin verwendet, die nicht selbst in Lösung gehen. Die Schichtbildung erfolgt durch Elektrokristallisation der Metallionen auf der Kathode (Bandmaterial). Gemäß [122] folgt die prinzipielle Reaktion.



Die parallel ablaufenden Reaktionen überschreiten auf Grund deren Komplexität den Fokus dieser Arbeit.



Abbildung 4.5: Bandgalvanik mit einzelnen Funktionsmodulen (Tyco Electronics)

Je nach Trägerstreifengeometrie, Stromdichte, PH-Wert der Lösung, Elektrolytzusammensetzung, Strömungsbedingungen und Temperatur können sich Schichtwachstum, Topographie und innere Spannungen ändern. Des Weiteren wird die Fein- bzw. Grobkörnigkeit des Metallgefüges durch die Keimbildungs- und Wachstumsgeschwindigkeit bestimmt. Am Beispiel eines Schichtsystems Gold über Nickel wird nachfolgend auf den kompletten Veredelungszyklus eingegangen. Zu Beginn erfolgt eine erste Reinigungsstufe, in welcher mittels Ultraschall Reste von Stanzölen beseitigt werden. Darauf schließt sich eine elektrolytische Entfettung an. Als Elektrolyt dient Natrium- oder Kaliumhydroxid. Hierbei wird das zu veredelnde Band entweder als Kathode oder als Anode geschaltet. Im ersten Falle wird am Bandmaterial Wasserstoff gebildet, welcher unter die Oberflächenrückstände dringt und diese ablöst. Im zweiten Falle entsteht Sauerstoff am Bandmaterial. Metallische Verunreinigungen bzw. Bandmaterial werden elektrolytisch gelöst. Nach einer Spülstufe in bidestilliertem Wasser erfolgt im Anschluss eine Glättung der Oberfläche. Hierbei wird das Bandmaterial wieder als Anode geschaltet. Mittels eines werkstoffspezifischen Elektrolyts werden Mikroerhebungen der Oberfläche bevorzugt abgetragen. Walzreifen oder Prägestrukturen bleiben jedoch erhalten. Hierdurch entsteht die für die Bänder typische Rauheit von ungefähr $0,2 \mu\text{m}$. Nach einem weiteren Spülprozess erfolgt das so

genannte Dekapieren in verdünnter Schwefelsäure. Dieser Prozess dient zum Entfernen anorganischer Oberflächenbestandteile wie zum Beispiel Metalloxiden. Nach einem weiteren Spülvorgang erfolgt die erste Beschichtung mit Ni. Je nach Bandgeschwindigkeit und spezifizierter Schichtdicke geschieht dies in zwei hintereinander folgenden Modulen. Nach erneuter Spülung folgt in einem weiteren Prozess die Beschichtung mit einem so genannten Gold-Strike. Diese Schicht dient zur besseren Haftung der eigentlichen Goldbeschichtung, die sich nach einem weiteren Spülvorgang anschließt. Auch hier werden je nach Goldschichtdicke ein oder zwei Prozessmodule verwendet. Nach einem Spülvorgang wird das Band um 180° verdreht. Optional kann das Band durch einen Gold-Stripper geführt werden. Hierdurch wird nicht benötigtes Edelmetall im Anschlussbereich entfernt. Anschließend erfolgt in einem oder zwei Prozessschritten eine abschließende Verzinnung des Anschlussbereiches der Kontakte. Nach einer weiteren Spülung und einer optionalen Befettung erfolgt nach einem weiteren Verdrehen um 180° das Aufhaspeln auf die Bandspulen.

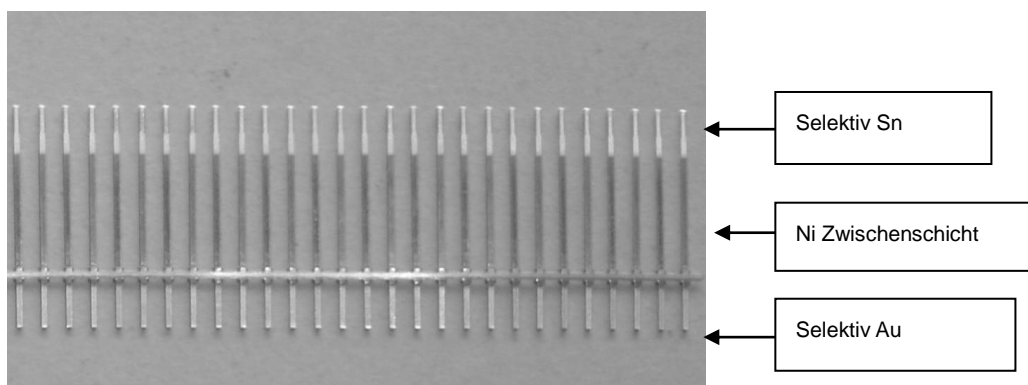


Abbildung 4.6: Selektiv veredelter Gurt mit Stiftkontakten.

5 Messverfahren für kontaktphysikalische Kenngrößen

5.1 Oberflächentopographien

Sämtliche in dieser Arbeit durchgeführten Messungen der Oberflächentopographie wurden mit einem berührungslosen optischen System der Firma Nanofocus gemessen (Abbildung 5.1). Das System beruht auf einem konfokalen Multi-Pinhole-Prinzip (siehe Abbildung 5.2). Hierbei wird Licht, welches von Punkten reflektiert wird, die höher bzw. tiefer als die Fokusebene des Objektivs liegen, durch eine Lochscheibe ausgeblendet. Die Lochscheibe besteht aus einer sich schnell drehenden so genannten Nipkow-Scheibe. Die Drehbewegung der Nipkow-Scheibe und Höhenverstellung des Objektivs werden automatisch so abgestimmt, dass alle Punkte der zu untersuchenden Probe während der Aufnahmezeit der CCD-Kamera erfasst werden. Zur schnellen Höhenverstellung des Objektivs dient ein Piezo-Aktuator. Als Weißlichtquelle wird eine handelsübliche Halogen-Lampe verwendet. Die CCD-Kamera arbeitet mit einer Auflösung von 512×512 Bildpunkten. Das bei den Messungen verwendete Objektiv hat ein Bildfeld von $800 \mu\text{m} \times 800 \mu\text{m}$. Somit ergibt sich eine laterale Auflösung von $1,5625 \mu\text{m}$. Die Lochdurchmesser der Nipkow-Scheibe in Verbindung mit der Stellgenauigkeit des Piezo-Aktuators erlauben (je nach Arbeitsabstand) eine Auflösung der z-Werte im Bereich von 30 nm .



Abbildung 5.1: Beispiel eines 3D-Profilometers der Firma Nanofocus¹⁵

¹⁵ Quelle: Nanofocus

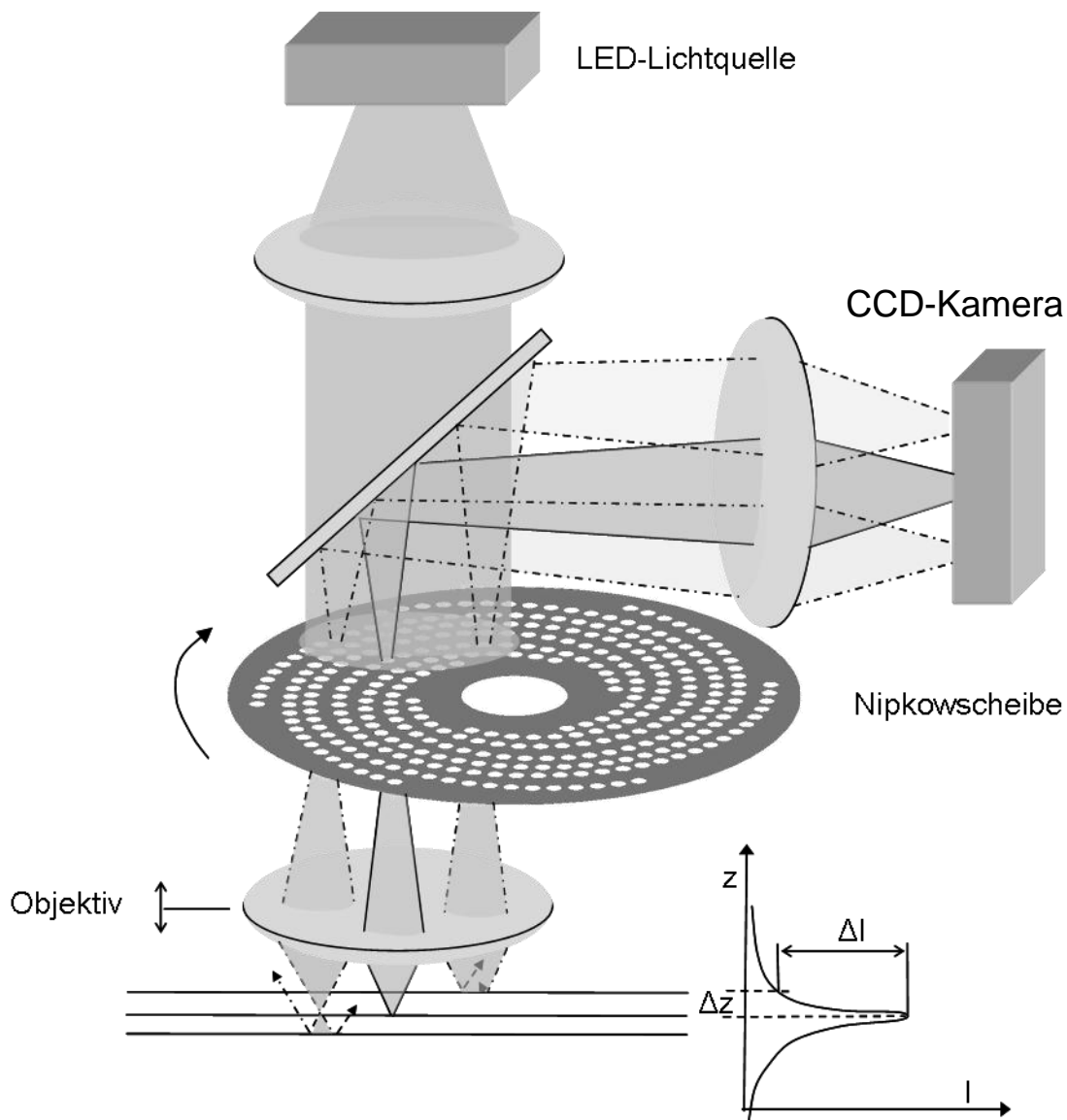


Abbildung 5.2: Prinzip der konfokalen Abbildung

Neben dem 3D-Profilometer der Firma Nanofocus wurde zum Vergleich noch mit einem Profilometer der Firma Keyence gemessen. Dieses Profilometer arbeitet ebenfalls nach einem konfokalen Prinzip. Anstelle von Weißlicht erfolgt die Beleuchtung der Messfläche mit einem Laserstrahl der über ein Spiegelsystem die Oberfläche abscannt. Dieses Prinzip erlaubt prinzipiell eine höhere Auflösung als das auf Weißlicht basierende System. Die gemessenen Oberflächen zeigten jedoch bei einem vergleichbaren Messfeld von $800 \times 800 \mu\text{m}$ ein deutlich verrauschtes Bild. Des Weiteren war die Datenexport-Funktionalität nicht in gleichem Maße wie bei dem Gerät der Firma Nanofocus gegeben.

5.2 Widerstandsmessung

Die Bestimmung des Kontaktwiderstandes erfolgt mit einem von Horn [43] beschriebenen Messaufbau. In Abbildung 5.3 sind die wesentlichen Bestandteile des in Bensheim verwendeten Messplatzes beschrieben. Der Messkopf, welcher die eigentliche Sonde trägt, dient zur Bestimmung der aufgewendeten Kontaktnormalkraft und ist baulich so konzipiert, dass er in den Objektrevolver eines handelsüblichen Stereomikroskops eingesetzt werden kann. Die Sonde (Messkontakt) ist hierbei so zentriert, dass diese mit der optischen Achse des Mikroskops übereinstimmt. Hierdurch ist eine genaue visuelle Inspektion des Messpunktes gegeben. Die Messsonde besteht aus einer Goldsphäre mit Radius 1,5 mm. Diese ist kraftschlüssig mit einer Kraftmessdose verbunden. Die Kontaktkraft wird erzeugt, indem die auf dem Hubtisch befestigte Probe mittels der Feinjustierung des Objektisches des Mikroskops gegen die Sonde gedrückt wird. Die so erzeugten Kräfte liegen im Bereich zwischen 0,01 N und 3 N. Die Messunsicherheit beträgt hierbei $\Delta F_M = 1 \text{ mN}$. Die Verstellunsicherheit beträgt $\Delta F_S = 5 \text{ mN}$. Um die Einflüsse der Messleitungen zu eliminieren, wird die sogenannte Kelvin- oder 4-Leiter-Methode angewendet. Hierbei wird durch ein Leiterpaar ein definierter Strom durch den Kontaktpunkt geführt. Mittels eines zweiten Leiterpaares wird der Spannungsabfall möglichst dicht an der Kontaktstelle abgegriffen. Hierbei wird der Strom auf 10 mA und die zulässige Treiberspannung auf 10 mV begrenzt. Hierdurch wird ein sogenanntes Kontakt-Fritten vermieden. Beim Fritten eines Kontaktpunktes werden schlecht leitende dünne ($\sim 100 \text{ \AA}$) Deckschichten aufgrund von Feldemissionseffekten punktuell durchbrochen. Dies geschieht typischerweise bei einer Frittspannung von etwa 5 V [41]. In diesen Durchbruchstellen ist die Stromdichte so hoch, dass es zu einem Erweichen des umgebenden Materials und somit zu einer Vergrößerung des leitenden Pfades kommt. Dies führt wiederum zu einer Erhöhung des Stromflusses bzw. zu einem Abfall der Kontaktspannung. Um thermoelektrische Effekte zu vermeiden, wird ein in der Polarität alternierender Messstrom verwendet.

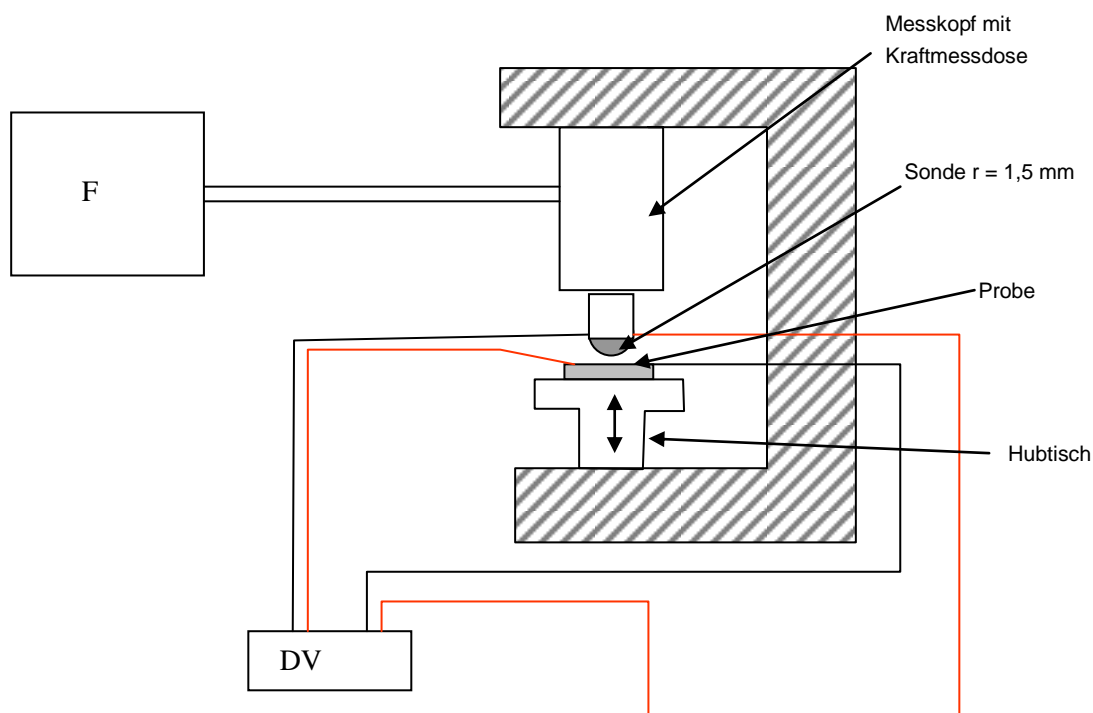


Abbildung 5.3: Schematischer Aufbau des Kontaktwiderstand-Messplatzes

Abbildung 5.4 und Abbildung 5.5 zeigen einige Detailphotos des zurzeit bei Tyco Electronics in Bensheim verwendeten Messplatzes.

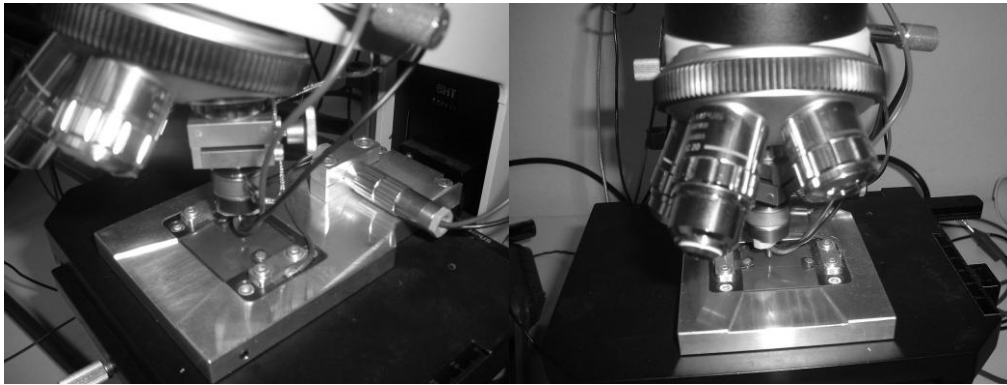


Abbildung 5.4: Detailaufnahmen des Messkopfes des Widerstandsmessplatzes (Bensheim).



Abbildung 5.5: Messkopf und Gesamtansicht des Widerstandsmessplatzes (Bensheim).

Da in dieser Arbeit auch Kraft-Widerstandskennlinien betrachtet werden, die am Tyco Electronics Standort in Harrisburg gemessen sind, wird in Abbildung 5.6 eine entsprechende Detailaufnahme dargestellt. Eine genaue Beschreibung der Messapparatur wird in [105] gegeben.

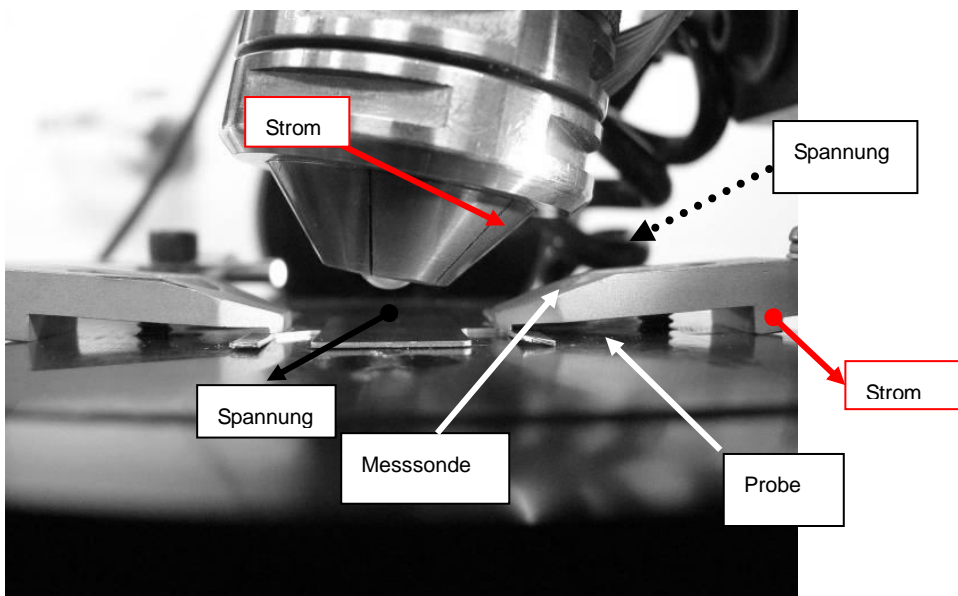


Abbildung 5.6: Detailaufnahmen des Messkopfes des Widerstandsmessplatzes (Harrisburg).

Bei der Messung des Kontaktwiderstandes ist zu beachten, dass der Messwert nicht mit dem eigentlichen Engwiderstand der Kontaktstelle gleich zu setzen ist (Abschnitt 2.2). Neben den Fremdschichtwiderständen (Tunnelwiderstand) wird außer dem eigentlichen Engwiderstand auch der Bahnwiderstand des Grundmaterials (und der Kontaktschichten) und der Fremdschichtwiderstand erfasst (siehe Formel (2.1)). Diese Anteile können im Bereich hoher Kontaktkräfte höhere Werte als den eigentlichen Engwiderstand ergeben. Der Bahnwiderstand, der durch den additiv gemessenen Widerstand des Grundmaterials bzw. den Messaufbau bedingt ist, kann durch einen Offset mit in die Simulation einbezogen werden. Dieser Offset muss für den jeweiligen Messaufbau bzw. die Form der gemessenen Kontakte eine konstante Größe darstellen. Um den prinzipiellen Unterschied bei der Probenkontaktierung der beiden verwendeten Messlabors (Bensheim / Harrisburg) zu verdeutlichen, dienen Abbildung 5.7 und Abbildung 5.8.

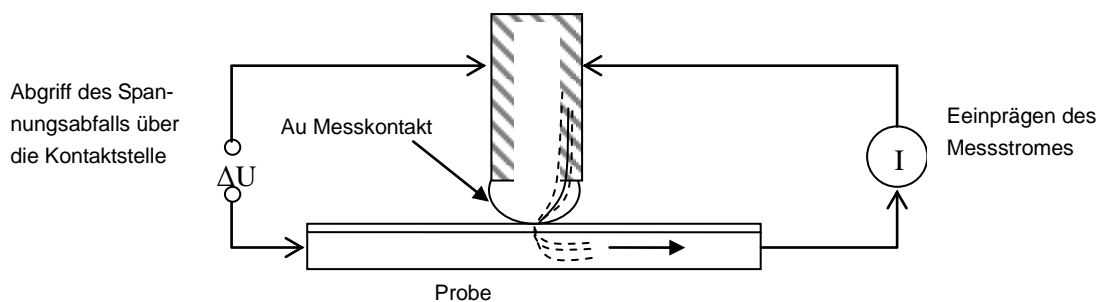


Abbildung 5.7: Prinzipielle Probenkontaktierung des bei Tyco Electronics Bensheim verwendeten Messaufbaus.

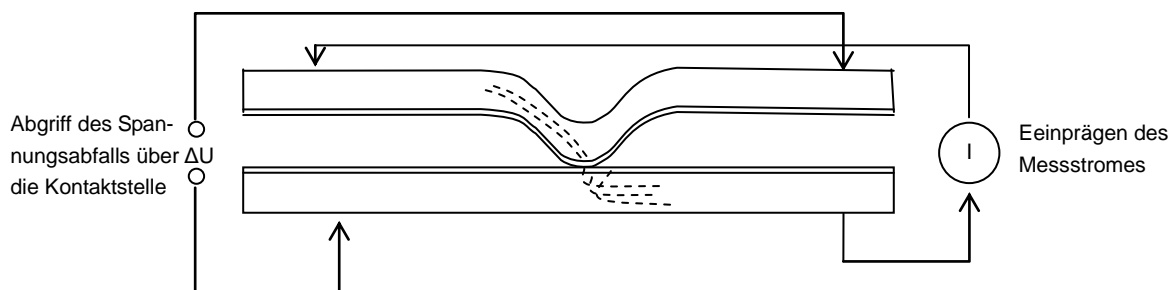


Abbildung 5.8: Prinzipielle Probenkontaktierung des bei Tyco Electronics Harrisburg verwendeten Messaufbaus.

Wie später in Kapitel 8 gezeigt wird, ergeben die beiden Messaufbauten einen unterschiedlichen Offset-Widerstand. Während für die in Bensheim verwendeten Kontaktierungsvariante ein Offset von $R_{\text{Offset}} = 0,1 \text{ m}\Omega$ eingesetzt werden kann, ergibt sich für die zweite Variante (Abbildung 5.8) ein Offset von $R_{\text{Offset}} = 0,9 \text{ m}\Omega$.

6 Theoretische Grundlagen zur Simulation elektrischer Kontakte

Bei der mathematischen Beschreibung technischer Oberflächen ist der erste Schritt die Simulation des Kontaktes zweier rauer Kontaktpartner. Der direkte Weg, eine technische Oberfläche für eine numerische Analyse verfügbar zu machen, ist die Aufnahme eines digitalisierten Oberflächenprofils. Die in dieser Arbeit untersuchten realen Kontaktoberflächen wurden mit einem optischen berührungslosen Profilometer der Firma „Nanofocus“ ermittelt. Weitere digitalisierte Oberflächen wurden von Tyco Electronics USA zur Verfügung gestellt. Die Messungen erfolgten ebenfalls mit einem optischen Profilometer (Fa. Veeco). Die gewählte Auflösung beträgt bei den Messungen im Allgemeinen $\sim 1,5 \mu\text{m}$. Abbildung 6.1 zeigt einen gemessenen realen Kontaktpunkt mit 128×128 Punkten. Im Folgenden werden die Höhenwerte eines Oberflächenprofils immer durch $z_{i,j}$ als Matrixkomponente bzw. als Funktion $z(x,y)$ der x - und y -Werte gekennzeichnet.

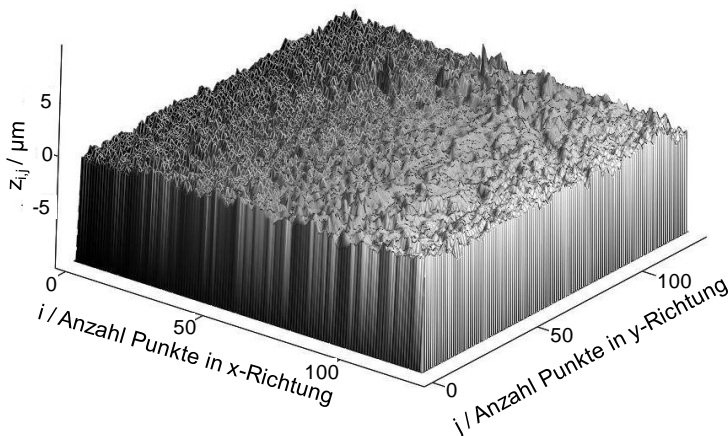


Abbildung 6.1: 3D-Scan eines realen Steckverbinder-Kontaktpunktes.

In der Praxis ist es jedoch nicht immer möglich, auf ein gemessenes Oberflächenprofil zurückzugreifen. Auch liegen Oberflächen mit den gewünschten Eigenschaften oft nicht vor. Neben unterschiedlichen Rauheitswerten σ , Bearbeitungsspuren wie Walz- oder Schleifriefen, können technische Oberflächen auch unterschiedliche Verteilungen der z -Werte besitzen. Zwar kommen normalverteilte Oberflächen in der Praxis sehr häufig vor, Oberflächen mit schiefen Verteilungen (Skew) oder unterschiedlicher Wölbung (Kurtosis) sind ebenfalls möglich (siehe Kapitel 6.1.5). Es ist deshalb notwendig, neben den direkten Messverfahren ein zusätzliches Verfahren zu implementieren, das die Simulation realistischer Oberflächen erlaubt.

Der Versuch, eine digitalisierte Oberfläche mittels eines FEM-Gitters zu modellieren würde, auf Grund der Komplexität und der Anzahl der benötigten Gitterpunkte sehr schnell uneffektiv. Die FEM-Methode wird deshalb in Fällen benutzt, wenn das elastisch/plastische Verhalten einer einzelnen Oberflächenerhebung (Asphérité) simuliert [84][75] oder die Oberfläche als Anreihung einiger sphärischer Erhebungen angenähert wird [74].

In den ersten Arbeiten zu diesem Thema entwickelten Greenwood und Williamson [35] ein statistisches Modell (GW-Modell). In diesem Modell werden raue Topographien als Flächen beschrieben,

die hemisphärische Erhebungen unterschiedlicher Höhe aber gleichen Radius aufweisen. Die Höhenverteilung der Aspheritäten wird bezüglich einer Referenzebene als normalverteilt angenommen. Das Modell wird durch drei Parameter beschrieben. Durch die Standardabweichung der Höhenverteilung σ , der mittleren Dichte von Erhebungen pro Fläche η und dem Radius R der Hemisphären. Das Modell wurde später von Whitehouse und Achard [156] und Onions und Achard [112] verfeinert, indem eine Topographie durch zwei Parameter beschrieben wird:

1. Die rms (root mean square) Rauheit σ
2. Die exponentielle Korrelationslänge β .

Die Korrelationslänge gibt an, ab welchem Abstand vom jeweiligen untersuchten Punkt auf der Oberfläche eine exponentielle Autokorrelationsfunktion auf 10% des Ursprungswertes abfällt (siehe auch 6.1.3). Bush et al. [15][14] entwickelten ein elastisches Kontaktmodell, bei dem die Scheitelpunkte der Oberflächenerhebungen als elliptische Paraboloiden mit gleicher Hauptkrümmung definiert werden. Diese Modelle bieten zwar den Vorteil, dass sie durch einfache Formeln beschreibbar sind und geschlossene Lösungen erlauben. Der Nachteil der oben genannten Verfahren ist jedoch, dass benachbarte Oberflächenerhebungen von einander unabhängig betrachtet werden und sich gegenseitig nicht beeinflussen. Dies ist jedoch bei den punktuell sehr hohen Kontaktbelastungen mit plastischer Deformation der einzelnen Aspheritäten auch hinsichtlich des Engwiderstandes eine zu grobe Vereinfachung.

6.1 Simulation von Oberflächentopographien

Die Notwendigkeit eine Oberflächentopographie zu simulieren, lässt sich aus folgender Überlegung begründen. Oberflächen mit einer genau definierten Rauheit, Kurvenkrümmung (Radius) oder Struktur (Schleifriefen) sind zum einen nicht herstellbar, bzw. würden eine Vielzahl von Messungen erfordern, um entsprechende Oberflächen herauszufiltern. Die Möglichkeit, technische Oberflächen mathematisch zu beschreiben und dadurch numerisch zu erfassen, ist daher hinsichtlich Effizienz und Flexibilität von größtem Vorteil.

Bei der Charakterisierung von Oberflächen stellt sich folgendes Problem. Abhängig von der Abtastrate (Auflösung) eines Profilometers ergeben sich unterschiedliche Kennwerte hinsichtlich Steigung und Krümmung der abgetasteten Profilsegmente. Laut McCool [98][99] lassen sich anisotrope Oberflächen mittels 9 bispektraler Momente beschreiben, die sich im Falle von isotropen normalverteilten Oberflächen auf 3 reduzieren lassen. Für den Fall eines Linienprofils sind nachfolgend die Formeln für die Standardabweichung σ und die drei spektralen Momente m_0 (Varianz der Höhe), m_2 (Varianz der Steigung) und m_4 (Varianz der Krümmung) dargestellt.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N_x - 1} \sum_{i=0}^{N_x-1} (z_i - \bar{z})^2} \quad (6.1)$$

$$m_0 = \frac{1}{N_x - 1} \sum_{i=0}^{N_x-1} (z_i - \bar{z})^2 \quad (6.2)$$

$$m_2 = \frac{1}{N_x - 2} \sum_{i=0}^{N_x-2} (z'_i - \bar{z}')^2 \quad \text{mit} \quad z'_i = z_{i+1} - z_i \quad (6.3)$$

$$m_4 = \frac{1}{N_x - 3} \sum_{i=0}^{N_x-3} (z_i'' - \bar{z}'')^2 \quad \text{mit} \quad z'' = z'_{i+1} - z'_i \quad (6.4)$$

Wie bereits eingangs dieses Kapitels erwähnt, stellt die Autokorrelationsfunktion eine weitere Kenngröße eines Oberflächenprofils dar. Im Falle eines Linienprofils ist die diskrete Autokorrelationsfunktion wie folgt definiert:

$$ACF(k) = \frac{1}{(N_x - k)} \sum_{i=0}^{N_x-k-1} z_{i+k} \cdot z_i \quad (6.5)$$

Die Autokorrelationsfunktion gibt ein Maß an, wie stark zwei Oberflächenpunkte im Abstand k miteinander korreliert sind. Die Größe k ist hierbei als Anzahl inkrementeller Punkte angegeben. Typischerweise zeigen technische Oberflächen einen mit dem Abstand exponentiell abfallenden Verlauf

$$ACF(k) = Const \cdot e^{-2,3 \frac{k}{\beta_{x,y}}} \quad (6.6)$$

mit $e^{-2,3} = 0,1$. Die Autokorrelationslänge $\beta_{x/y}$ eines Linienscans in x/y -Richtung wird hier als der Abstand definiert, bei der die Autokorrelationsfunktion auf 10% des Ausgangswertes ($k=0$) abgefallen ist. Um die Autokorrelationslängen von unterschiedlich hoch aufgelösten Oberflächen zu vergleichen, werden die Werte nach folgendem Schema angegeben:

$$\beta^{nieder} = \Delta \cdot k^{nieder} \quad (6.7)$$

Hierbei gibt k^{nieder} den inkrementellen Abstand bei niederer Auflösung an. Die Größe Δ stellt einen entsprechenden Kalibrierfaktor dar (siehe hierzu Tabelle 6.1)

Tabelle 6.1: Kalibrierfaktoren bei der Angabe der Autokorrelationslänge bzw. Abtastpunkte in Tabelle 6.2 und Abbildung 6.3

Auflösung	Kalibrierfaktor Δ
1024 x 1024	1
556 x 556	2
256 x 256	4
124 x 124	8
64 x 64	16

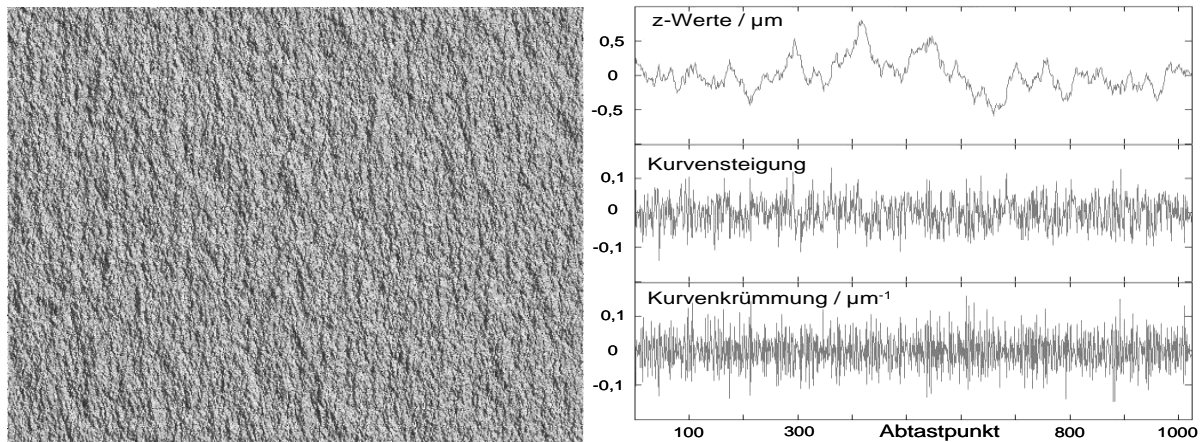
Um den Einfluss der Abtastauflösung zu skizzieren, wird im nachfolgend eine Oberfläche analysiert, deren diskrete Autokorrelationsfunktion eine exponentiell abfallende Form besitzt. Neben den spektralen Momenten sind in Tabelle 6.2 die Korrelationslängen in x - und y -Richtung aufgelistet (siehe Abbildung 6.3). Mit steigender Abtastauflösung steigen m_2 , m_4 und die Dichte der Oberflächenstrukturen (Asperity density), während sich der Radius einer Oberflächenstruktur verringert. Die rms („Root Mean Square“) Rauheit σ bzw m_0 bleiben hingegen annähernd konstant [72]. Folgt man der Argumentation von Nayak [107], so muss man zwischen einem aufgezeichneten Extremwert (Peak) eines Oberflächenprofils und einer Rauigkeitserhebung (Summit) auf der Oberfläche unterscheiden. Ein Oberflächenprofil schneidet eine Erhebung mit größerer Wahrscheinlichkeit durch seine Flanke als genau durch dessen höchste Stelle. Auf dem Profil erscheinen deshalb weniger hohe Peaks, als in Wirklichkeit vorhanden sind. Das Gleiche gilt entsprechend auch für die gemessene mittlere Krümmung der Oberflächenerhebungen. Ein Profilometer misst immer geringere Steigungen, als tatsächlich vorhanden sind. Des Weiteren haben die Oberflächenerhebungen nicht zwangsweise eine sphärische

Form wie bei den statistischen Kontakt-Modellen von Greenwood-Williamson [36] bzw. Whitehouse/Achard [156] und Onions/Achard [112]. Tabelle 6.2 zeigt die rms Rauheit σ , die drei spektralen Momente und die Autokorrelationskoeffizienten gem. Formel (6.25).

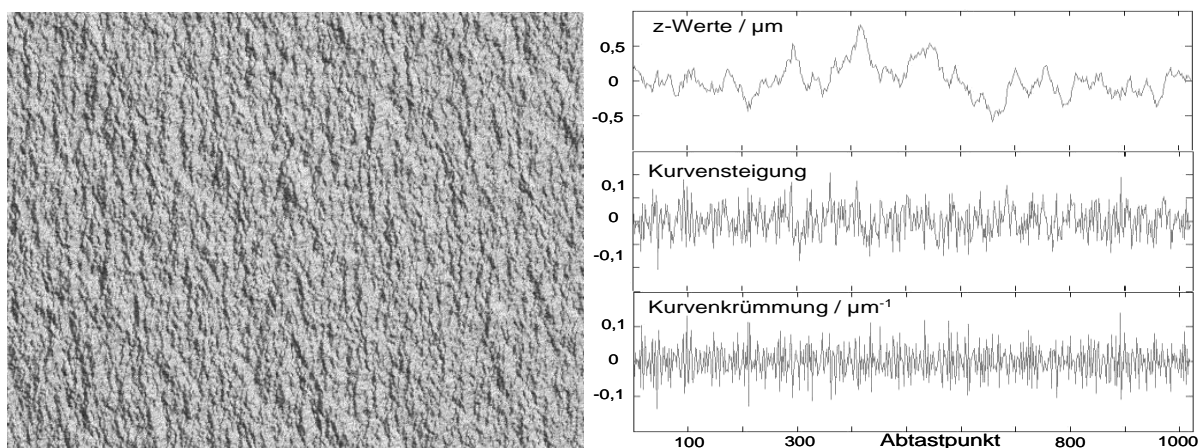
Tabelle 6.2: Vergleich unterschiedlicher Kennwerte einer rauen Oberfläche in Abh. von der Abtastauflösung

N Messpunkte	σ / μm	m_0 x-Richtung / μm^2	m_2 x-Richtung	m_4 x-Richtung / μm^{-2}	β_x	β_y
1024	0,2	4,0	1,765	2,593	25	80
512	0,2001	4,002	1,29	0,566	25	80
256	0,2003	4,003	0,567	0,075	25	80
128	0,2008	4,031	0,267	0,0093	25	80
64	0,1987	3,949	0,116	0,0018	25	80

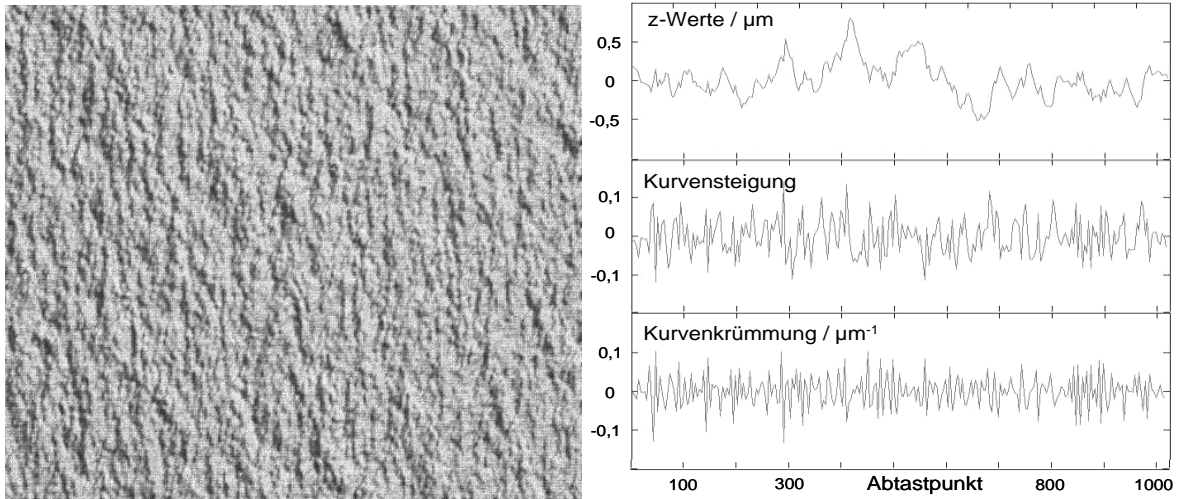
Während σ bzw. m_0 bzgl. der Auflösung invariant sind, variiert die Kurvensteigung bzw. Kurvenkrümmung mit der Abtastrate. Dies ist auch sehr gut an Hand Abbildung 6.2 a – e zu erkennen. Der Umstand, dass bei einer Oberflächenprofilierung immer über ein endliches Intervall abgetastet wird, bedeutet letztendlich, dass Komponenten mit kürzerer Wellenlänge als die Abtastauflösung herausgefiltert werden (Fouriertransformation nur über endlichen Bereich \rightarrow hohe Frequenzen \rightarrow kurze Wellenlängen werden nicht mit integriert). Während für isotrope Oberflächen ein Linienscan ausreicht, um alle statistischen Kennwerte anzugeben, müssen bei nicht isotropen Oberflächen 3 nicht parallele Linienscans gemessen werden (9 spektrale Momente) [107].



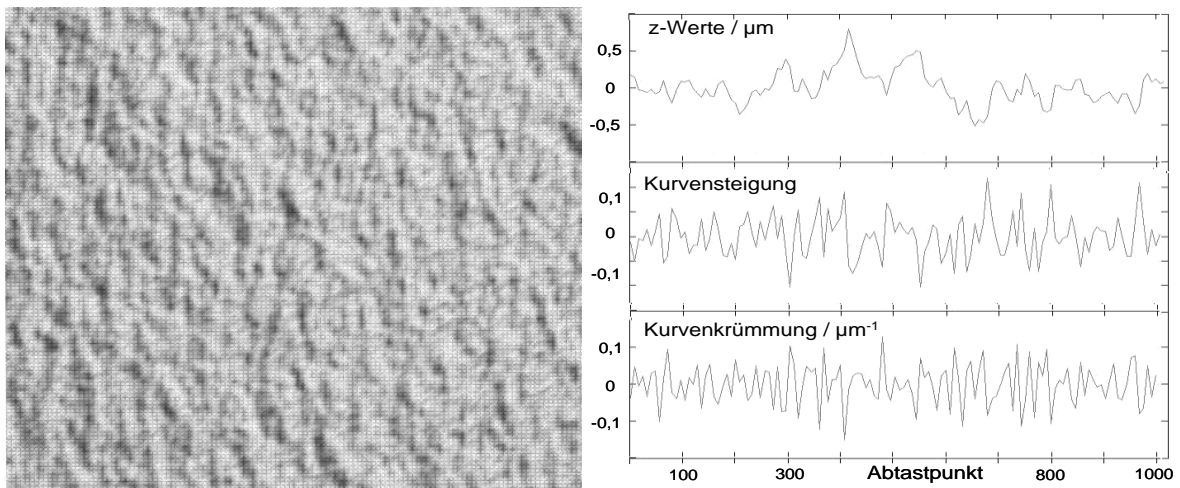
a: Auflösung 1024 x 1024 Punkte



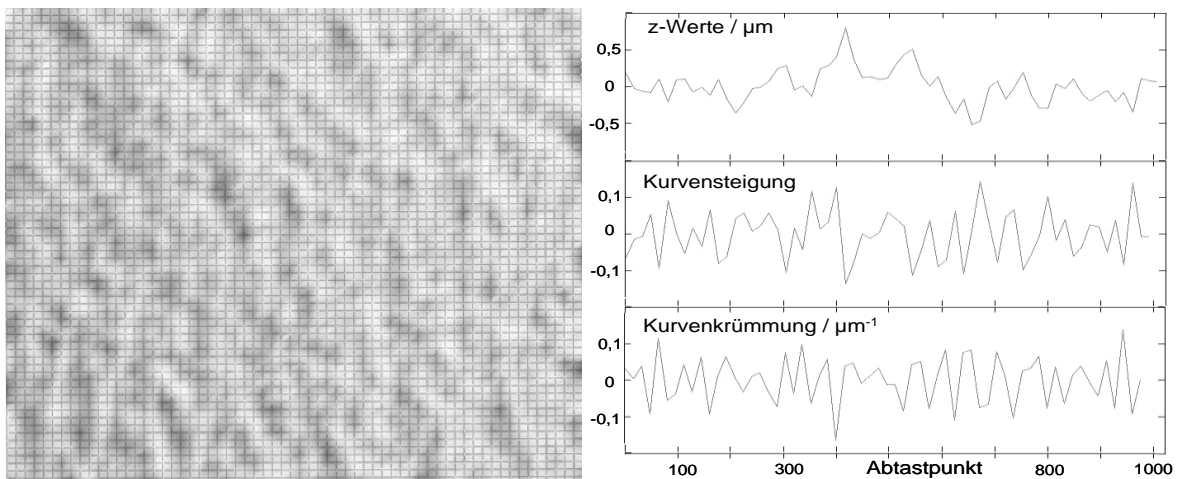
b: Auflösung 512 x 512 Punkte.



c: Auflösung 256 x 256 Punkte.



d: Auflösung 128 x 128 Punkte.



e: Auflösung 64 x 64 Punkte.

Abbildung 6.2 a - e: Simulierte isotrope Oberfläche unterschiedlicher Auflösung. Die rechten Kurven zeigen jeweils ein Linienprofil der z-Werte, der Steigung bzw. der Kurvenkrümmung

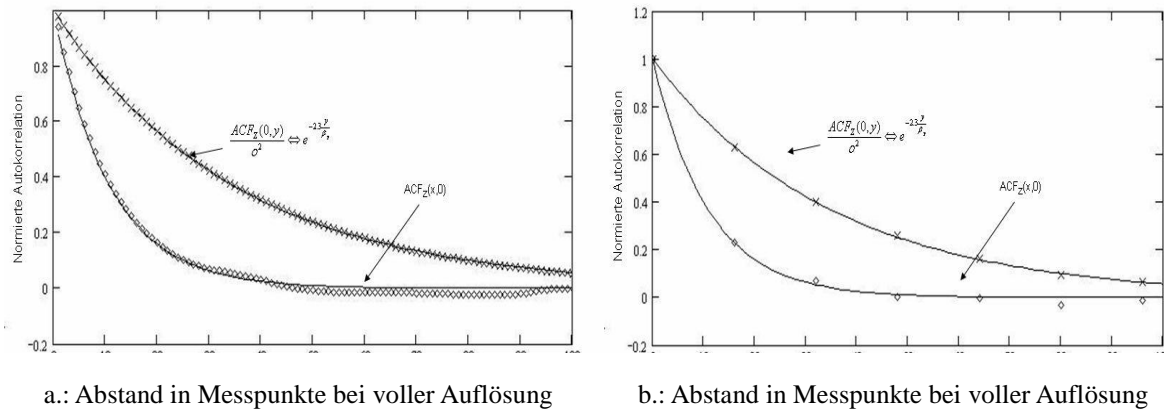


Abbildung 6.3: Darstellung der Autokorrelation in x- und y-Richtung gemäß den Formeln (6.20) und (6.21), bei voller Auflösung (a.) 1024 x 1024 Pkt. und (b.) bei niedriger Auflösung 64 x 64 Pkt..

6.1.1 Vergleich möglicher Simulationstechniken

In dieser Arbeit werden drei unterschiedliche Techniken benutzt, um realistische Oberflächen zu simulieren.

1. Fraktale Modelle
2. Statistische Modelle
3. Geschwindigkeitsoptimierte Modelle

Fraktale Modelle sind zum Beispiel sehr gut geeignet, bei steigender Auflösung immer kleinere Strukturen zu erzeugen, ohne die langwelligeren Komponenten der Oberfläche zu verändern. Diese Modelle eignen sich jedoch nicht, Anisotropien wie Walzriefen oder Schleifspuren nachzubilden. Hierzu dienen statistische Modelle. Durch Vorgabe unterschiedlicher Autokorrelationskoeffizienten in x- und y-Richtung lassen sich definierte anisotrope Oberflächen erzeugen. Durch die Superposition isotroper und anisotroper Topographien unterschiedlicher Grundwelligkeit können auch die fraktalen Eigenschaften einer Oberfläche nachgebildet werden. Eine weitere Möglichkeit, Oberflächen zu simulieren, bieten die in Kapitel 6.1.4 beschriebenen geschwindigkeitsoptimierten Modelle. Diese Modelle zeigen mit steigender Auflösung ebenfalls ein fraktales Verhalten, jedoch nicht den für technische Oberflächen typischen linearen Verlauf der Autokorrelationsfunktion (siehe auch Abbildung 9.5 b. und c. im Anhang).

6.1.2 Fraktale Modelle

Betrachtet man die Topographie einer Oberfläche unter wachsender Vergrößerung, so erscheint die Oberfläche zunehmend rau. Mit jeder feineren Vergrößerungsstufe werden zusätzliche Details sichtbar, die selbst wiederum als additive, zufällig verteilte, raue und ähnlich aussehende Strukturen erscheinen. Im mathematischen Sinne sind solche Strukturen nicht differenzierbar. Denn es kann keine Tangente zu einem Oberflächenpunkt gezeichnet werden, da je nach Auflösung immer neue Strukturen in

Erscheinung treten. Da diese Strukturen den Strukturen des größeren Maßstabes ähneln, spricht man auch von „selbst affin“. Aus dem gleichen Grunde ist es nicht möglich, eine endliche Länge eines aus einem Oberflächenprofil ausgeschnittenen Teilbereichs anzugeben. Je nach Auflösung der Messung wird sich ein anderer Wert ergeben, der gegen unendlich tendiert. Ausgehend von den Eigenschaften von Küstenlinien entwickelte Mandelbrot [93] eine Familie von Mustern, die die oben genannten Eigenschaften besitzen, welche er Fraktale nannte. Ling [82] näherte die fraktalen Eigenschaften eines Oberflächenprofils mittels einer Koch-Kurve an, die durch ständig verfeinerte Dreiecke erzeugt wird. Warren [153][152] näherte die fraktale Oberfläche mittels so genannter „Cantor Sets“ an. Hierbei wird jeder Mikrokontakt (Peak) als Säule mit elastischen / perfekt plastischen Eigenschaften angesehen. Tricot [143] erzeugte zweidimensionale Profile mittels „random bump“ Funktionen. Hierbei werden Rauheitsstrukturen unterschiedlicher Wellenlänge erzeugt. Die simulierten Oberflächenprofile ergeben sich hierbei aus der Überlagerung mehrerer Funktionen und sind wenig geeignet für eine einfach zu parametrisierende Oberflächentopographie.

Im Falle eines zweidimensionalen Oberflächenprofils wird in der Literatur häufig die Weierstrass-Mandelbrot-Funktion als Repräsentation benutzt [91][92][161][150] [151][163][34].

$$z(x) = L \cdot \left(\frac{G}{L} \right)^{(D-1)} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{\cos(2\pi \gamma^n x/L)}{\gamma^{(2-D)n}} \quad (6.8)$$

Hierbei kennzeichnet L die Länge des Messprofils in x-Richtung. G ist der fraktale Rauheitsparameter und hat den in dieser Arbeit verwendeten Wert $1,3 \cdot 10^{-11}$. D bezeichnet die fraktale Dimension. Für zweidimensionale Linienprofile hat D Werte zwischen 1 und 2, während für dreidimensionale Oberflächen D Werte zwischen 2 und 3 annimmt [33]. Der Frequenzindex n läuft bis zum Maximalwert:

$$n_{\max} = \frac{\log(L/L_{\text{Cutoff}})}{\log(\gamma)} \quad (6.9)^{16}$$

L_{Cutoff} ist die Abtastschrittweite und ist in dieser Arbeit gleich L/N_x . Formel (6.8) hat eine ähnliche Form wie die diskrete Fouriertransformation. Während bei der diskreten Fouriertransformation die diskreten Frequenzen als ganzzahlige Vielfache einer Basisfrequenz hoch laufen, steigt der Frequenzterm in der WM-Funktion in der Form γ^n . γ bestimmt Periode und Amplitude der Cosinusanteile in Formel (6.8) und liegt typischerweise zwischen 1.1 und 3 [34]. Um gleichphasige Anteile in der WM-Funktion zu vermeiden, wird in dieser Arbeit für γ analog zu [91] ein konstanter Wert von 1,5 gewählt. Sind L und γ vorgegeben, so können die verbleibenden fraktalen Parameter aus einem gemessenen realen Oberflächenprofil ermittelt werden. Für isotrope Topographien kann D und G aus der doppelt logarithmischen Darstellung der spektralen Leistungsdichte (6.10) bestimmt werden [151] und bei anisotropen und isotropen Oberflächen analog zu Ganepain [33] mittels „recticular cell counting“ (RCC).

Die spektrale Leistungsdichte ergibt sich aus der Fouriertransformation der Autokorrelationsfunktion. Für fraktale Oberflächen kann die spektrale Leistungsdichte gemäß folgender Formel beschrieben werden:

¹⁶ Aufgrund des Quotienten gilt die Formel für beliebige Logarithmusbasis

$$PSD(\omega) = \frac{G^{2(D-1)}}{2 \ln(\gamma)} \cdot \frac{1}{\omega^{(5-2D)}} \quad (6.10)$$

Hierbei stellt die Variable ω die Ortsfrequenz dar. Da die doppelt logarithmische Darstellung der spektralen Leistungsdichte bei hohen Frequenzen oft deutlich verrauscht aussieht, wird von Willner [159] für Linienprofile vorgeschlagen, statt dessen die Strukturfunktion (6.11) zu benutzen, um die fraktale Dimension D zu bestimmen. Die zweidimensionale Strukturfunktion berechnet sich wie folgt:

$$S(x_i) = \frac{1}{N_x - i} \sum_{j=0}^{N-i-1} (z_{i+j} - z_i) \quad (6.11)$$

Wobei

$$S(x_i) = Const \cdot x_i^{4-2D} \quad (6.12)$$

zur Annäherung der zweidimensionalen Strukturfunktion dient. Da in dieser Arbeit jedoch ausschließlich dreidimensionale Profile analysiert werden, werden die fraktalen Parameter mit Hilfe der spektralen Leistungsdichte bestimmt. Der Parameter D bestimmt, wie dicht ein simuliertes Rauheitsprofil erscheint. Der Parameter G skaliert die Höhenwerte des Profils und wird auch als fraktale Rauheit bezeichnet [162].

Während bei den oben genannten Veröffentlichungen die fraktalen Parameter D und G als konstant angenommen werden, ermittelte Jung [60] durch Vergleich mit experimentell ermittelten Daten eine Abhängigkeit von D und G von der mittleren Separation (\sim Kontaktbelastung) zweier rauer Oberflächen. Dies ist leicht nachvollziehbar, da es beim Zusammenpressen zweier rauer Oberflächen zu einer plastischen Deformation der höchsten Berührungspunkte kommt und sich zwangsweise die resultierende Topographie ändert, was wiederum in einer Änderung der fraktalen Parameter zu Tage treten muss.

Eine generalisierte Form der Weierstrass-Mandelbrot-Funktion wird von Ausloos und Berman [4] gegeben. Diese Form der WM-Funktion wurde entwickelt, um die Topographie des Meeresbodens abzubilden, dessen „Abtastraten“ bei der Vermessung im Vergleich zu kleinen Strukturen sehr groß sind. Da diese kleinen Strukturen jedoch zum Beispiel die Ausbreitung von Sonarwellen stark beeinflussen können, wurden diese fraktalen Funktionen herangezogen, um auch Strukturen, die um Größenordnung kleiner als die eigentliche Abtastrate sind, in statistische Betrachtungen mit einzubeziehen. Den gleichen Formalismus benutzten auch Yan [162], Morrow [104], Bora [9] und Kogut [72], um die Topographie technischer Oberflächen zu erzeugen. Die Generierung dreidimensionaler fraktaler Oberflächen analog zu Ausloos und Berman geschieht mit nachfolgender Gleichung und ist in [162] ausführlich beschrieben:

$$z(x, y) = \sqrt{\frac{\ln \gamma}{M}} \cdot \sum_{m=1}^M A_m \sum_{n=0}^{n_{\max}} (k \gamma^n)^{(D-3)} \cdot \left[\cos(\theta_{m,n}) - \cos \left\{ k \gamma^n \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(\tan^{-1}(\frac{y}{x}) - \pi \frac{m}{M}) + \theta_{m,n} \right\} \right] \quad (6.13)$$

Der Parameter M gibt an, wie oft die im rechten Summenterm obiger Gleichung errechneten Höhenprofile superpositioniert werden und wird in dieser Arbeit standardmäßig auf den Wert gleich 10 gesetzt. Der Term $\pi m/M$ erzeugt einen Versatz der Höhenzüge in Richtung des Azimuts. Der Phasenwinkel $\theta_{m,n}$ wird mittels einer normal verteilten Folge von Zufallszahlen im Intervall zwischen 0 und

2π erzeugt. Der Parameter k ist mit der Ausdehnung L der zu simulierenden Oberfläche verknüpft und hat die Form $k = 2\pi/L$. Der Frequenzindex n läuft von 0 bis n_{\max} . Hierbei ist zu berücksichtigen, dass die kleinste Wellenlänge L_{Cutoff} gerade ein Sechstel der Maschenweite des Wertegitters beträgt. Dadurch wird sichergestellt, dass für die einzelnen Oberflächenmaxima die Hertz'sche Kontakttheorie angewendet werden kann [162].

A_m steuert die Anisotropie der Oberfläche. Für einen konstant angenommenen Parameter A_m ergibt sich eine isotrope Oberfläche. Für anisotrope Oberflächen variiert A_m mit dem Index m . In dieser Arbeit wird $A_m = A \cdot m$ gesetzt, wobei sich A errechnet gemäß [162]:

$$A = 2\pi \left(\frac{2\pi}{G} \right)^{(2-D)} \quad (6.14)$$

Da der Term A unabhängig von der Indizierung ist, kann das Produkt aus A und dem Wurzelterm in Glg. (6.13) willkürlich gleich 1 gesetzt werden. Somit gilt für anisotrope Oberflächen:

$$z(x, y) = \sum_{m=1}^M m \sum_{n=0}^{n_{\max}} (k\gamma^n)^{(D-3)} \cdot \left[\cos(\theta_{m,n}) - \cos \left\{ k\gamma^n \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(\tan^{-1}(\frac{y}{x}) - \pi \frac{m}{M}) + \theta_{m,n} \right\} \right] \quad (6.15)$$

und für isotrope Oberflächen

$$z(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{n_{\max}} (k\gamma^n)^{(D-3)} \cdot \left[\cos(\theta_{m,n}) - \cos \left\{ k\gamma^n \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(\tan^{-1}(\frac{y}{x}) - \pi \frac{m}{M}) + \theta_{m,n} \right\} \right] \quad (6.16)$$

Die gewünschte Rauheit der Oberfläche ergibt sich wie folgt.

$$z(x, y) = \sigma \frac{z(x, y)}{\text{stdev}(z(x, y))} \quad (6.17)$$

Hierbei bezeichnet σ die vorgegebene Oberflächenrauheit. Der Term $\text{stdev}(z(x, y))$ steht für die Standardabweichung der z -Werte Verteilung, die sich durch Anwenden der Formeln (6.15) und (6.16) ergibt.

6.1.3 Statistische Modelle

Fraktale Oberflächen alleine beschreiben sehr gut das Erscheinungsbild einer durch statistische Prozesse entstandenen Oberfläche über mehrere Größenordnungen hinweg. Eine durch Fertigungsprozesse definierte Struktur kann hier jedoch nicht abgebildet werden. Während zum Beispiel ein Schleifprozess zu einer Abplattung einer Oberfläche im Millimeterbereich führt, so erzeugen abgelöste Schleifpartikel eine statistisch zufällige Struktur im μm -Bereich. Noch feinere Auflösungen würden wieder das fraktale „self affine“ Verhalten der Topographie zum Vorschein bringen. Abbildung 6.4 und Abbildung 6.5 zeigen jeweils die Topographie einer durch Schleifprozesse bzw. Fräsprozesse erzeugten technischen Oberfläche.

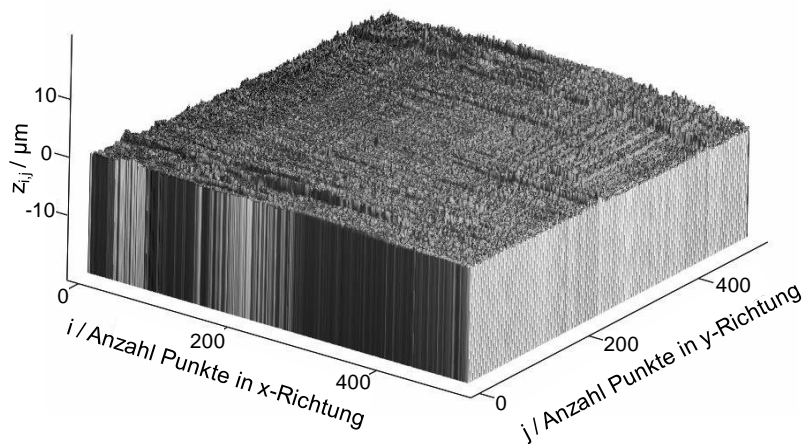


Abbildung 6.4: 3D Messung einer geschliffenen Oberfläche.

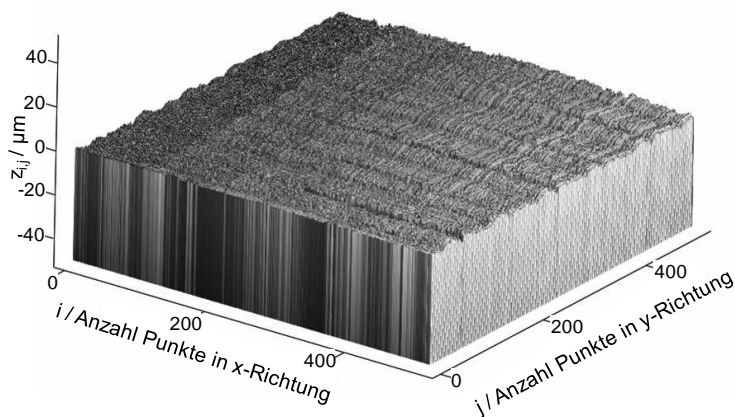


Abbildung 6.5: 3D Messung einer gefrästen Oberfläche.

Die durch die Bearbeitungsprozesse entstandene Anisotropie der Oberflächen ist sehr gut zu erkennen. Longuet und Higgins [88] beschrieben als erste die Struktur der Meeresoberfläche mit Hilfe der „Random Process Theorie“. Aufbauend auf dieser Arbeit entwickelte Nayak [107] ein statistisches Modell zur Beschreibung rauer Oberflächen. Bush, Gibson und Koegh [14] betrachten stark anisotrope Oberflächen, indem die Oberflächenerhebungen als Ellipsen mit stark unterschiedlichen Semiach-

sen betrachtet werden. Francis [32] erzeugt anisotrope Oberflächen, indem 2D-Profile zu einer 3D-Oberfläche extrudiert werden.

Im Folgenden wird das Verfahren von Hu und Tonder [47] beschrieben. Dieses Verfahren erlaubt es, auch anisotrope Oberflächen zu erzeugen, mit welchen sich z.B. Walz- oder Schleifriefen nachbilden lassen. Die Autoren verwenden den gleichen Ansatz wie Patir [115], es wird jedoch an Stelle konventioneller Fourier-Transformationen die „Fast-Fourier-Transformation“ verwendet. Durch die Verwendung von FFT-Algorithmen ist dieses Verfahren auch sehr effektiv und wird u.a. auch bei Bushan [17] verwendet (Prinzip der minimalen komplementären potentiellen Energie). Hu verwendet so genannte „Finite Impuls Response Filter“ FIR, um ausgehend von einer Folge von Zufallszahlen eine realistische Oberflächentopographie zu erzeugen.

Ein digitales Filter stellt ein System dar, bei dem eine Eingangssequenz $\alpha_{i,j}$ von Werten mittels einer „Response“ Funktion in eine Ausgangssequenz $z_{i,j}$ überführt wird. Im Falle von zweidimensionalen FIR-Filtern gilt:

$$z_{i,j} = \sum_{k=0}^{i=N_x-1} \sum_{l=0}^{j=N_y-1} h_{k,l} \cdot \alpha_{i-k,j-l} \quad (6.18)$$

Anwendung der Fouriertransformation auf Formel (6.18) ergibt gemäß dem Faltungssatz:

$$Z(\omega_x, \omega_y) = H(\omega_x, \omega_y) \cdot A(\omega_x, \omega_y) \quad (6.19)$$

Hierbei bedeuten $Z(\omega_x, \omega_y)$ bzw. $A(\omega_x, \omega_y)$ die Fouriertransformierten der Eingangs- bzw. Ausgangssequenz. $H(\omega_x, \omega_y)$ kennzeichnet die so genannte Frequenzantwort oder Transferfunktion des Systems. Betrachtet man anstelle der gefilterten Funktion die diskrete Autokorrelationsfunktion (ACF) von $z(i,j)$, ergeben sich die folgenden Relationen. Die diskrete Autokorrelationsfunktion bzgl. der x- und y-Profile einer Oberfläche kann wie folgt berechnet werden [115]

$$ACF_{k,0} = \frac{1}{(N_x - k) \cdot (N_y)} \sum_{i=0}^{N_x-k-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} z_{i+k} \cdot z_j \quad (6.20)$$

beziehungsweise

$$ACF_{0,l} = \frac{1}{(N_x) \cdot (N_y - l)} \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-l-1} z_i \cdot z_{j+l} \quad (6.21)$$

Durch Anwendung der Fouriertransformation auf die Autokorrelationsfunktion erhält man die spektrale Leistungsdichte PSD (Power Spectral Density). Durch Einsetzen des FIR-Filters ergibt sich für die spektrale Leistungsdichte [47]:

$$PSD_z(\omega_x, \omega_y) = |H(\omega_x, \omega_y)|^2 \cdot PSD_\alpha(\omega_x, \omega_y) \quad (6.22)$$

Hierbei bezeichnen PSD_α und PSD_z die spektralen Leistungsdichten der Eingangs- bzw. Ausgangssequenz.

Wird die Eingangssequenz durch statistisch unabhängige Zufallszahlen erzeugt, so erhält man für PSD_α einen konstanten Wert (Weißes Rauschen hat ein konstantes spektrales Leistungsdichtespektrum).

Wählt man einen Filter mit reeller Transferfunktion, deren Filterkoeffizienten folgende Bedingungen erfüllen [47]

$$h_{k,l} = h_{-k,l} = h_{-k,-l} = h_{k,-l} \quad (6.23)$$

So ergibt sich für die Fouriertransformierte der Transferfunktion

$$H(\omega_x, \omega_y) = \sqrt{PSD_Z(\omega_x, \omega_y) / konst} \quad (6.24)$$

Analog zu Whitehouse [156] kann man für technische Oberflächen eine exponentiell abfallende Autokorrelationsfunktion verwenden. Erweitert man diese Exponentialfunktion in der Form, dass auch anisotrope Oberflächen dargestellt werden können, so kann folgender Ansatz für die ACF der Ausgangssequenz gewählt werden [47][17]:

$$ACF_Z(x, y) = \sigma^2 \cdot e^{-2.3 \left(\sqrt{\left(\frac{x}{\beta_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta_y}\right)^2} \right)} \quad (6.25)$$

Hierbei stellt σ die Standardabweichung (rms-Rauheit) der z-Werte der zu simulierenden Oberfläche dar, während β_x und β_y die Korrelationslängen in x- und y-Richtung darstellen, nach welcher die ACF auf 10% des Ausgangswertes abfällt. Eine weitere Variante der ACF wird von Patir [115] vorgeschlagen und findet z.B. in [78] und [124] Verwendung.

$$ACF_Z(x, y) = \begin{cases} \sigma^2 \left(1 - \frac{|x|}{\beta_x} \right) \left(1 - \frac{|y|}{\beta_y} \right) & |x| \leq \beta_x; |y| \leq \beta_y \\ 0 & sonst \end{cases} \quad (6.26)$$

Diese lineare Form der ACF kann für viele technische Oberflächen angewendet werden. Im Folgenden wird der Algorithmus dargestellt, nach dem eine anisotrope Oberflächentopographie analog der Arbeit von Hu und Tonder [47] erzeugt werden kann. Das Verfahren wird jedoch so ergänzt, dass zusätzliche Rauheitsstrukturen unterschiedlicher Wellenlänge erzeugt werden können¹⁷. (Der Index 1 steht hier für den langwelligen Anteil der Topographie). Abbildung 6.6 zeigt beispielhaft 2 Linienprofile mit kurzwelliger bzw. langwelliger Rauheit. Das Verfahren gliedert sich in folgende Schritte:

1. Festlegung der Auflösung in x- und y-Richtung:

$N_x = N_y =$ ganzzahliges Vielfaches von 2 (z.B. 128)

$N_{x1} = N_{y1} =$ ganzzahliges Vielfaches von 2 (z.B. 32); längerwellige Rauheit

2. Festlegung der Korrelationslängen $\beta_x, \beta_y, \beta_{x1}, \beta_{y1}$,

3. Bereitstellung von Speicherplatz für die Fouriertransformierten

$L_x = L_y = 2N_x$; $L_{x1} = L_{y1} = 2N_{x1}$;

4. Erzeugen einer normalverteilten Datenmatrix (Eingangssequenz) von Zufallszahlen mit der Eigenschaft:

¹⁷ Algorithmus in Topographie.cpp; Klasse Topograph

$\alpha_{i,j}$ = Gaußverteilte Zufallszahl für $i = 0 \dots N_x-1; j = 0 \dots N_y-1$

$\alpha_{i,j} = 0$ für $i = N_x \dots L_x-1; j = N_y \dots L_y-1$

5. Erzeugen einer zweiten normalverteilten Folge von Zufallszahlen mit der Eigenschaft:

$\alpha_{1i,j}$ = Gaußverteilte Zufallszahl für $i = 0 \dots N_{x1}-1; j = 0 \dots N_{y1}-1$

$\alpha_{1i,j} = 0$ für $i = N_{x1} \dots L_{x1}-1; j = N_{y1} \dots L_{y1}-1$;

6. Erzeugen der Datenmatrizen mit den Autokorrelationskoeffizienten. Anstelle der exponentiellen ACF gem. Formel (6.25) kann auch eine andere Form der ACF eingesetzt werden¹⁸.

$$ACF_{Z_{i,j}} = e^{-2.3 \sqrt{\left(\frac{i}{\beta_x}\right)^2 + \left(\frac{j}{\beta_y}\right)^2}} \quad \text{für } i = 0 \dots N_x-1; j = 0 \dots N_y-1$$

$$ACF_{Z_{i,j}} = 0 \quad \text{für } j = N_x \dots L_x-1; j = N_y \dots L_y-1$$

und für den langwelligen Anteil

$$ACF_{Z_{1i,j}} = e^{-2.3 \sqrt{\left(\frac{i}{\beta_{x1}}\right)^2 + \left(\frac{j}{\beta_{y1}}\right)^2}} \quad \text{für } i = 0 \dots N_x-1; j = 0 \dots N_y-1$$

$$ACF_{Z_{1i,j}} = 0 \quad \text{für } j = N_x \dots L_x-1; j = N_y \dots L_y-1$$

7. Berechnung der schnellen Fourier-Transformation der einzelnen Daten-Matrizen

$$A = \text{FFT}(\alpha); \quad \text{PSD}_Z = \text{FFT}(ACF_Z);$$

$$A_1 = \text{FFT}(\alpha_1); \quad \text{PSD}_{Z1} = \text{FFT}(ACF_{Z1});$$

8. Erweiterung der Fouriertransformierten der langwelligen Eingangssequenz A_1 :

$$A^{ZeroPad}_{1i,j} = A_{1i,j} \quad \text{für } i = 0 \dots L_{x1}-1; j = 0 \dots L_{y1}-1$$

$$A^{ZeroPad}_{1i,j} = 0 \quad \text{für } j = L_{x1} \dots L_x-1; j = L_{y1} \dots L_y-1$$

9. Berechnung der Koeffizienten der Transferfunktionen

$$H_{i,j} = \sqrt{\text{PSD}_{Z_{i,j}}}$$

$$H_{1i,j} = \sqrt{\text{PSD}_{Z_{1i,j}}}$$

10. Anwenden der Fouriertransformierten des FIR-Filters

$$Z_{i,j} = H_{i,j} \cdot A_{i,j} \quad \text{bzw.}$$

$$Z_{1i,j} = H_{1i,j} \cdot A^{ZeroPad}_{1i,j}$$

11. Berechnen der inversen Fourier-Transformation und Extraktion der Submatrix ergibt:

$$z_{ij} = \text{iFFT}(Z)_{ij} \quad \text{für } i = 0 \dots N_x; j = 0 \dots N_y;$$

¹⁸ In der Software kann wahlweise eine exponentielle (6.25) oder lineare ACF (6.26) gewählt werden

$$z_{1i,j} = \text{iFFT}(Z_1)_{i,j} \quad \text{für } i = 0 \dots N_x; j = 0 \dots N_y;$$

12. Normierung der Ausgangssequenzen auf die gewünschte rms-Rauheit σ bzw. σ_1

$$z_{i,j} = \sigma \frac{z_{i,j}}{\text{stdev}(z)} \quad \text{bzw.} \quad z_{1i,j} = \sigma_1 \frac{z_{1i,j}}{\text{stdev}(z_1)}$$

13. Bildung der kumulierten Topographie

$$z_{i,j}^{\text{kumuliert}} = z_{i,j} + z_{1i,j}$$

Dieses Verfahren hat den großen Vorteil, dass durch das Vorgeben der Autokorrelationsfunktion, die aus Messungen realer Oberflächen bestimmt werden können, sehr realitätsnahe Topographien erzeugt werden. Gerade das Erzeugen definierter Anisotropien kann von den fraktalen Modellen nicht erreicht werden. So ist auch das nachfolgend beschriebene Verfahren nicht geeignet, Anisotropien zu erzeugen. Der Vorteil liegt hier in der äußerst kurzen Rechenzeit.

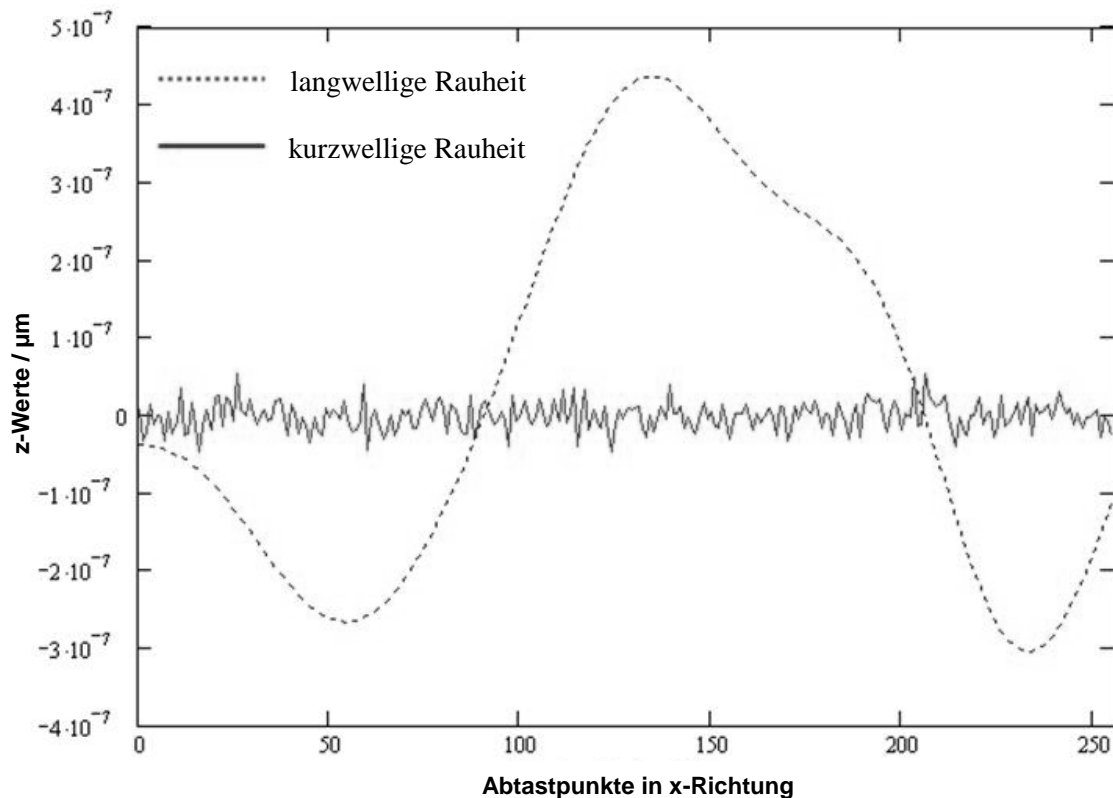


Abbildung 6.6: Simulierte 2D-Profile unterschiedlicher Wellenlänge; Langwelliges Profil $\beta_{xl}=35$, $N_{xl}=16$, $\sigma_l=0,2$ µm; Kurzwelliges Profil $\beta_x=1$, $N_{xl}=256$, $\sigma=0,02$ µm;

6.1.4 Geschwindigkeitsoptimierte Modelle

Gerade die Erzeugung virtueller 3D-Welten in Echtzeit ist im Bereich der Spieleentwicklung von großer Bedeutung. Eine Internetsuche auf entsprechenden Webseiten (Gameprogrammer.com) [95] führte zu dem von Miller [102] vorgeschlagenen Verfahren. Der Algorithmus benötigt nur 3 Parameter, die Anzahl der Punkte in x/y-Richtung N_x bzw. N_y (im Allgemeinen wird immer mit $N_x = N_y$ gerechnet¹⁹), die Rauheit σ und einen Glättfaktor h . Zu Beginn wird eine Folge von $N_x \cdot N_y$ normalverteilten Zufallszahlen M_{xy} im Bereich zwischen -1 und 1 erzeugt. Anschließend wird in Schritt 1 eine Fläche bestehend aus 4 Eckpunkten generiert, deren z-Werte sich aus den ersten vier aufeinander folgenden Werten von M_{xy} ergeben. Die so entstandene Geometrie ist in Abbildung 6.7 a. gezeigt. In einem zweiten Schritt wird der Schnittpunkt der Flächendiagonale gebildet. Der z-Wert des Schnittpunktes errechnet sich aus dem Mittelwert der vier Eckpunkte plus einem weiteren Wert aus M_{xy} der mit einem Faktor f multipliziert wird.

$$f = 2^{-h} \quad (6.27)$$

Typische Werte für h liegen zwischen 0 und 1. Die so entstandene Geometrie ist in Abbildung 6.7 b. zu sehen. In der nächsten Iterationsebene wird der Faktor f gemäß folgender Vorschrift geändert:

$$f = f \cdot 2^{-h} \quad (6.28)$$

Des Weiteren werden Schrittweiten der Form

$$s_x = \frac{N_x}{2} \quad \text{und} \quad s_y = \frac{N_y}{2} \quad (6.29)$$

gebildet. Im dritten Schritt werden die z-Werte aller Punkte berechnet, die sich im Mittelpunkt aller geraden (nicht diagonalen) Strecksegmente (Abbildung 6.7 b.) befinden.

$$z_{i,j} = \frac{z_{i-s_x,j} + z_{i+s_x,j} + z_{i,j-s_y} + z_{i,j+s_y}}{4} + f \cdot M_{i,j} \quad (6.30)$$

Im Falle von Punkten auf den Randgeraden gilt:

$$\begin{aligned} z_{-s_x,j} &= z_{N_x-s_x,j}; & z_{N_x+s_x,j} &= z_{s_x,j} \\ z_{i,-s_y} &= z_{i,N_y-s_y}; & z_{i,N_y+s_y} &= z_{i,s_y} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Dadurch ergibt sich die in Abbildung 6.7 c. dargestellte Geometrie. In Schritt 4 werden wieder die Diagonalenmittelpunkte in allen entstandenen Teilvierecken gebildet. Die z-Werte dieser Punkte werden wieder analog zu Schritt 2 durch Mittelwertbildung der vier umgebenen Eckpunkte plus einem mit f multiplizierten Wert aus M_{xy} berechnet.

$$z_{i,j} = \frac{z_{i-s_x,j-s_y} + z_{i-s_x,j+s_y} + z_{i+s_x,j-s_y} + z_{i+s_x,j+s_y}}{4} + f \cdot M_{i,j} \quad (6.32)$$

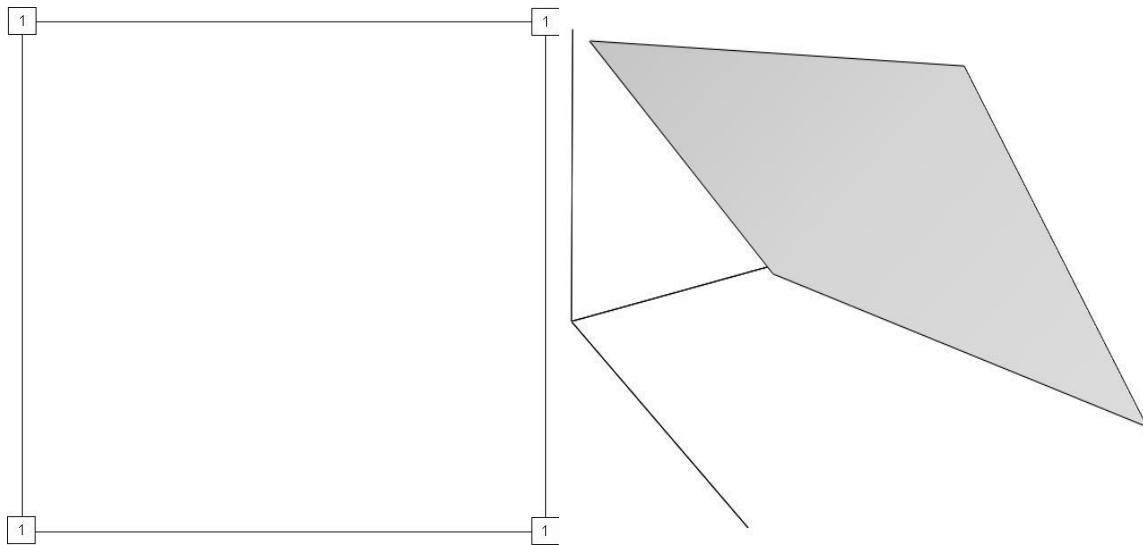
¹⁹ N_x, N_y müssen in der Form 2^n gewählt werden, um mit den FFT-Algorithmen kompatibel zu sein.

Hierdurch ergibt sich ein Bild gemäß Abbildung 6.7 d.. Bevor sich die nächste Iterationsstufe anschließt, wird f wieder gemäß Formel (6.28) verringert. Die Schrittweiten reduzieren sich analog zu:

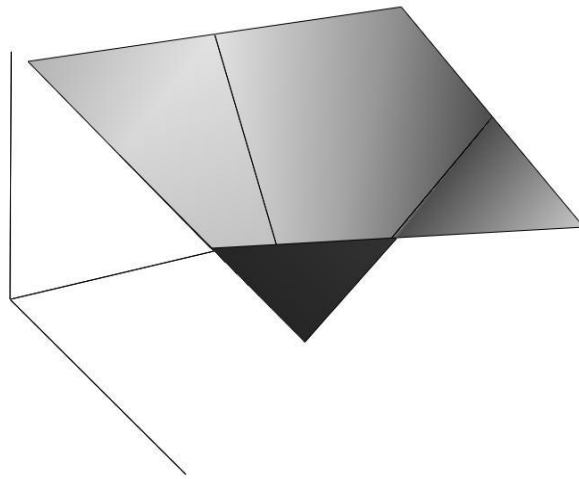
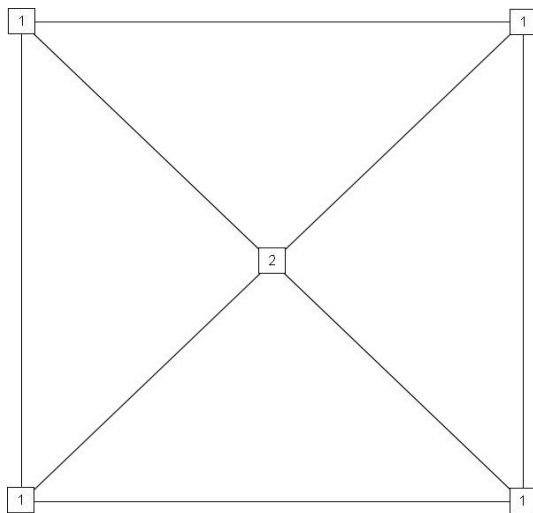
$$s_x = \frac{s_x}{2} \quad \text{und} \quad s_y = \frac{s_y}{2} \quad (6.33)$$

Ein erneutes Anwenden von Schritt 3 und Schritt 4 ergibt die in Abbildung 6.7 e. und Abbildung 6.7 f. dargestellten Oberflächen. Nach erneuter Modifikation von f , s_x und s_y werden die oben beschriebenen Iterationsschritte so lange wiederholt, bis s_x bzw. s_y einen Wert kleiner 1 annehmen. Hier sei noch einmal betont, dass in dieser Arbeit ausschließlich mit $N_x = N_y$ gerechnet wird. Für Werte $N_x \neq N_y$ würden die Verfeinerungen (Halbierung der geraden Segmente) in x/y -Richtung entsprechend der Randbedingung $s < 1$ gestoppt werden. Die Normierung der z -Werte erfolgt wie bereits in Kapitel 6.1.2 und 6.1.3 beschrieben gemäß:

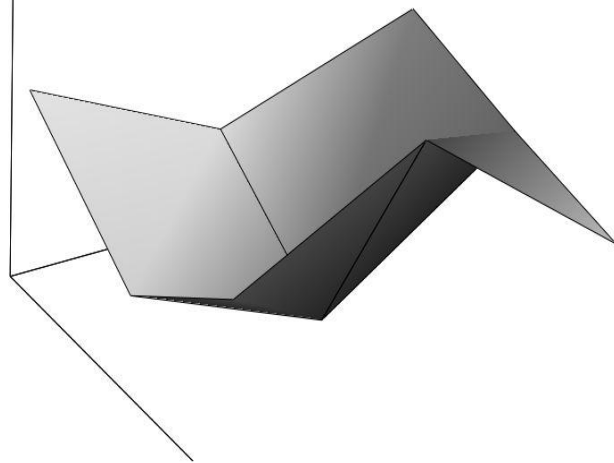
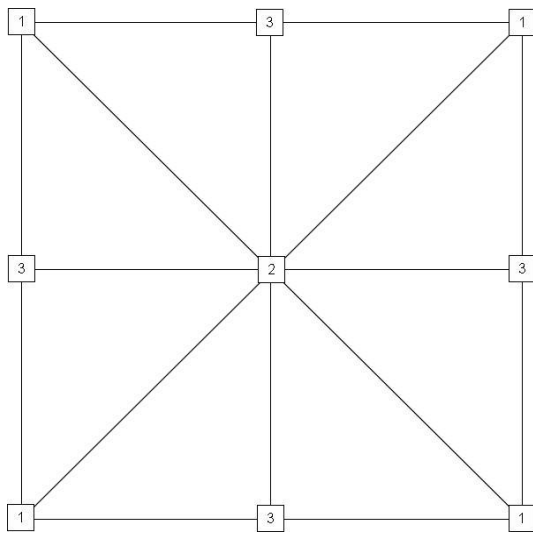
$$z_{i,j} = \sigma \frac{z_{i,j}}{\text{stdev}(z)} \quad (6.34)$$



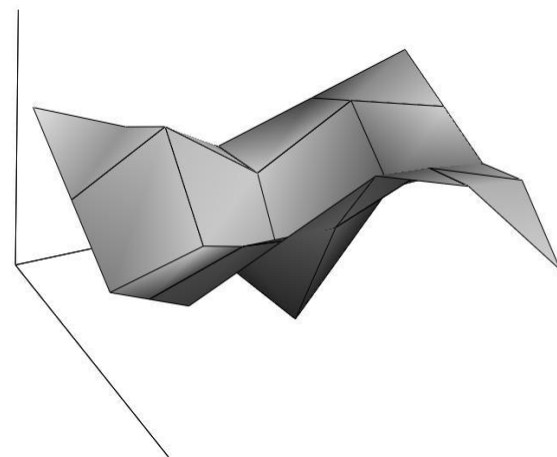
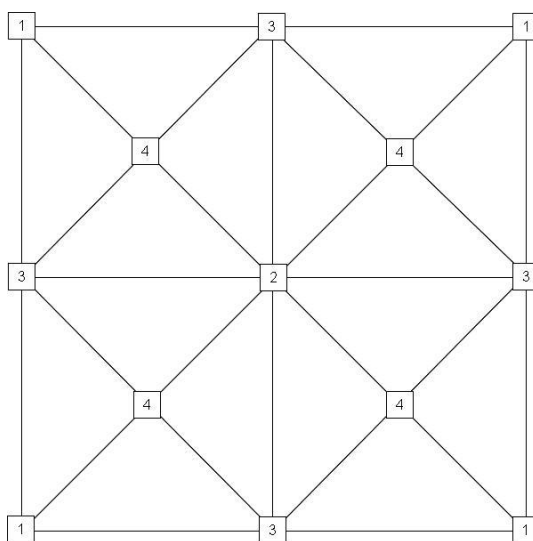
a: Schritt 1 → Generierung der äußeren Eckpunkte



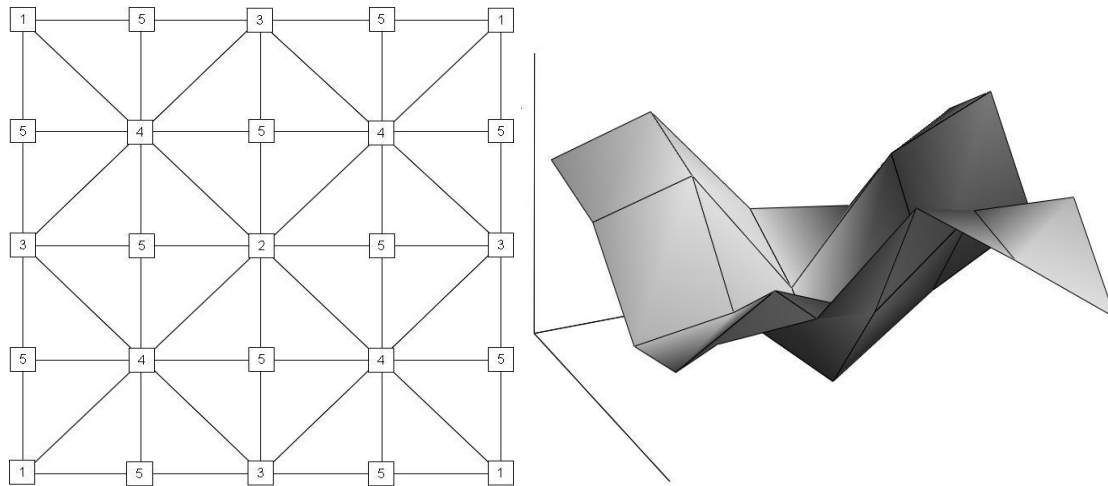
b: Schritt 2 → Erzeugen des ersten Diagonalelementes



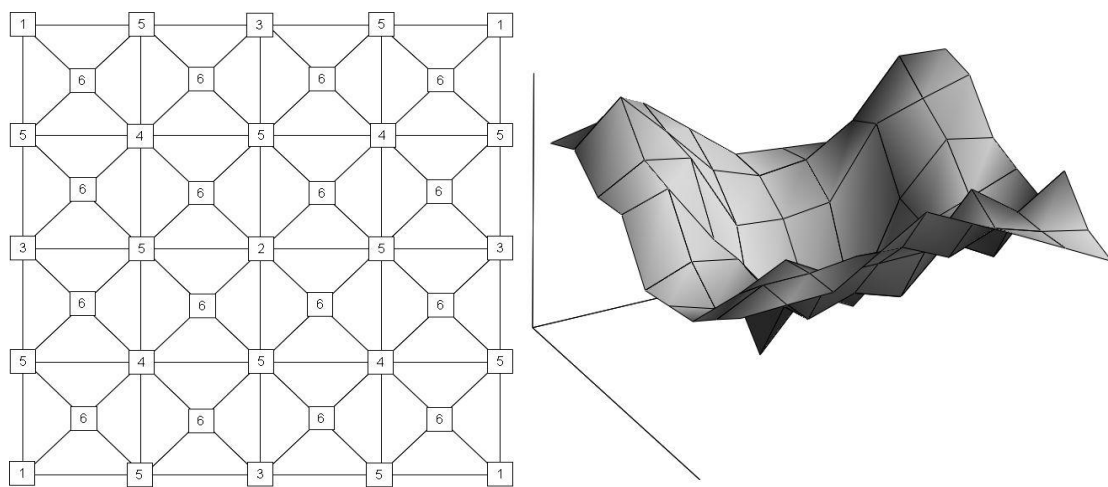
c: Schritt 3 → Erzeugen der neuer Quadrat Zellen



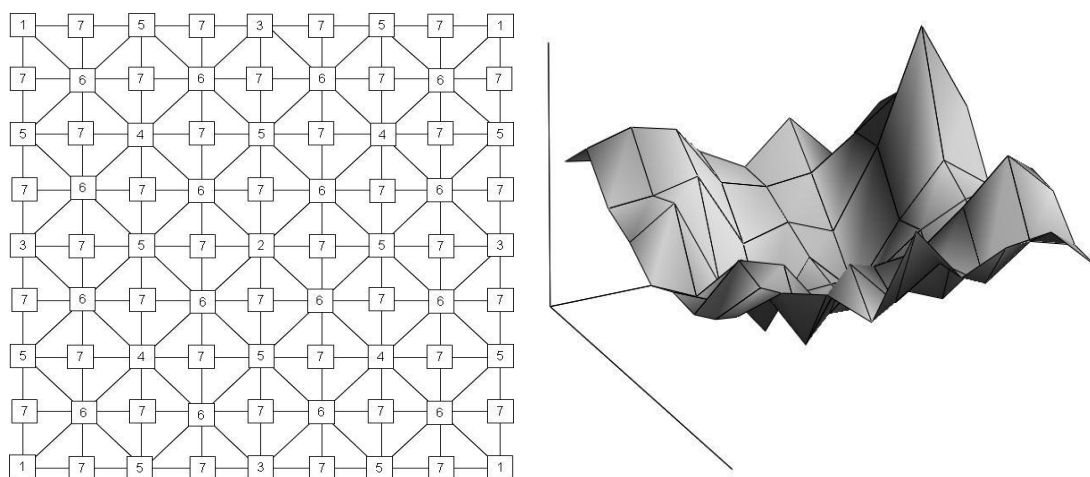
d: Schritt 4 → Erzeugen neuer Quadratmittelpunkte



e: Schritt 5 → Erzeugen quadratischer Zellen analog zu Schritt 3.



f: Schritte 6 → Mittelpunktbildung



g: Schritt 7 → Quadratbildung.

Abbildung 6.7 a – g: Erzeugen einer isotropen fraktalen Oberfläche.

6.1.5 Erzeugen nicht normalverteilter Oberflächen

Bis zu dieser Stelle wurden nur Topographien mit normalverteilten z-Koordinaten behandelt. Die Gauß'sche Glockenkurve (6.35) ist per Definition symmetrisch zu ihrem Mittelwert und fällt in der Entfernung der Standardabweichung σ auf den Bruchteil $\sqrt{1/e}$ ($\sim 60\%$) des Maximalwertes ab.

$$\text{Häufigkeit}(z_{i,j}) = \text{Const} \cdot e^{-\frac{(z_{i,j} - \bar{z})^2}{2\sigma^2}} \quad (6.35)$$

Die Schiefe (Skew) einer Verteilung ist definiert gemäß nachfolgender Formel:

$$\text{Schiefe} = \frac{1}{N_x \cdot N_y} \cdot \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} \left[\frac{z_{i,j} - \bar{z}}{\sigma} \right]^3 \quad (6.36)$$

Für eine symmetrische Verteilung wie die Gauß'sche Glockenkurve hat die Schiefe den Wert Null. Werte größer Null bedeuten eine Asymmetrie hin zu Werten größer als der Mittelwert \bar{z} . Werte kleiner Null entsprechen einer Asymmetrie hin zu Werten kleiner \bar{z} . Die Wölbigkeit (Kurtosis) wird nach Formel (6.37) ermittelt.

$$\text{Wölbigkeit} = \frac{1}{N_x \cdot N_y} \cdot \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} \left[\frac{z_{i,j} - \bar{z}}{\sigma} \right]^4 \quad (6.37)$$

Im Falle der Normalverteilung ergibt sich für die Wölbigkeit der Wert 3. Größere Werte für die Wölbigkeit bedeuten eine spitzere Verteilung. Werte kleiner drei ergeben eine mehr gedrungene Form [50]. Bearbeitungsbedingte Oberflächenstrukturen wie Walz- oder Schleifriefen erzeugen zwar eine Anisotropie der Oberfläche, die Verteilung der z-Werte besitzt jedoch weiterhin eine Glockenform (siehe auch Abbildung 7.6 und Abbildung 7.5). Verschleißspuren in Folge von Reibungsvorgängen lassen jedoch erwarten, dass die höchsten Punkte eines Oberflächenprofils stärker beansprucht werden als Punkte, die Vertiefungen darstellen. Somit ist für solche Oberflächen eine z-Werte-Verteilung mit einer Schiefe ungleich Null zu erwarten. Auch sind Werte-Verteilungen mit einer Wölbigkeit ungleich 3 wie in Abbildung 7.7 und Abbildung 7.10 dargestellt in der Praxis vorhanden.

Prinzipiell kann mit den oben genannten Verfahren anstelle von normalverteilten Zufallszahlen auch mit Verteilungen unterschiedlicher Schiefe oder Wölbigkeit gerechnet werden. Anstelle von normalverteilten Oberflächentopographien verwendet Yu [166][167] die Weibull-Verteilung. Hu [47] und Jeng [50] [51] verwenden das „Johnson Translator System“ um eine gegebene Normalverteilung in eine Verteilung mit definierter Wölbigkeit und Schiefe zu transformieren. Eine weitere Methode wird von Jeng [52] vorgeschlagen. Hier werden die höchsten Punkte der Höhenverteilung pro Verschleißzyklus abgeschnitten, wodurch eine asymmetrische Verteilung erzeugt wird. In dieser Arbeit wird ein ähnlicher Ansatz gewählt, der jedoch die Verteilung der z-Werte der Topographie nicht abrupt abschneidet und stetige Verteilungen erzeugt.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden zwei Verfahren entwickelt, mit welchen sich die z-Werte-Verteilungen digitalisierter Oberflächen nachträglich verändern lassen. Diese Verfahren sind somit für gemessene als auch unabhängig vom Simulationsverfahren erzeugte Oberflächen anwendbar. Um einen abrasiven Verschleiß zu simulieren, wird wie folgt verfahren: Ein Punkt auf der Oberfläche

erfährt umso mehr einen Abtrag, je größer dessen Höhe ist. In numerischer Form kann der folgende Ansatz gewählt werden:

$$z_{i,j}^{neu} = z_{i,j}^{alt} - C1 \cdot \left| \frac{z_{i,j}^{alt} - \min(z^{alt})}{\min(z^{alt})} \right|^{C2} \cdot (z_{i,j}^{alt} - \min(z^{alt})) \quad (6.38)$$

Hierbei kennzeichnet $\min(z^{alt})$ den Minimalwert der ursprünglichen z-Werte-Verteilung. Die Konstante C1 dient als Skalierungsfaktor und durchläuft typischerweise Werte zwischen 0 und 0,5. Die Potenz C2 gibt an, ob die z-Werte mit konstanter Steigung C1 ($C2 = 0$) oder in potenzieller Form reduziert werden. Im Falle von $C2 = 1$ werden hauptsächlich die Maxima der Oberfläche abgeschnitten. Bei Werten von C2 größer 1 werden die Oberflächenmaxima je nach Höhe von C1 so stark reduziert, dass an diesen Stellen bereits negative z-Werte bis hin zu lokalen Minima entstehen können (siehe auch Abbildung 7.32). Die so erzeugten z-Werte-Verteilungen zeigen zwar eine negative Schiefe und Wölbigkeit > 3 , eine positive Schiefe oder Wölbigkeit < 3 kann hiermit nicht abgebildet werden. Der Formalismus analog zu Glg. (6.39) überkommt diese Einschränkungen. Die Idee hinter diesem Ansatz ist es, nur in bestimmten Bereichen an den Flanken der Glockenkurve Werte zu ändern. Je nach Parameterwahl werden Bereiche nahe dem Mittelwert und Bereiche nahe den Maxima bzw. Minima nicht verändert. Hierzu werden wiederum zwei getrennt parametrisierbare Glockenkurven verwendet. Prinzipiell sind Sinuskurven oder Polynome möglich. Die Glockenkurve lässt sich jedoch auf sehr einfache Weise durch drei Parameter definieren. Die Exponenten L und R symbolisieren die linke bzw. rechte Seite der zu ändernden Flanke der originalen Glockenkurven.

$$z_{i,j}^{neu} = z_{i,j}^{alt} \cdot \left(1 + C^{L1} e^{-\frac{(z_{i,j}^{alt} - m^L)^2}{2(\sigma^L)^2}} + C^{R1} e^{-\frac{(z_{i,j}^{alt} - m^R)^2}{2(\sigma^R)^2}} \right) \quad (6.39)$$

Das Maximum der Glockenkurve wird durch die Parameter $m^{L/R}$ definiert.

$$m^L = \frac{\min(z_{i,j}^{alt}) - \bar{z}^{alt}}{C^{L2}} \quad (6.40)$$

$$m^R = \frac{\max(z_{i,j}^{alt}) - \bar{z}^{alt}}{C^{R2}} \quad (6.41)$$

$$\sigma^L = \frac{\min(z_{i,j}^{alt}) - \bar{z}^{alt}}{C^{L3}} \quad (6.42)$$

$$\sigma^R = \frac{\max(z_{i,j}^{alt}) - \bar{z}^{alt}}{C^{R3}} \quad (6.43)$$

Somit ergeben sich 6 unabhängige Parameter C^{L1} , C^{L2} , C^{L3} bzw. C^{R1} , C^{R2} und C^{R3} .

6.2 Spannungen und Deformationen

In dieser Arbeit wird der Fall des trockenen Kontaktes „Dry Contact“ zwischen zwei rauen Oberflächen betrachtet. Das heißt, es werden keine Effekte auf Grund von zusätzlichen Oberflächenbedeckungen wie Schmiermittel oder anderen flüssigen Substanzen betrachtet. Die aufgebrachten Kontaktkräfte sind deshalb ausschließlich durch die Kontaktnormalkraft gegeben und enthalten keine adhäsiven Anteile auf Grund von Meniskus-Effekten [2][16] oder der Adhäsionsenergie [111][29]. Die Adhäsionsenergie spielt nur bei sehr glatten Oberflächen eine wesentliche Rolle [29][167] und kann im Falle von plastischen Deformationen, wie sie bei rauen Kontaktoberflächen auftreten, vernachlässigt werden [73].

Die Simulation des Kontaktes zweier rauer Flächen ist ein numerischer Prozess, dessen Ziel es ist, die Kontaktbelastung (Druckverteilung) und Kontaktfläche hinsichtlich des Maßes des gegenseitigen Zusammenführens der einzelnen Kontaktelemente (Oberflächenerhebungen) zu korrelieren. Hierbei sind die Materialparameter wie E-Modul, Härte oder Oberflächenrauheit zu berücksichtigen. Die Deformation zweier glatter sphärischer Profile (siehe auch Anhang 1) auf Grund einer Normalkraftbelastung wird in Abbildung 6.8 skizziert.

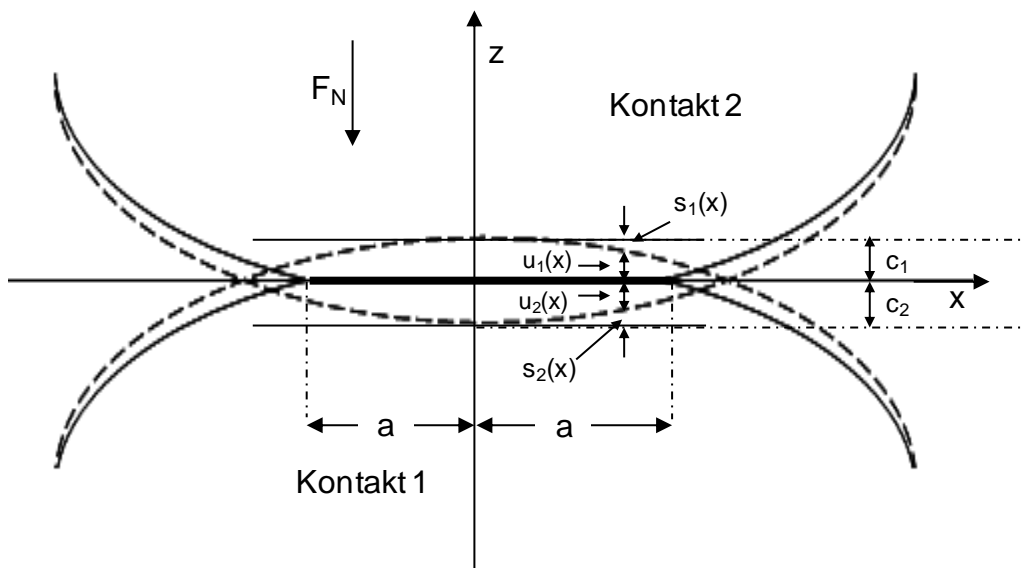


Abbildung 6.8: Deformation zweier glatter Sphären auf Grund einer Normalkraft

Für eine beliebige Koordinate x bezeichnen $u_1(x)$ und $u_2(x)$ die Deformation der in Kontakt stehenden Körper. Mit $s_1(x)$ und $s_2(x)$ werden die ursprünglichen Separationen (Abstände) gekennzeichnet. Die Größen c_1 und c_2 stehen für den Weg (Kompression), den die beiden Körper zusammengepresst werden. Der Parameter a repräsentiert hier den Hertz'schen Kontaktradius. Hierbei erfüllen die obigen Größen die folgenden Relationen

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) \quad (6.44)$$

$$s(x) = s_1(x) + s_2(x) \quad (6.45)$$

$$c = c_1 + c_2 \quad (6.46)$$

und

$$u(x) + s(x) - c = 0 \quad \text{innerhalb des Kontaktpunktes} \quad (6.47)$$

Gleichung (6.47) stellt weiterhin die Randbedingung, dass es zu keiner Durchdringung der Oberflächen kommt.

$$u(x) + s(x) - c > 0 \quad \text{außerhalb des Kontaktpunktes} \quad (6.48)$$

Im Falle des Kontaktes zweier rauer Profile (Abbildung 6.9) geschieht die Berührung in einer Anzahl von beliebig geformten Kontaktpunkten (a-Spots) innerhalb der Kontaktzone. Die wahre Kontaktfläche zwischen den beiden Körpern bildet sich an den Spitzen der höchsten Profilpunkte.

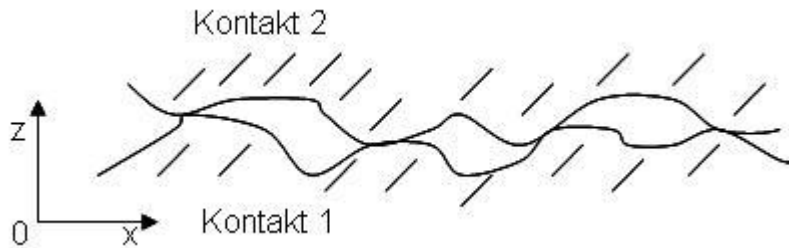


Abbildung 6.9: Zwei raue Profile in Kontakt

Die Integration über die gesamte Druckverteilung der Kontaktregion ergibt die aufgewendete Kontaktnormalkraft.

$$\iint_A p(x, y) dy dx = F_N \quad (6.49)$$

Adressiert man alle Punkte eines Oberflächenprofils (Linien- und Flächenprofil) in diskreter Form als Array mit Index i , gilt für die Auslenkungen eines Punktes auf der Oberfläche in z -Richtung:

$$u_i = \sum_j m_{ij} p_j \quad (6.50)$$

Diese Formel kann in vektorieller Form auch geschrieben werden als:

$$\vec{u} = M \vec{p} \quad (6.51)$$

Hierbei kennzeichnet M die Influenz-Matrix und \vec{u} bzw. \vec{p} die Vektoren der Auslenkung und Kraft. Die Gleichungen (6.47) – (6.49) und (6.51) bilden die grundlegenden Formeln zur Beschreibung des Kontaktproblems und gelten sowohl für glatte als auch für raue Oberflächen. Die Lösung der Gleichung (6.51) führt zu einem Satz (Vektor) von Deformationen, welche die Kompatibilitätsbedingungen (6.47) und (6.48) erfüllen und zu einer Druckverteilung, die der Gleichgewichtsbedingung (6.49) gehorcht. Um dies zu erreichen, müssen diese Gleichungen für jedes Kontaktproblem spezifiziert und eine Technik gefunden werden, die eine Lösung ermöglicht.

6.2.1 Statistische Modelle

Ein oft verwendetes Modell ist der Ansatz von Greenwood und Williamson [35] (GW-Modell). Hier wird für die einzelnen Asphäritäten, die laut Ansatz zwar normalverteilte Höhenwerte, aber alle den gleichen Radius besitzen, das Hertz'sche Kontaktmodell verwendet. Für zwei sphärische Kontaktkörper mit Radius R , die um den Weg c komprimiert werden, kann die benötigte Kraft F_N bzw. die resultierende Kontaktfläche A wie folgt berechnet werden (rein elastischer Fall)

$$F_N = \frac{4E^*}{3} R^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} \quad (6.52)$$

$$A = \pi \cdot R \cdot c \quad (6.53)$$

Hierbei steht E^* für den kombinierten E-Modul

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (6.54)$$

Bei diesen statistischen Modellen (siehe auch [156][112][15][14][57]) gilt es abzuschätzen, welche Oberflächenerhebung bei gegebener Körperannäherung in Kontakt steht und eine Kompression erfährt. Hierbei wird die Verteilungsfunktion der Höhenwerte der Oberflächenerhebungen in Form einer Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi(z)$ angegeben. Falls die mittlere Distanz zweier rauer Oberflächen durch $\bar{d} = s_0 - c$ ausgedrückt wird, (hierbei steht s_0 für die anfängliche Kontakt-Separation und c für den Weg, den die beiden Körper zusammengeführt werden), dann ist jeder Punkt mit einer Höhenordinate größer als \bar{d} ein Kontaktpunkt. Für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Oberflächenerhebung einen Kontakt darstellt, gilt:

$$\Phi(z > \bar{d}) = \int_{\bar{d}}^{\infty} \varphi(z) dz \quad (6.55)$$

Die zu erwartende gesamte Kontaktbelastung ergibt sich aus der Integration über alle Kontaktkräfte der sich berührenden Oberflächenpunkte. Die wahre Kontaktfläche erhält man durch Summation über alle Hertz'schen Kontaktpunkte. Um die plastische Deformation von einzelnen Kontaktpots mit zu berücksichtigen, wurde in diesen Modellen ein so genannter Plastizitätsindex Ψ eingeführt. Nach dem GW-Modell errechnet sich dieser zu:

$$\psi = \frac{E}{(1-\nu^2) \cdot H} \cdot \left(\frac{\sigma^*}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.56)$$

Analog zu Whitehouse wird der Plastizitätsindex nach folgender Formel definiert:

$$\psi = \frac{E}{(1-\nu^2)H} \cdot \left(\frac{\sigma}{\beta} \right) \quad (6.57)$$

Hierbei bezeichnet H die Materialhärte. Die Variablen σ^* und σ stehen für die Standardabweichung des Oberflächenprofils. Der Superscript $*$ steht hier für die Normalverteilung. Beta steht für die Län-

ge, nach welcher die exponentielle Autokorrelationsfunktion auf 10% des Ursprungswertes abfällt (siehe Formel (6.25)). Gemäß dem GW-Modell kommt es bei einem Plastizitätsindex < 0.6 erst bei sehr hohen Kontaktbelastungen zu einer plastischen Deformation der einzelnen Kontaktpots. Bei Werten > 1.0 geschieht eine plastische Deformation bereits bei geringsten Kontaktkräften.

Diese Vorgehensweise setzt jedoch voraus, dass die Kontaktpunkte sich nicht gegenseitig beeinflussen. Auch ergibt sich gemäß dem GW-Modell, dass die mittlere Größe der Kontaktpots unabhängig von der Kontaktnormalkraft ist. Ein Oberflächenmaximum (Peak) wird in diesen Modellen als Punkt definiert, der höher als seine unmittelbaren Nachbarn ist. Williamson selbst jedoch widerlegt diese Definition [37]. Er schließt sich der Idee von Achard an, der eine raue Oberfläche analog zu einem Fraktal als Ausstülpung auf Ausstülpung auf Ausstülpung („Protuberance on Protuberance“) sieht. Bei fraktalen Oberflächen, die „Korcacs“ Gesetz folgen, ergibt sich eine unendlich hohe Anzahl von Mikro-Aspheritäten mit der Größe Null. Das GW-Modell ergibt deshalb ein falsches Bild hinsichtlich Anzahl der Kontaktpots und deren Krümmungsradius.

Die statistischen Modelle erlauben weder eine Aussage über die Spannungsverteilung unterhalb der Oberfläche, noch über die Deformation der Kontaktoberfläche. Auch ist es nicht möglich, Einflüsse auf Grund eines Schichtaufbaus in die Modelle mit einzubeziehen.

6.2.2 Direkte Matrixmultiplikation

Um ein Bild über die Deformation der gesamten Kontaktoberfläche zu bekommen, bieten sich die direkte Matrixmultiplikation bzw. die direkte Integralmethode an. Falls die Kontaktzone klein im Vergleich zum Gesamtkörper ist und die Oberflächensteigungen flach sind, kann mit dem Half-Space-Modell gerechnet werden. Hierbei kann (elastisch) die Boussinesq-Relation verwendet werden. Der Flament- bzw. Boussinesq-Ansatz wird oft zur Beschreibung zweidimensionaler und dreidimensionaler elastischer und perfekt plastischer Kontaktprobleme verwendet. Für einen Linienkontakt (plane strain) gilt [154][77][140]:

$$u_z(x) = -\frac{(1-\nu^2)}{2\pi E} \int_L p(x') \cdot \ln\left(\frac{x-x'}{x_r-x'}\right)^2 dx \quad (6.58)$$

Hierbei gibt x_r den Abstand zu einem Referenzpunkt an, der im Allg. (Koordinatenursprung) auch zu Null gesetzt werden kann. Analog zu Formel (6.58) kann für den dreidimensionalen Fall der Boussinesq-Cerruti-Formalismus verwendet werden [76][124][142][123][32][81].

$$u_z(x, y) = -\frac{(1-\nu^2)}{\pi \cdot E} \iint_A \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \quad (6.59)$$

Obige Gleichung kann im mathematischen Sinne als Faltung zwischen der Druckverteilung und einer Transferfunktion aufgefasst werden. Eine direkte Lösung der Gleichungen (6.47) – (6.49) und (6.51) für eine digitalisierte Oberfläche bietet die Technik der Matrixinvertierung. Diese Methode startet mit Gleichung (6.51), welche die Kraft-Deformation-Relation ausdrückt. Bevor die Gleichung gelöst werden kann, müssen die Influenzkoeffizienten durch eine analytische bzw. numerische Methode

bestimmt werden. Da sowohl die Kraftverteilung als auch die Verteilung der Berührungspunkte (wahre Kontaktfläche) unbekannt ist, ist ein iteratives Verfahren notwendig um hier zu einem Ergebnis zu gelangen. Hierbei geht man von einer definierten Strecke aus, um die zwei raue Oberflächen zusammengeführt werden (rigid body displacement), und startet mit einer geschätzten Kontaktfläche. In dieser Arbeit wird immer vom Hertz'schen Kontakt ausgegangen (Anhang 1) und die daraus resultierende elliptische Kontaktfläche angesetzt. Anschließend wird die resultierende Kraftverteilung durch Invertierung der Influenzmatrix aus Gleichung (6.51) ermittelt. Nachdem die Kraftverteilung im ersten Schritt berechnet wird, wird im zweiten Schritt mittels Gleichung (6.51) die Deformationen der einzelnen Oberflächenpunkte ermittelt. Elemente des Kraftvektors \vec{f} mit negativem Vorzeichen werden zu Null gesetzt, da keine Zugspannungen auf der Oberfläche erlaubt werden. Die Kraft- (Druck-) und Deformationsverteilung auf der Oberfläche werden so lange iterativ bestimmt, bis die Randbedingungen gemäß den Formeln (6.47) – (6.49) erfüllt sind. Alle Punkte mit positiver Kontaktkraft definieren dann die wahre Kontaktfläche. Diese Vorgehensweise wird unter anderem auch in [76][123][124][142][32][81][121] [128] und [155] angewendet.

Neben einigen Ansätzen, Gleichung (6.59) analytisch zu bestimmen [45], wird in der Literatur am meisten mit den Influenzkoeffizienten aus Gleichung (6.51) gerechnet. Die Bestimmung der Influenzkoeffizienten der Boussinesq-Cerruti-Formel erfolgt gemäß der Arbeit von Love [89] und kommt in einer Vielzahl von Veröffentlichungen zur Anwendung [62][140][28][79] [142][165]. Überzieht man eine Oberfläche mit einem diskreten Netz, wie in Abbildung 6.10 gezeigt, so kann eine auf der Oberfläche wirkende Druckverteilung wie folgt angenähert werden: Für jeden Maschenpunkt wird eine diskrete Kraft angesetzt, die auf einer Fläche der Größe $2a$ mal $2b$ wirkt und einen konstanten Wert besitzt. Das gestrichelte Quadrat in Abbildung 6.10 zeigt ein entsprechendes Flächenelement.

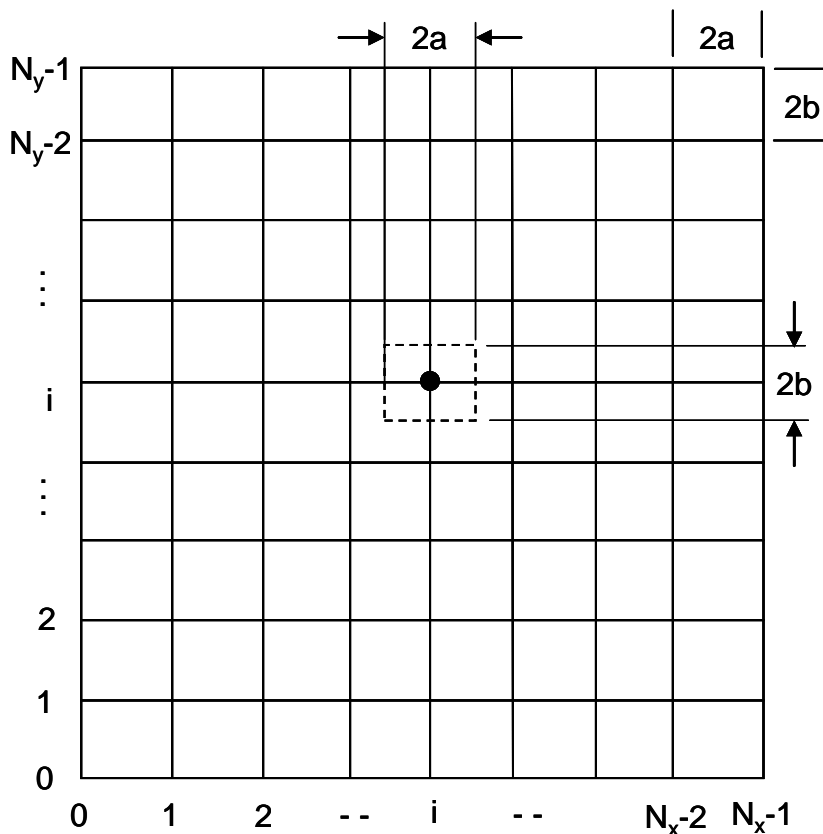


Abbildung 6.10: Diskretisierung einer digitalisierten Oberfläche

Für die Auslenkung eines Maschenpunktes im Abstand $\sqrt{x_k^2 + y_l^2}$ von einer Fläche konstanten Druckes der Größe $2a \times 2b$ ergibt sich:

$$u_z^p(x_k, y_l) = -\frac{(1-\nu^2)}{\pi \cdot E} \cdot p \int_{x_k-a}^{x_k+a} \int_{y_l-b}^{y_l+b} \frac{dx' dy'}{\sqrt{(x_k - x')^2 + (y_l - y')^2}} \quad (6.60)$$

Die Notation u^p soll symbolisieren, dass es sich hier um eine Auslenkung auf Grund einer punktuellen Belastung handelt. Für den Integralterm in obiger Gleichung ergeben sich gemäß Love [89] die Einflusskoeffizienten in der Form:

$$K_{i,j} = \frac{1}{\pi E} \left\{ \begin{aligned} & (x_i + a) \cdot \ln \left[\frac{(y_j + b) + \sqrt{(y_j + b)^2 + (x_i + a)^2}}{(y_j - b) + \sqrt{(y_j - b)^2 + (x_i + a)^2}} \right] \\ & + (y_j + b) \cdot \ln \left[\frac{(x_i + a) + \sqrt{(y_j + b)^2 + (x_i + a)^2}}{(x_i - a) + \sqrt{(y_j + b)^2 + (x_i - a)^2}} \right] \\ & + (x_i - a) \cdot \ln \left[\frac{(y_j - b) + \sqrt{(y_j - b)^2 + (x_i - a)^2}}{(y_j + b) + \sqrt{(y_j + b)^2 + (x_i - a)^2}} \right] \\ & + (y_j - b) \cdot \ln \left[\frac{(x_i - a) + \sqrt{(y_j - b)^2 + (x_i - a)^2}}{(x_i + a) + \sqrt{(y_j - b)^2 + (x_i + a)^2}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (6.61)$$

Einsetzen in Glg. (6.60) ergibt:

$$u_z^p(x_k, y_l) = -\frac{(1-\nu^2)}{\pi \cdot E} \cdot p \cdot K_{k,l} \quad (6.62)$$

Die Auslenkung eines beliebigen Maschenpunktes auf Grund einer beliebigen Druckverteilung ergibt sich denn durch Summation (Integration) über sämtliche Maschenpunkte.

$$u_z(x_k, y_l) = -\frac{(1-\nu^2)}{\pi \cdot E} \cdot \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} p_{i,j} K_{k-i, l-j} \quad (6.63)$$

Hierbei gilt $p_{i,j} = \text{const}$ im Bereich $2a \times 2b$. Beschreibt man die Deformationen und Druckverteilung nicht als Matrix, sondern als Vektor mit $N_x \times N_y$ Komponenten, so ergibt sich wieder eine Gleichung analog zu Glg. (6.51). Die obige Formel gestaltet sich in der Anwendung als sehr rechenintensiv. Für jeden Maschenpunkt muss die Doppelsummation durchgeführt werden. Des Weiteren ist bei den zu lösenden Aufgabenstellungen in der Kontaktp Physik sowohl die Deformation als auch die Druckverteilung auf der Oberfläche nicht bekannt. Häufig wird deshalb von dem so genannten „rigid body approach“ ausgegangen. Hierbei werden die Deformationen der Kontaktpunkte auf Grund der geometrischen Überlappung der beiden Kontaktkörper angenähert. Die dazu nötige Druckverteilung wird dann durch direkte Lösung von Glg. (6.63) bzw. (6.51) durch direkte Matrix-Inversion (Gauß'sche Eliminationsmethode [121]) ermittelt. Bei vorgegebener Kontaktnormalkraft (Glg: (6.49)) ergibt sich ein ite-

rativer Prozess. Druckwerte mit negativem Vorzeichen werden bei nachfolgenden Iterationsschritten gleich Null gesetzt, da Zugbelastungen physikalisch nicht erlaubt sind.

In [77] wird ein iterativer Algorithmus für den zweidimensionalen Belastungsfall (Linienkontakt → Flamant-Lsg.) ausführlich beschrieben. Ein Flussdiagramm für den dreidimensionalen Fall (gemessene Topographien) wird in [59] gegeben. Gleiche Vorgehensweisen sind in [124] [128] und [154] zu finden. Ist die Druckverteilung auf der Oberfläche bekannt, können die Spannungen im Innern des Festkörpers wie folgt berechnet werden.

$$\sigma_{mn}(x_k, y_l, z) = \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} [S_{k-1,j-1}^{mn}(z) + \mu \cdot T_{k-1,j-1}^{mn}(z)] \cdot p_{i,j} \quad (6.64)$$

Hierbei steht μ für den Reibkoeffizienten. Die Indizierung m und n kennzeichnet die Elemente des Spannungstensors. Die Influenzkoeffizienten ($S_{k-1,j-1}^{mn}(z)$ und $T_{k-1,j-1}^{mn}(z)$) in Glg. (6.64) ergeben die Spannungen auf Grund der Normalbeanspruchung p_{ij} bzw. Scherbeanspruchung $\mu \cdot p_{ij}$. Analytische Lösungen für die Influenzkoeffizienten sind in [63] zu finden.

Da die Doppelsummation bzw. die direkte Matrixmultiplikation sehr rechenintensiv ist, wurden mehrere Verfahren entwickelt, die hinsichtlich Speicherbedarf und Rechenleistung weniger aufwendig sind. Bei bekannter Druckverteilung, bzw. wenn die kontaktierenden Punkte bekannt sind, kann wie zum Beispiel von Mayeur [97] beschrieben, Speicherplatz eingespart werden, indem nur diese Punkte in die Rechnung mit einbezogen werden. Einige weitere Verfahren werden im Folgenden kurz skizziert.

6.2.3 Moving Grid Methode

Ren und Lee [123] entwickelten die Moving-Grid-Methode zur Lösung der Deformation rauer Kontaktflächen gemäß Glg. (6.63). Eine Adaptierung dieses Modells für den Fall zweier rauer Ebenen wird in [124] gegeben. Die Autoren verwenden zur Generierung der Influenzkoeffizienten nicht die Lösung von Love (Glg. (6.61)), sondern biquadratische Polynome analog zu Hou [45]. Das Ziel der Moving-Grid-Methode ist, den zur Simulation benötigten Speicherplatz zu minimieren. Die Autoren gehen davon aus, dass bei der direkten Matrixmethode gemäß Glg. (6.51) sämtliche Influenzkoeffizienten gespeichert werden. Bei einem Gitter mit N Maschenpunkten müssen daher N^2 Influenzkoeffizienten im RAM gehalten werden, was einen extrem großen Bedarf an Speicherplatz zur Folge hat. Dies ist jedoch nicht erforderlich, da die Influenzkoeffizienten während der Summation jeweils neu berechnet werden können, wodurch nur ein minimaler Speicherplatz benötigt wird. Weitere Angaben in der Originalliteratur [123] hinsichtlich Speicherbedarf können hier jedoch nicht nachvollzogen werden. Die Autoren geben die in Tabelle 6.3 aufgelisteten Rechenbeispiele vor:

Tabelle 6.3: Angabe des benötigten RAM Speichers gemäß Ren und Lee [123]

Anzahl Punkte in x- und y-Richtung	50	200
Anzahl Knoten	2500	40000
Speicherplatz bei 16Bit Genauigkeit	25 MByte	-
Speicherplatz bei 32Bit Genauigkeit	-	12,8 GByte

Für ein Gitter der Auflösung 200 x 200 Punkte sollte ein Speicherbedarf von $200 \times 200 \times 32 = 1,28$ GBit zugrunde gelegt werden. Das Rechenbeispiel $50 \times 50 \times 16 = 25$ MByte kann an dieser Stelle nicht nachvollzogen werden. Die Literaturangaben sind hierzu nicht stimmig.

Die Moving-Grid-Methode nutzt den Umstand aus, dass die Elemente der Influenzmatrix nur vom Abstand der Knotenpunkte, an welchem eine Kraft wirkt, und dem Knotenpunkt, an dem die dadurch hervorgerufene Deformation wirkt, abhängt. Laut [83] entsteht dadurch eine hohe Anzahl gleicher Werte der Influenzmatrix. Durch Reduzierung der Redundanzen reduziert sich daher der Speicherbedarf von der Größenordnung N^2 auf eine Größenordnung von N . Die Wirkungsweise der „Moving Grid“ Methode gestaltet sich jedoch anders. Es wird über das eigentliche Rechengitter ein Gitter von doppelter Ausdehnung in beiden Richtungen gelegt. Die graue Fläche in Abbildung 6.11 zeigt beispielhaft eine nominale Kontaktfläche, die in x- und y-Richtung jeweils eine Ausdehnung von 5 Gitterpunkten hat. Das größere Gitter besitzt mit 9×9 Gitterpunkten die vierfache Flächenausdehnung. Die Maschenzahl der größeren Fläche ist so gewählt, dass deren Mittelpunktsknoten, nach einer Verschiebung des großen Gitters, immer aus einem Maschenpunkt des Kontaktgitters (grau) zu liegen kommt. Die Kontaktbelastung außerhalb der nominalen Kontaktfläche ist per Definition immer Null und hat deshalb keinen Einfluss auf die Deformation.

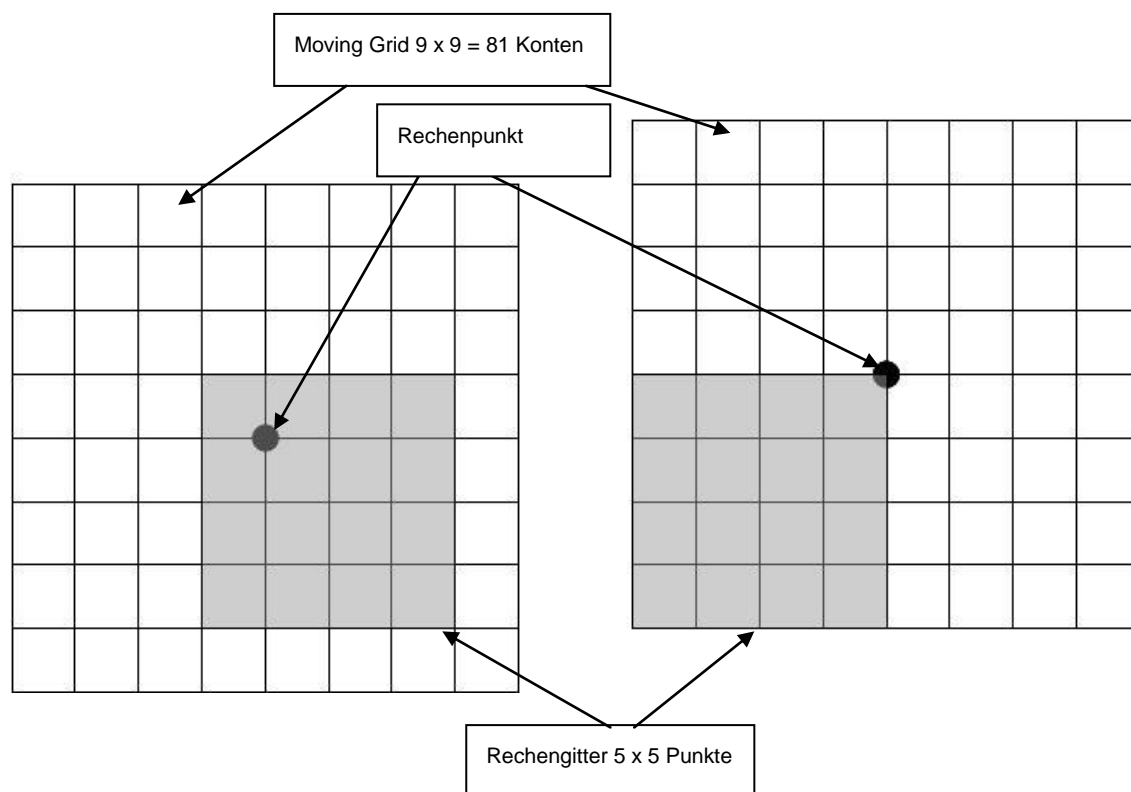


Abbildung 6.11.: Gitterstruktur bei der Moving-Grid-Methode am Beispiel eines 5 x 5 Punkte Rechengitters.

Die Deformationen werden nun immer im Zentrum der größeren Gitterfläche berechnet. Hierdurch bleiben die Influenzkoeffizienten unverändert und müssen nur einmal berechnet werden. Dadurch ergibt sich die Reduzierung des Speicherbedarfs um den Faktor $(2N)^2/N = 4N$. Eine weitere Reduzierung ergibt sich durch die symmetrische Form der Influenzkoeffizienten um den Flächenmittelpunkt, wodurch sich eine weitere Reduzierung des Speicherbedarfs um den Faktor 4 ergibt. In dieser Arbeit wurden diese Symmetrieüberlegungen nicht in den Programmcode übernommen. Zum einen wird hier

nur mit einfacher Floating-Point-Genauigkeit gerechnet, und zum anderen ist hierdurch eine bessere Lesbarkeit des Programm-Codes gegeben. Weiterhin werden die Influenzkoeffizienten gemäß Glg. (6.61) verwendet. Weiter führende Arbeiten der Autoren [80] erweiterten diese Methode auf die Lösung der Spannungsverteilung innerhalb des Kontaktkörpers (Glg. (6.64)). Da diese Methode jedoch nicht geeignet ist, Spannungen und Deformationen im Innern eines Mehrschichtsystems zu beschreiben, wird an dieser Stelle nicht weiter darauf eingegangen. Wie auch bei Nogi [110] folgerichtig erwähnt, kann mit der Moving-Grid-Methode der Speicherbedarf für die vorab berechneten Influenzkoeffizienten stark reduziert werden, die Anzahl der Rechenoperationen wird im Vergleich zur oben beschriebenen direkten Matrix-Methode nicht reduziert.

6.2.4 MLMS- und CG-Verfahren

Wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, ist die direkte Matrix-Methode bei den Auflösungen, die eine realistische Darstellung eines Kontaktpunktes erlauben, sehr rechenintensiv. Bei einer Auflösung von 256×256 Punkten ist 256^4 mal das Produkt aus Glg. (6.62) zu berechnen. Bei dem in dieser Arbeit verwendeten Laptop (Dell Precision M65) werden hierzu ~ 100 sec benötigt. Auf Grund der iterativen Bestimmung der Druckverteilung ist Glg. (6.63) je nach Konvergenzverhalten bis zu 100 mal zu berechnen. Im Folgenden wird ein Verfahren beschrieben, welches die Rechenzeit des obigen Beispiels ohne Einbußen an Genauigkeit um den Faktor 100 reduziert.

6.2.4.1 Die Multi-Level-Multi-Summation-Methode zur schnellen Berechnung der Oberflächendeformation unbeschichteter Kontakte.

In den ersten Arbeiten publizierte Brandt [11], die „**Mu**lit**L**evel/**Mu**lti**S**ummation“ (MLMS) Methode. Mittels dieser Methode reduziert sich die Anzahl der Berechnungsschritte der Doppelsumme in Glg. (6.63) von N^2 auf die Größenordnung $N \cdot \lg(N)^{20}$, was in etwa der oben erwähnten Reduzierung der Rechenzeit um den Faktor 100 entspricht. In den folgenden Arbeiten von Lubrecht [90] wurde diese Methode mit einem „**F**ull-**Mu**lti-**G**rid“ (FMG) Iterationsalgorithmus zur Bestimmung der Druckverteilung kombiniert. Der Nachteil dieser Methode äußert sich jedoch in dem Umstand, dass die Iteration bei sehr rauen Oberflächen schlecht oder gar nicht konvergiert. Polonsky [118][120] schlug deshalb ein alternatives Iterationsschema basierend auf der „conjugate gradient“ (CG) Methode vor. Der in dieser Arbeit entwickelte MLMS-Programm-Code basiert auf dem Buch von Venner und Lubrecht [146]. Der CG-Algorithmus wurde an Hand von [118] entwickelt. Wie in Abbildung 6.10 gezeigt, sind die zu berechneten Kontaktflächen in x/y-Richtung in äquidistante Gitter aufgeteilt. Eine gleiche Maschenweite in x- und y-Richtung ist nicht erforderlich. Im Vergleich zur Integralform der Boussinesq-Cerruti-Formel (6.60), ergibt sich bei der diskreten Form aus Glg. (6.63) ein so genannter Diskretisierungsfehler. Dieser Fehler liegt in der Größenordnung N^{-2} [118]. Beim Kontakt zweier Ober-

²⁰ Hier gilt Basis 10

flächen wird weiterhin davon ausgegangen, dass die Referenzebenen der Flächen zueinander ausgerichtet sind und die jeweiligen Maschenpunkte deckungsgleich zu liegen kommen. Als weitere Bedingung gilt, dass es bei der Deformation der Kontaktpartner nicht zu Reibungseffekten innerhalb der Kontaktflächen kommt. Dies ist dann gegeben, wenn beide Kontaktpartner die gleichen mechanischen Kennwerte besitzen, was bei den allermeisten Steckverbinderanwendungen gegeben ist. Durch den gegenseitigen Krafteintrag kommt es sowohl zu normalen Kompressionen der Kontaktpunkte als auch tangentialen Verschiebungen. Bei ungleichen mechanischen Parametern der Oberfläche kann es dadurch zu Verschiebungen der kontaktierenden Punkte quer zu Oberfläche kommen. Dieser Effekt ist jedoch bei dem geringen Verhältnis zwischen Kompressionen und Kontaktradius (Hertz) auch bei unterschiedlichen Kontaktoberflächen zu vernachlässigen [55].

Im Folgenden wird, wenn nicht explizit anders angegeben, immer mit einer kombinierten Topographie gerechnet. In Anlehnung an Abbildung 6.8 (Glg. (6.44)) ergibt sich für die Summe der individuellen Deformationen gemäß Glg. (6.63) folgende Formel:

$$u_{z_1}(x_k, y_l) + u_{z_2}(x_k, y_l) = - \left(\frac{(1-\nu_1^2)}{\pi \cdot E_1} + \frac{(1-\nu_2^2)}{\pi \cdot E_2} \right) \cdot \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} p_{i,j} K_{k-i, l-j} \quad (6.65)$$

Analoge Überlegungen wie bei den Bedingungen (6.47) und (6.48) führen zu den folgenden Gleichungen:

$$\left(\frac{(1-\nu_1^2)}{\pi \cdot E_1} + \frac{(1-\nu_2^2)}{\pi \cdot E_2} \right) \cdot \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} p_{i,j} K_{k-i, l-j} = z_{k,l} + c \quad (6.66)$$

für die individuellen Kontaktpunkte (Berührungspunkte) und

$$\left(\frac{(1-\nu_1^2)}{\pi \cdot E_1} + \frac{(1-\nu_2^2)}{\pi \cdot E_2} \right) \cdot \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} p_{i,j} K_{k-i, l-j} \geq z_{k,l} + c \quad (6.67)$$

im Bereich außerhalb der Kontaktpunkte. Wobei hier $p_{i,j} = 0$ gilt.

Die kombinierten z-Werte sind wie folgt indiziert:

$$z_{k,l} = z_1(x_k, y_l) + z_2(x_k, y_l) \quad (6.68)$$

Für die diskrete Form des Kräftegleichgewichtes gilt:

$$\Delta_x \Delta_y \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} p_{i,j} = F_N \quad (6.69)$$

Hierbei gilt $\Delta_x = 2a$ und $\Delta_y = 2b$. Im Folgenden soll der in dieser Arbeit verwendete MLMS-Algorithmus kurz skizziert werden. Die komplette Herleitung nebst mathematischer Beweisführung würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Hier sei auf das sehr gut geschriebene und ausführlich dargestellte Buch von Venner und Lubrecht [146] verwiesen.

Das Faltungsintegral der Glg. (6.59) lässt sich in folgender Form darstellen:

$$u_z(x, y) = - \iint_A K(x - x', y - y') \cdot p(x', y') dx' dy' \quad (6.70)$$

Hierbei steht A für die zu integrierende Kontaktfläche. Der Term $K(x-x', y-y')$ in obiger Gleichung soll in Anlehnung an die englische Literatur „Kernel“ des Integrals genannt werden. Unter der Bedingung, dass der Kernel in Glg. (6.70) eine Potentialform und eine nicht oszillierende (glatte) Verlaufsform besitzt, kann der MLMS-Algorithmus angewendet werden. Der Kernel der Glg. (6.70) hat mit $((x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2)^{-1/2}$ die geforderten Eigenschaften. Der Kernel besitzt bis auf die Singularität bei $K(0,0)$ einen stetigen Verlauf und wird in der Literatur als „Singular-Smooth-Kernel“ bezeichnet. Die Idee hinter dem Algorithmus ist die, dass eine Funktion, die keine oszillierende Form besitzt, durch wenige Interpolationspunkte angenähert werden kann. Dies ist gleichbedeutend damit, dass solche Funktionen auch in einem größeren Gitter ohne großen Genauigkeitsverlust dargestellt werden können. Die diskrete Form der Gleichung (6.70) ergibt:

$$u_{k,l}^f = \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} K_{k-i,l-j}^{ff} \cdot p_{i,j}^f \quad (6.71)$$

Diese Form ist gleichbedeutend mit Glg. (6.66) bzw. Glg. (6.67). Der Index f steht hier für „Fein“-Gitter. Die Vergrößerung der Rechengitter erfolgt immer in der Art, dass die Maschenweite um den Faktor 2 in der Form $\Delta_x^g = 2\Delta_x^f$ bzw. $\Delta_y^g = 2\Delta_y^f$ vergrößert wird. Der Index g steht hier für „Grob“-Gitter. Die jeweiligen Grobgitter werden mit dem jeweils feineren Gitter so ausgerichtet, dass z.B. $x_{2i}^f = x_i^g$ gegeben ist. Die Transformation der Werte von einem feineren Gitter hin zu einem größeren Gitter wird für den eindimensionalen Fall an Hand Abbildung 6.12 bzw. Abbildung 6.13 verdeutlicht. Abbildung 6.12 zeigt eine Transformation der Feingitterwerte mittels eines Transformationsoperators 2ter Ordnung (engl. Stencil).

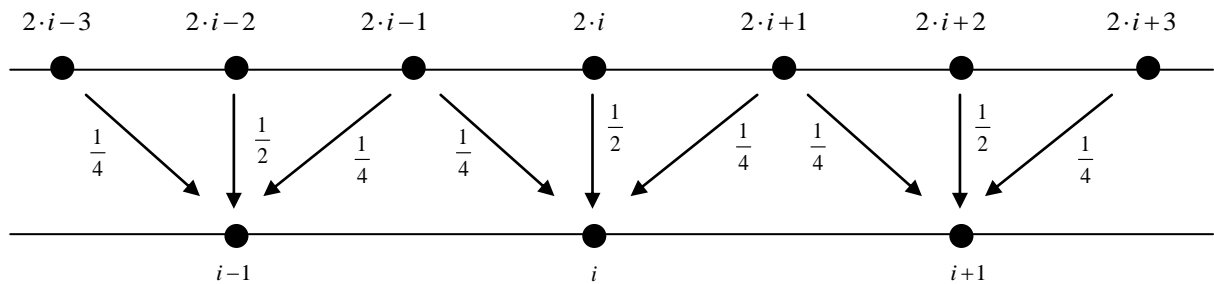


Abbildung 6.12: Transformation hin zu größerem Gitter; Transformationsoperator 2ter Ordnung; eindimensionaler Fall

Hierbei werden Funktionswerte wie folgt transformiert:

$$u_i^g \leftarrow \frac{1}{2} \frac{1}{2} (1 \cdot u_{2i-1}^f + 2 \cdot u_{2i}^f + 1 \cdot u_{2i+1}^f) \quad (6.72)$$

In der Literatur findet man hierfür die Schreibweise

$$u^g \equiv \Pi_f^g u^f = \left(\frac{\Delta^f}{\Delta^g} \right)^{-d} (\Pi_g^f)^T u^f \quad (6.73)$$

Hierbei steht Π_f^g für den Transformationsoperator von einem feinen hin zu einem groben Gitter., wobei dieser Operator auch als die Transponierte des Operators Π_g^f geschrieben werden kann, welcher die Transformation von grobem zu feinem Gitter repräsentiert. Δ^f bzw. Δ^g symbolisieren die Maschenweite der jeweiligen Gitter. Der Exponent d steht hier für die Dimension der Transformation. Die Dimension ist hier nicht mit der Dimension des Gitters zu verwechseln. Ein zweidimensionales Gitter kann über eine Transformation mit Dimension 2 in ein gröberes Gitter überführt werden und umgekehrt. Das Gleiche kann jedoch auch durch zwei hintereinander folgende Transformationen in x- und y-Richtung erfolgen. Der Transformationsoperator 2ter Ordnung hat die Form.

$$\Pi_g^f \equiv \frac{1}{2} [1, 2, 1] \quad (6.74)$$

Eine Transformation von einem feinen zu einem groben Gitter 4ter Ordnung wird zur weiteren Verdeutlichung in Abbildung 6.13 gezeigt. Die darin angezeigten Zahlenwerte beziehen sich nur auf die durchgezogenen Linien. Die Transformation hat folgende Form:

$$u_i^g \leftarrow \frac{1}{2} \frac{1}{16} (-1 \cdot u_{2i-3}^f + 0 \cdot u_{2i-2}^f + 9 \cdot u_{2i-1}^f + 16 \cdot u_{2i}^f + 9 \cdot u_{2i+1}^f + 0 \cdot u_{2i+2}^f + -1 \cdot u_{2i+3}^f) \quad (6.75)$$

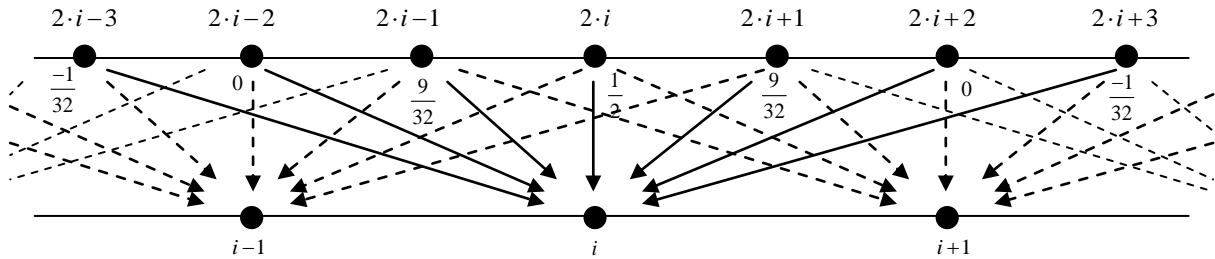


Abbildung 6.13: Transformation hin zu größerem Gitter; Transformationsoperator 4ter Ordnung; eindimensionaler Fall

Der Transformationsoperator ergibt sich zu:

$$\Pi_g^f \equiv \frac{1}{16} [-1, 0, 9, 16, 9, 0, -1] \quad (6.76)$$

Der in dieser Arbeit verwendete Transformationsoperator 6ter Ordnung hat die Form:

$$\Pi_g^f \equiv \frac{1}{256} [3, 0, -25, 0, 150, 256, 150, 0, -25, 0, 3] \quad (6.77)$$

Allgemein können die Komponenten des Transformationsoperators gemäß [118] folgende Formel angegeben werden:

$$\begin{aligned}
\Pi_{g_i}^{f\kappa} &= \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{2\sigma} \left(\frac{2(t-k)+1}{2(i-k)} \right) ; i \text{ ungerade} \\
\Pi_{g_{2\sigma}}^{f\kappa} &= 1 \\
\Pi_{g_i}^{f\kappa} &= 0 ; i \text{ gerade}
\end{aligned} \tag{6.78}$$

Hierbei indiziert κ die Ordnung des Transformationsoperators. Der Index i läuft 1 bis κ .

In Abbildung 6.14 wird die Rücktransformation von einem groben hin zu einem feineren Gitter beispielhaft an Hand einer Transformation 2ter Ordnung im eindimensionalen Fall gezeigt.

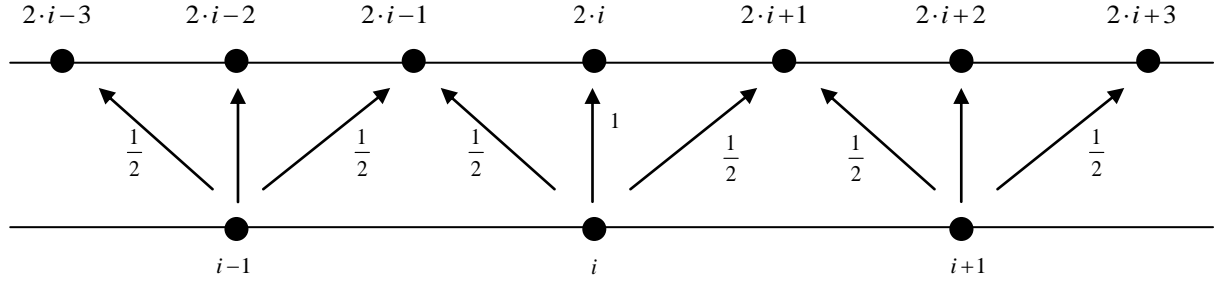


Abbildung 6.14: Transformation hin zu größerem Gitter; Transformationsoperator 2ter Ordnung; eindimensionaler Fall

Anwendung des Transformationsoperators Π_g^f gemäß:

$$u^f \equiv \Pi_g^f u^g \tag{6.79}$$

Ergibt für das feinere Gitter folgende Erzeugungsvorschrift:

$$\begin{aligned}
u_{2i}^f &= u_i^g & 0 \leq i \leq N_i/2 & \text{ ; für geradzahligen Index} \\
u_{2i+1}^f &= (u_i^g + u_{i+1}^g) / 2 & 0 \leq i < N_i/2 & \text{ ; für ungeraden Index}
\end{aligned} \tag{6.80}$$

Der Transformationsoperator hat die Form wie in Glg. (6.74) angegeben. Die Dimension der jeweils größeren Gitter errechnet sich aus dem jeweils feineren Gitter gemäß folgenden Formeln:

$$N_x^{g^{level}} = \frac{N_x}{2^{level}} + 2 \cdot (\kappa - 2) - 1 \text{ bzw. } N_y^{g^{level}} = \frac{N_y}{2^{level}} + 2 \cdot (\kappa - 2) - 1 \tag{6.81}$$

$$N_x^{g^0} = N_x^f \tag{6.82}$$

Die Indizierung „level“ markiert die Anzahl der Vergrößerungsschritte. Level 0 entspricht dem Ausgangsgitter. Der Term $2(\kappa-2)$ wurde eingeführt, um auch an den Rändern der jeweiligen Gitter den gleichen Transformationsoperator anwenden zu können, wie auch in den inneren Punkten des jeweiligen Gitters. Je nach Ordnung des Transformationsoperators entstehen dadurch an den Rändern der groben Gitter so genannte „Ghost Points“. Wie in Abbildung 6.15 bis Abbildung 6.17 dargestellt, ergeben sich für einen Transformationsoperator 2ter Ordnung keine „Ghost Points“. Für einen Operator 4ter Ordnung ergeben sich 2 „Ghost Points“ und für einen Operator 6ter Ordnung jeweils 4 „Ghost Points“ an den Gitterrändern.

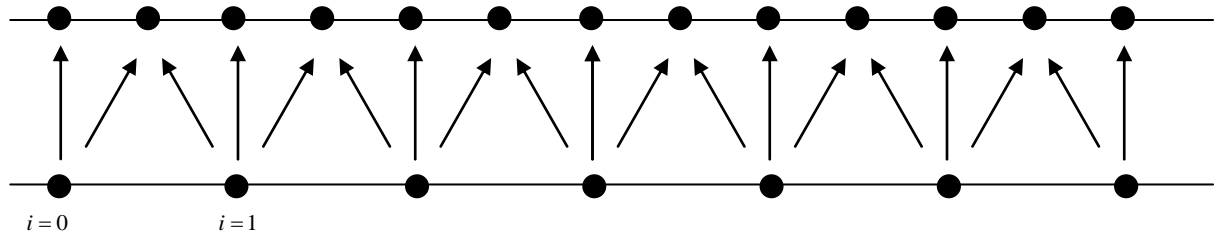


Abbildung 6.15: Interpolation 2ter Ordnung ohne „Ghost Points“

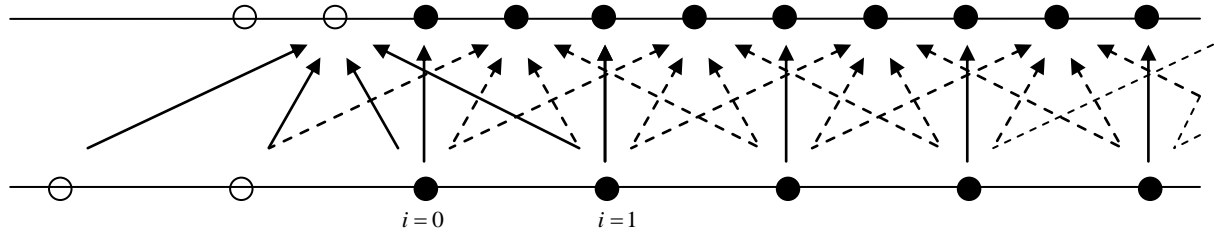


Abbildung 6.16: Interpolation 4ter Ordnung mit 2 „Ghost Points“

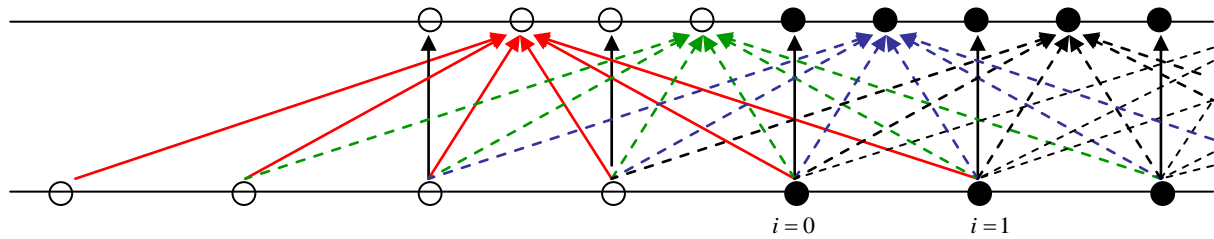


Abbildung 6.17: Interpolation 6ter Ordnung mit 4 „Ghost Points“

Die Wirkungsweise des MLMS-Algorithmus wird an Hand des eindimensionalen Falles dargestellt. Die eindimensionale Form des Faltungsintegrals kann in diskreter Form wie folgt geschrieben werden:

$$u^f(x_k^f) = u_k^f \equiv \int_A K(x_k^f, y) \cdot \tilde{p}^f(y) dy = \Delta^f \sum_{j=0}^{N_k-1} K_{k,j}^{ff} \cdot p_j^f \quad (6.83)$$

Der Term \tilde{p}^f sei eine stückweise Polynomfunktion vom Grade $2s-1$. Der Koeffizient Δ^f wurde eingeführt, damit unabhängig von der Maschenweite von feinem und grobem Gitter sich gleiche Größenordnungen für K^{ff} und p^f ergeben. Durch die diskrete Form des Faltungsintegrals ergibt sich ein Rundungsfehler, der wie folgt [146] angegeben werden kann:

$$|\tau^f| = \Delta^{2s} |K| \cdot |p^{(2s)}| \quad (6.84)$$

$|K|$ kennzeichnet hier den Mittelwert der Betragswerte von K^{ff} über den Integrationsbereich. Der Term $|p^{(2s)}|$ steht hier für das Maximum der $2s$ -ten Ableitung von p .

Bei einer Transformation zu einem nächst größeren Gitter wird nachfolgend davon ausgegangen, dass sich die Maschenweite jeweils verdoppelt ($\Delta^g = 2\Delta^f$).

Um zu symbolisieren ob, eine Indizierung sich auf einen Indexwert des gröberen oder feineren Gitters bezieht, werden Indexwerte des Grobgitters in Großbuchstaben angegeben. Es wird davon ausgegangen, dass wie oben erwähnt die groben zu den feinen Gittern so ausgerichtet sind, dass sich die Maschenpunkte mit geradzahlgiger Indizierung decken.

Für diese Punkte gilt nach folgender Definition:

$$K_{k,J}^{fg} \equiv K_{k,2J}^{ff} \quad (6.85)$$

Des Weiteren kann gemäß der Definitionsgleichung (6.73) der Kernel des feinen Gitters als ein aus einem groben Gitter interpolierter Kernel angenähert werden (siehe auch Abbildung 6.16).

$$K_{k,j}^{ff} \cong \tilde{K}_{k,j}^{ff} + O(\varepsilon) = \left[\Pi_g^f K_{k,}^{fg} \right]_j + O(\varepsilon) \quad (6.86)$$

Der Fehler $O(\varepsilon)$ ergibt sich zu:

$$O(\varepsilon) = \Delta^f \sum_j \left(K_{k,j}^{ff} - \tilde{K}_{k,j}^{ff} \right) \cdot p_j^f \quad (6.87)$$

Eingesetzt in Glg. (6.83) kann u_k^f ($k=2K$) wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} u_k^f &= \Delta^f \sum_j K_{k,j}^{ff} \cdot p_j^f = \Delta^f \sum_j \tilde{K}_{k,j}^{ff} \cdot p_j^f + O(\varepsilon) \\ &= \Delta^f \sum_j \left[\Pi_g^f K_{k,}^{fg} \right]_j \cdot p_j^f + O(\varepsilon) = \Delta^f \sum_J K_{k,J}^{fg} \left[\left(\Pi_g^f \right)^T p^f \right] + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (6.88)$$

Verwendung von Glg. (6.73) und Glg. (6.87) ergibt:

$$\begin{aligned} u_k^f &= \Delta^f \cdot \left(\frac{\Delta^g}{\Delta^f} \right)^1 \cdot \sum_J K_{k,J}^{fg} \cdot p_J^g + O(\varepsilon) \\ &= u_K^g + \Delta^f \sum_j \left(K_{k,j}^{ff} - \tilde{K}_{k,j}^{ff} \right) \cdot p_j^f \end{aligned} \quad (6.89)$$

Somit stellt sich der gesuchte Integralwert des feinen Gitters als Integralwert der Grobgitterlösung plus einem Korrekturwert dar. Da der Summand des Korrekturwertes dem Index des feinen Gitters entspricht, ist somit noch keine Reduzierung der Anzahl an Rechenoperationen gegeben. Weil der hier gegebene Kernel (siehe Glg. (6.70)) einen glatten Funktionsverlauf besitzt und nur an den Stellen gleichen Index eine Singularität besitzt, muss die Summation des Korrekturterms in Glg. (6.87) nicht über den gesamten Bereich durchgeführt werden. Für große Werte von $|k-j|$ ergibt sich $K_{k,j}^{ff} - \tilde{K}_{k,j}^{ff} \rightarrow 0$. Für die Korrekturterme gilt:

$$K_{k,j}^{ff} - \tilde{K}_{k,j}^{ff} = \begin{cases} 0; & \text{für } j = 2J \\ O\left(\Delta^{f\kappa} K^{(\kappa)}(\xi)\right) & \text{für } j \neq 2J \end{cases} \quad (6.90)$$

Der Term $K^{(\kappa)}$ kennzeichnet die κ -te Ableitung an einem Zwischenpunkt. Durch die Potentialform des Kernel's wird der Wert der Ableitung schnell sehr klein und der Korrekturterm kann vernachlässigt werden. An Stellen mit $j \cong J$ gilt dies nicht mehr. Aus diesen Überlegungen folgt jedoch, dass die

Summation der Korrekturterme in Glg. (6.89) nur in der Umgebung der entsprechenden Gitterpunkte durchgeführt werden muss. Hierdurch kann Glg. (6.89) wie folgt umgeschrieben werden:

$$u_k^f \cong \tilde{u}_k^g = u_k^g + \Delta^f \sum_{|k-j| \leq m} (K_{k,j}^{ff} - \tilde{K}_{k,j}^{ff}) \cdot p_j^f \quad ; k = 2K \quad (6.91)$$

Der Ausdruck \tilde{u}_k^g steht für den korrigierten Grobgitterwert in der Nähe der Singularität, der wiederum in das Feingitter zurück geschrieben wird. Für Maschenpunkte k des feinen Gitters, die nicht mit den Grobgitterpunkten (Index $2K$) übereinstimmen (ungeradzahlige Indizes $k=2K+1$; siehe auch Abbildung 6.17), ergibt mit der Einführung eines interpolierten Kernels gemäß folgender Definition (Interpolation bezüglich Index k):

$$\hat{K}_{k,j}^{ff} = \left[\prod_g^f K_j^{gf} \right]_k \quad (6.92)$$

was gleichbedeutend mit einer Interpolation hinsichtlich der Indexvariable k ist. In Analogie zu Glg. (6.85) gilt:

$$K_{k,J}^{gf} \equiv K_{2K,J}^{ff} \quad (6.93)$$

Einsetzen in Glg. (6.83) ergibt:

$$\begin{aligned} u_k^f &= \Delta^f \sum_j K_{k,j}^{ff} \cdot p_j^f = \Delta^f \sum_j \hat{K}_{k,j}^{ff} \cdot p_j^f + O(\varepsilon) \\ &= \Delta^f \sum_j \left[\prod_g^f K_j^{gf} \right]_k \cdot p_j^f + O(\varepsilon) \\ &= \left[\prod_g^f u^g \right]_k + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (6.94)$$

Hierbei steht $\left[\prod_g^f u^g \right]_k$ für die Interpolation des Feingitterwertes durch mehrere Grobgitterwerte mittels eines Transformationsoperators. Der sich ergebende Korrekturterm hat die gleiche Form wie (6.90). Da die Interpolation jedoch nach dem Index k erfolgt, gilt diese für alle Indizes j .

$$K_{k,j}^{ff} - \hat{K}_{k,j}^{ff} = O\left(\Delta^{f2o} K^{(2o)}(\xi)\right) \quad \text{für } k \neq 2K; \text{ alle } j \quad (6.95)$$

Somit gilt:

$$u_k^f = \left[\prod_g^f u^g \right]_k + \Delta^f \sum_j (K_{k,j}^{ff} - \hat{K}_{k,j}^{ff}) \cdot p_j^f \quad \text{für } k = 2K + 1 \quad (6.96)$$

Die oben aufgeführten Herleitungen wurden am Beispiel eines eindimensionalen Gitters erläutert. Eine Transformation von einem feinen Gitter in ein vergrößertes Gitter für den zweidimensionalen Fall wird ein gleicher Weise durchgeführt. Statt Transformationsoperatoren zu definieren, die direkt auf zweidimensionale Gitter wirken, wird die Vergrößerung bzw. Verfeinerung in zwei aufeinander folgenden Schritten durchgeführt. Abbildung 6.18 zeigt die prinzipielle Vorgehensweise an Hand einer Gittervergrößerung. In einem ersten Schritt erfolgt die Vergrößerung bzgl. des Index i , gemäß Definitionsgleichung (6.73). In einem weiteren Schritt erfolgt die Transformation bzgl. Index j . Die Anzahl Gitterpunkte reduziert sich gemäß Glg. (6.81). Es ist zu beachten, dass die in Abbildung 6.18 gezeigten Gitter, keine „Ghost Points“ enthalten.

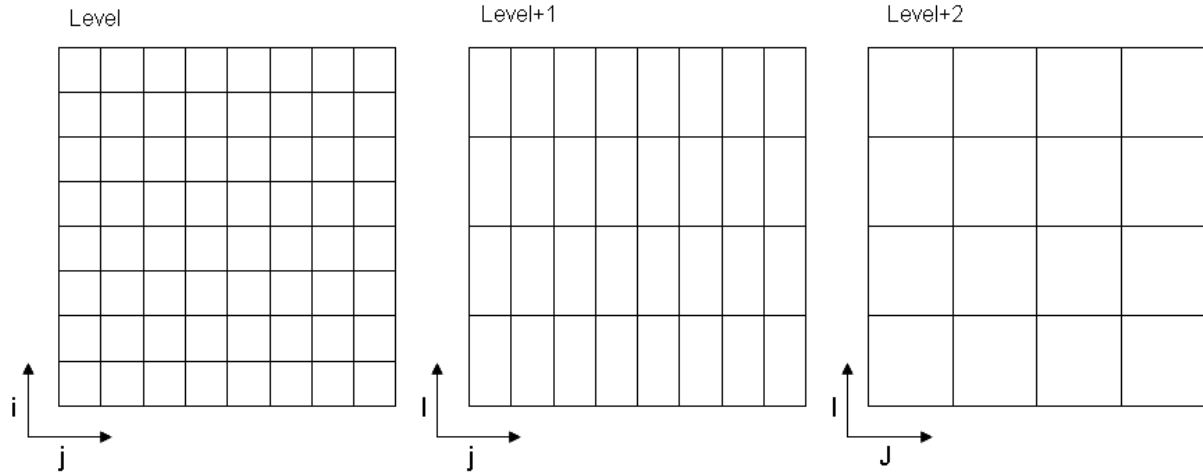


Abbildung 6.18: Vergrößerung eines zweidimensionalen Gitters (Level) in zwei Stufen; (Level+1) bzgl. Index i; (Level+2) bzgl. Index j (Großbuchstaben stehen für die Indizierung im Grobgitter)

Im Folgenden wird hier in vereinfachter Form der dieser Arbeit zugrunde liegende Algorithmus skizziert. Der Übersichtlichkeit halber wird auf die explizite Angabe der „Ghost Points“ verzichtet.

Die maximale Anzahl an Vergrößerungen ergibt sich aus der Anzahl der Maschenpunkte des feinsten Gitters nach folgender Ungleichung:

$$\frac{N_{x/y}}{2^{Maxlevel}} \geq 4; \quad N_{x/y} = \max(N_x, N_y) \quad (6.97)$$

Wegen der sukzessiven Vergrößerung in x- und y-Richtung gilt:

$$Maxlevel \leftarrow 2 \cdot Maxlevel \quad (6.98)$$

Die Berechnung der Grobgitterwerte des Kernels nach Glg. (6.61) und der vorgegebenen, iterativ zu bestimmenden Druckverteilung erfolgt gemäß:

$$\begin{aligned} K_{level,I,j} &= 2 \cdot K_{level-1,2I,j}; \quad level = 1,3,...,Maxlevel-1 \\ K_{level,I,J} &= 2 \cdot K_{level-1,I,2J}; \quad level = 2,4,...,Maxlevel \end{aligned} \quad (6.99)$$

Die Terme $x_i + a$, $x_i - a$, $y_j + b$ und $y_j - b$ in (6.61) werden wie folgt substituiert:

$$\begin{aligned} x_i + a &= xp_{level,i} = (i + 0.5) \cdot \Delta_x \cdot level; & i &= 0,1..N_x^{g \cdot level/2} \\ x_i - a &= xm_{level,i} = xp_{level,i} - \Delta_x \cdot level; & i &= 0,1..N_x^{g \cdot level/2} \\ y_j + b &= yp_{level,i} = (j + 0.5) \cdot \Delta_y \cdot level; & j &= 0,1..N_y^{g \cdot level/2} \\ y_j - b &= ym_{level,i} = yp_{level,j} - \Delta_y \cdot level; & j &= 0,1..N_y^{g \cdot level/2} \end{aligned} \quad (6.100)$$

Hierbei stehen Δ_x bzw. Δ_y für die Maschenweiten des Ursprungsgitters. Die Kleinbuchstaben p und m weisen auf die Subtraktion bzw. Addition an der linken Seite der Formeln (6.100) hin. Die Grobwerte der Druckverteilung ergeben sich wie folgt.

$$\begin{aligned}
p_{level,I,j} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2\kappa-1} \prod_{g,k}^{f,\kappa} p_{level-1,2i-\kappa+k,j}; \quad level = 1,3..Maxlevel \\
p_{level,I,J} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2\kappa-1} \prod_{g,k}^{f,\kappa} p_{level-1,I,2i-\kappa+k}; \quad level = 2,4..Maxlevel
\end{aligned} \tag{6.101}$$

Die eigentliche Berechnung des Faltungsintegrals erfolgt an Hand des gröbsten Gitters:

$$u_{\max level,I,J} = \sum_{k=1}^{N_x^{Maxlevel}} \sum_{l=1}^{N_y^{Maxlevel}} K_{Maxlevel,|I-k|,|J-l|} p_{Maxlevel,k,l} \tag{6.102}$$

Die Rücktransformation in die jeweils feineren Gitterstufen wird in folgenden Schritten durchgeführt. In einem ersten Schritt werden die Maschenpunkte mit geradzahligem Index gemäß Glg. (6.89) interpoliert. Der Korrekturterm aus Glg. (6.90) ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
K_{level,i,j}^{ff} - \tilde{K}_{level,i,j}^{ff} &= K_{level,i,j} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \kappa}}^{2\kappa-1} \prod_{g,k}^{f,\kappa} K_{level,|i-\kappa+k|,j}; \quad level \text{ ungerade}; i \text{ gerade} \\
K_{level,i,j}^{ff} - \tilde{K}_{level,i,j}^{ff} &= K_{level,i,j} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \kappa}}^{2\kappa-1} \prod_{g,k}^{f,\kappa} K_{level,i,|j-\kappa+k|}; \quad level, j \text{ gerade}
\end{aligned} \tag{6.103}$$

Eingesetzt in Glg. (6.89) ergibt für die Verfeinerung hinsichtlich gerader Index i Werte:

$$\begin{aligned}
u_{level,2I,j} &= u_{level-1,i,j} \\
&+ \sum_{m1=2I-M1}^{2I+M1} \sum_{m2=j+M2}^{j+M2} \left(K_{level,|2I-m1|,|j-m2|} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \kappa}}^{2\kappa-1} \prod_{g,k}^{f,\kappa} K_{level,|2I-\kappa+k-m1|,|j-m2|} \right) \cdot p_{level,m1,m2}
\end{aligned} \tag{6.104}$$

Diese Operation wird in der Literatur normalerweise mit „Coarse-Grid-Correction“ bezeichnet. Die Anzahl der Korrekturterme M1 und M2 wird analog [146] gewählt. Die Anzahl der Korrekturterme in Interpolationsrichtung errechnet sich zu:

$$M1 = 3 + \ln(N); \quad N = \max(N_x, N_y) \tag{6.105}$$

Die Anzahl der Interpolationsterme senkrecht zur Interpolationsrichtung wird als Konstante definiert:

$$M2 = 2 \tag{6.106}$$

Die Maschenpunkte des feineren Gitters mit ungeraden Indexwerten werden gemäß Glg. (6.96) interpoliert. Die Korrekturterme errechnen sich analog zu Glg. (6.103).

$$\begin{aligned}
K_{level,i,j}^{ff} - \hat{K}_{level,i,j}^{ff} &= K_{level,i,j} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2o}}^{2\kappa-1} \prod_{g,k}^{f,\kappa} K_{level,|i-\kappa+k|,j}; \quad level, i \text{ ungerade} \\
K_{level,i,j}^{ff} - \hat{K}_{level,i,j}^{ff} &= K_{level,i,j} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2o}}^{2\kappa-1} \prod_{g,k}^{f,\kappa} K_{level,i,|j-\kappa+k|}; \quad level \text{ ungerade}, j \text{ gerade}
\end{aligned} \tag{6.107}$$

Einsetzen in Glg. (6.96) ergibt für die Verfeinerung der ungeraden Indizes in i-Richtung:

$$\begin{aligned}
u_{level, 2I+1, j} &= \sum_{k=1}^{\kappa} \prod_{g, k}^{f, \kappa} u_{level, -1, I-o+k, j} \\
&+ \sum_{m1:=2i-M1}^{2i+M1} \sum_{m2:=j+M2}^{j+M2} \left(K_{level, |2I+1-m1|, |j-m2|} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \kappa}}^{2\kappa-1} \prod_{g, k}^{f, \kappa} K_{level, |2i-\kappa+k-m1+1|, |j-m2|} \right) \cdot p_{level, m1, m2}
\end{aligned} \quad (6.108)$$

Die sukzessive Verfeinerung hinsichtlich Index j erfolgt analog. Für gerade Indizes gilt:

$$\begin{aligned}
u_{level+1, i, 2J} &= u_{level, i, j} \\
&+ \sum_{m2:=i-M2}^{i+M2} \sum_{m1:=2J+M1}^{2J+M1} \left(K_{level+1, |i-m2|, |2J-m1|} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \kappa}}^{2\kappa-1} \prod_{g, k}^{f, \kappa} K_{level+1, |i-m2|, |2J-\kappa+k-m2|} \right) \cdot p_{level+1, m2, m1}
\end{aligned} \quad (6.109)$$

$$\begin{aligned}
u_{level+1, i, 2J+1} &= \sum_{k=1}^{\kappa} \prod_{g, k}^{f, \kappa} u_{level, i, J-o+k} \\
&+ \sum_{m2:=i-M2}^{i+M2} \sum_{m1:=2J+M1}^{2J+M1} \left(K_{level+1, |i-m2|, |2J+1-m1|} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \kappa}}^{2\kappa-1} \prod_{g, k}^{f, \kappa} K_{level+1, |i-m2|, |2J-\kappa+k-m2+1|} \right) \cdot p_{level+1, m2, m1}
\end{aligned} \quad (6.110)$$

Durch die MLMS-Methode ist ein geschwindigkeitsoptimierter Algorithmus gegeben, mit welchem sich die Deformation in z-Richtung an der Kontaktoberfläche bei einer gegebenen Druckverteilung berechnen lässt. In der Praxis zeigten sich bei einer lateralen Auflösung von 128 x 128 Punkten um den Faktor 100 kürzere Rechenzeiten als bei der direkten Matrixmethode. Die Druckverteilung ist, wie bereits in Abschnitt 6.2.2 erwähnt, normalerweise nicht vorab bekannt, sondern muss iterativ bestimmt werden. Die parallel zu den MLMS-Verfahren aufgeführten Full-Multigrid-Verfahren (FMG) [90][146] erlauben zwar eine iterative Bestimmung der Druckverteilung mit ähnlich schneller Performance wie das MLMS-Verfahren. Bei den FMG wird genau wie bei den MLMS-Verfahren das lineare Gleichungssystem (Matrixinversion) aus Glg. (6.51) bzw. Glg. (6.63) an Hand des größten Gitters gelöst (Gaus-Seidel-Relaxation) und über mehrere Interpolationszyklen und Korrekturzyklen (W-Zyklus) wieder in das feine Gitter überführt. Die FMG-Methode konvergiert jedoch nicht bei sehr rauen Oberflächen. Des Weiteren sind diese Algorithmen auf unbeschichtete Kontaktkörper beschränkt. Eine ausführliche Herleitung und Beschreibung dieses Verfahrens ist in [146] gegeben. Bevor jedoch auf den in dieser Arbeit verwendeten Algorithmus zur Bestimmung der Druckverteilung an der Kontaktoberfläche eingegangen wird, wird zuerst auf die Simulation der plastischen Deformation der einzelnen Mikro-Kontaktpunkte eingegangen.

6.2.4.2 Annäherung der plastischen Deformation zweier rauer Oberflächen

Abbildung 6.19 zeigt die in der Literatur häufig herangezogenen Definitionen für das plastische Verhalten kontaktierender Körper. Der einfachste und am meisten in der Literatur betrachtete Fall wird als perfekt plastisch bezeichnet. Hierbei wird die punktuelle Druckbelastung ab dem Erreichen eines bestimmten Wertes konstant belassen [142][73][16][153][152][162][93]. Der Beginn der plastischen Deformation wird ab einem Spannungswert angenommen, der dem 2,8-fachen [60][16] bzw. 3-fachen

[49][56] der maximalen Streckgrenze (Yield strength) entspricht. Dieser Wert wird auch mit der Härte des Materials gleichgesetzt.

$$H^{eff}(p_{k,l}) = const \cdot Y \quad (6.111)$$

Eine weitere Kompression der beiden Kontaktkörper führt an diesen Punkten zu einer entsprechenden Zunahme der Deformation, ohne einen weiteren Spannungsaufbau zu bewirken. Ein völliges Wegfließen dieser Oberflächenpunkte wird dadurch verhindert, dass umliegende Punkte zusätzlich in Kontakt treten, was letztendlich zur Erfüllung der Randbedingung gemäß Glg. (6.69) führt.

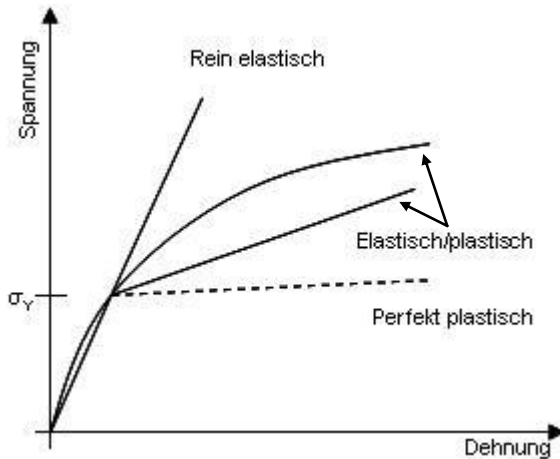


Abbildung 6.19: Beschreibung des plastischen Verhaltens

Den Effekt des Spannungshärtens, das speziell bei den Bronzelegierungen beobachtet wird, kann durch einen weiter linear steigenden Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie angenähert werden [85] (elastisch/plastisch). Häufiger werden jedoch Spannungs-Dehnungs-Kennlinien verwendet, die eine exponentielle Form aufweisen [109][25]. Gonzales [25] nähert die Kennlinie z.B. durch folgende einfache Exponentialform an:

$$\sigma_Y = const \cdot \varepsilon^n \quad (6.112)$$

Die Konstante in dem in [25] diskutierten Fall wird mit 400 MPa angegeben. Der Exponent n liegt zwischen 0 und 0,04. Im Falle sphärischer Kontakte gibt Jeng [53] eine logarithmisch angenäherte Kennlinie an.

$$\sigma_Y = const_1 + const_2 \cdot \ln\left(\frac{z_{Asph} - c}{r}\right) \quad (6.113)$$

Der Ausdruck z_{Asph} kennzeichnet hier die ursprüngliche Höhe des deformierten Kontaktpunktes. Der Kontaktradius wird durch r gekennzeichnet. Die Kompression des Kontaktpunktes wird durch c symbolisiert. Die Konstanten sind für die jeweilige Kontaktpaarung zu bestimmen. In dieser Arbeit wird unter anderem eine exponentielle Annäherung des Härtens nach folgender empirischer Form verwendet:

$$H_{eff}(p_{k,l}) = H_{min} \cdot \left(1 + \left(\frac{p_{k,l}}{H_{min}}\right)^n\right) \quad (6.114)$$

H_{\min} errechnet sich wie beim perfekt plastischen Fall als der 3-fache Wert der Streckgrenze des Kontaktes mit der weicheren Deckschicht.

In Analogie zum Spannungshärten gibt Cai [18] eine empirische Form des Deformationshärten an. Hierbei wird davon ausgegangen, dass bei steigender Deformation einer Deckschicht mehr und mehr die Eigenschaften des Grundmaterials zum Tragen kommen. Für die effektive Härte des Materials ergibt sich:

$$H^{eff}(p_{k,l}) = H^{eff}(u_{\max}(p_{k,l})) = H_{k+1} \cdot \left(1 + \left(\frac{H_k}{H_{k+1}} - 1 \right) e^{-\left(\frac{u_{\max}(p_{k,l})}{d_k} \right)^m \cdot \left(-\frac{E_k}{E_{k+1}} \right)^n \cdot \left(-\frac{H_k}{H_{k+1}} \right)^p} \right) \quad (6.115)$$

Hier bezeichnet H_k die Härte des Schichtmaterials mit entsprechendem Index. Der Term d_k kennzeichnet die entsprechende Schichtdicke. Die maximale Deformation wird mit u_{\max} angegeben. Der Schichtindex läuft in obiger Formel von 1 bis 2. Für eine harte Deckschicht auf einem weichen Substrat werden die Exponenten m , n und p mit 1,1, -0,5 bzw. 0,1 angegeben. Im Falle einer weichen Deckschicht auf einem harten Substrat ergeben sich für m , n und p die Werte 1,8, -0,9 und 1,0. Im Falle von zwei Deckschichten ergeben sich je nach maximaler Deformation drei unterschiedliche Szenarien:

1. Für $u_{\max} < 0,3d_1$ wird nur die Härte der Deckschicht in Betracht gezogen.
2. Für $0,3d_1 \leq u_{\max} < d_1 + 0,3d_2$ wird Glg. (6.115) mit dem Index $k = 1$ angewendet.
3. Für $u_{\max} \geq d_1 + 0,3d_2 \rightarrow k = 2$.

Ein Wegfließen des Kontaktmaterials aus dem Inneren der Deckschicht, vom Kontaktbereich weg hin zur Oberfläche, kann hierdurch nicht modelliert werden. Wie später gezeigt wird (Kapitel 7.2.1 und 8), führen die im Steckverbinderbereich auftretenden Flächenpressungen zwar unterhalb der Oberfläche zu Zonen, die im plastischen Spannungsbereich liegen. Diese Zonen werden jedoch allseitig von Bereichen umschlossen, die nur einer elastischen Beanspruchung unterliegen. Hierdurch kann es zu keinem Wegfließen von Material aus dem Kontaktbereich weg bzw. zur Oberfläche hin kommen. Eine deutlich stärkere Flächenpressung als im Steckverbinderbereich würde jedoch zu einer Ausweitung der plastischen Zonen bis hin zur Oberfläche führen, wodurch es zur Ausbildung eines Materialwalles um den Kontaktbereich kommen würde. Um derart hohe Flächenpressungen mit zu erfassen, muss das hier angewendete Modell entsprechend den Arbeiten von Chiu [21][22] erweitert werden, was zu einer zusätzlichen iterativen Lösungsschleife bei der Bestimmung der Flächenpressung führt (siehe auch 9.1).

6.2.4.3 Die Conjugate-Gradient-Methode zur iterativen Bestimmung der Druckverteilung auf der Oberfläche zweier kontaktierender, rauer, nicht konformer Oberflächen.

Eine weitere Methode zur iterativen Bestimmung der Druckverteilung stellt die („conjugate gradient“) CG-Methode dar. Nachfolgend wird der von Polonsky und Keer [118] vorgestellte Algorithmus erläutert. Dieser Algorithmus konvergiert sehr stabil und wird im Rahmen dieser Arbeit in abgeänderter Form auch für beschichtete Kontaktsysteme verwendet (siehe hier Kapitel 6.2.7). Des Weiteren wird

der Algorithmus so abgewandelt, dass neben einem rein elastischen auch das perfekt plastische bzw. plastische Verhalten der kontaktierenden Punkte angenähert werden kann. Die Autoren erweitern die CG-Methode [40], die zur Optimierung von Gleichungssystemen entwickelt wurde, auf Systeme, die Randbedingungen in Form zusätzlicher Ungleichungen der Form (6.47) – (6.49) aufweisen. Abbildung 6.20 zeigt prinzipiell den Kontakt einer rauen Oberfläche mit einer starren glatten Ebene. Die raue Oberfläche stellt sich hierbei als Summe der beiden Kontaktopographien dar. Diese kumulierte Topographie wird bildlich gesprochen gegen eine glatte absolut starre Fläche gedrückt, wodurch sich eine entsprechende Abplattung ergibt.

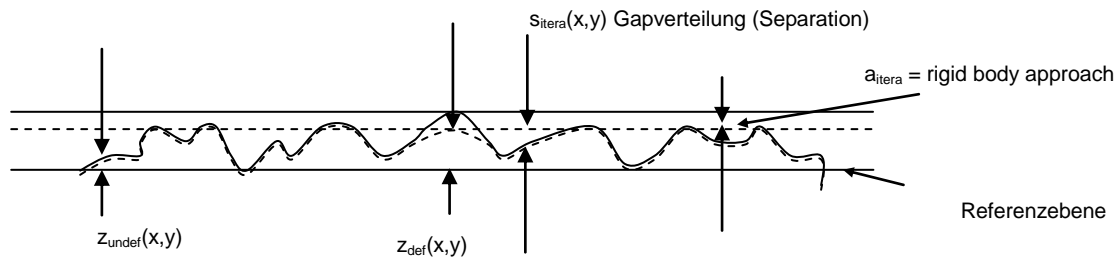


Abbildung 6.20: Kontakt einer rauen Oberfläche mit einer starren glatten Ebene.

Im Falle kontaktierender rauer Oberflächen ergeben sich die Randbedingungen bzgl. der Druckverteilung auf der Oberfläche gemäß:

$$p_{i,j} > 0; \quad (i, j) \in I_c \quad (6.116)$$

$$p_{i,j} = 0; \quad (i, j) \notin I_c \quad (6.117)$$

Hierbei kennzeichnet I_c die Menge der in Kontakt stehenden Punkte. Des Weiteren gelten die Randbedingungen gemäß den Gleichungen (6.66), (6.67) und (6.69). Die Iteration wird nach dem wie folgt beschriebenen Schema durchgeführt. Zu Beginn wird eine Druckverteilung, die nur positive Werte aufweist und der Randbedingung (6.69) gehorcht, definiert. In dieser Arbeit wird immer mit einer Druckverteilung begonnen, die der elliptischen Kraftverteilung eines Hertz'schen Kontaktes entspricht. Die Kontaktradien werden entweder als Parameter explizit vorgegeben (simulierte Oberfläche), oder es werden Default-Werte für die Kontaktellipse eingesetzt. An Hand der vorgegebenen Druckverteilung werden die Deformationen $u_{k,l}$ berechnet. Bei der Berechnung der $u_{k,l}$ kann wahlweise die direkte Matrixmultiplikation (Kapitel 6.2.2), der MLMS-Algorithmus (Kapitel 6.2.4) oder der später beschriebene Lösungsansatz über Papkovich-Neuber-Potentiale (Kapitel 6.2.7) verwendet werden.

Die Luftspalterverteilung $s_{k,l}$ ergibt sich im Falle eines kontaktierenden Punktes zu:

$$s_{k,l} = -u_{k,l} - z_{k,l}; \quad (k,l) \in I_p \quad (6.118)$$

I_p kennzeichnet Gitterpunkte mit $p_{k,l} > 0$. Für diese Punkte ergibt sich ein Mittelwert gemäß:

$$\bar{s} = \frac{1}{N_p} \cdot \sum_{(k,l) \in I_n} s_{k,l} \quad (6.119)$$

N_p steht für die Anzahl der Gitterpunkte mit positivem Druckwert. Der Mittelwert wird von der Luftspaltverteilung subtrahiert.

$$s_{k,l} \leftarrow s_{k,l} - \bar{s} \quad (k,l) \in I_p \quad (6.120)$$

Bildung der Quadratsumme der s_{kl} ergibt:

$$S = \sum_{(k,l) \in I_p} s_{k,l}^2 \quad (6.121)$$

Die so genannte „conjugate direction“ $t_{k,l}$ errechnet sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned} t_{k,l} &\leftarrow s_{k,l} + \delta \cdot \left(\frac{S}{S_{alt}} \right) \cdot t_{k,l}; \quad (k,l) \in I_p \\ t_{k,l} &= 0; \quad (k,l) \notin I_p \end{aligned} \quad (6.122)$$

Die Hilfsvariablen in Glg. (6.122) werden zu Beginn der Iteration mit den Startwerten $\delta=0$ initialisiert. Hierdurch entfällt eine Vorgabe der $t_{k,l}$ bei Iterationsstart. Nach der ersten Berechnung der $t_{k,l}$ wird $\delta=1$ gesetzt. S wird in S_{alt} zwischengespeichert. Anschließend wird die Faltung der $t_{k,l}$ mit den Influenzkoeffizienten gemäß Glg. (6.61) berechnet.

$$r_{k,l} = \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} K_{k-i,l-j} t_{i,j} \quad (6.123)$$

Auf Grund der Potentialform des Kernel's kann hier zur schnellen Berechnung der MLMS-Algorithmus zur Anwendung kommen. Anschließend erfolgt eine Mittelwertbildung in Analogie zur Luftspaltverteilung

$$\bar{r} = \frac{1}{N_p} \cdot \sum_{(k,l) \in I_p} r_{k,l} \quad (6.124)$$

Die r -Werte Verteilung wird entsprechend verschoben:

$$r_{k,l} \leftarrow r_{k,l} - \bar{r}; \quad (k,l) \in I_p \quad (6.125)$$

Die r -Verteilung wird verwendet, um den Faktor zu berechnen, mit welchen später die Werte der „conjugate direction“ gewichtet werden. Für den Wichtungsfaktor gilt:

$$\tau = \frac{\sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} s_{i,j} t_{i,j}}{\sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} r_{i,j} t_{i,j}} \quad (6.126)$$

Zur späteren Fehlerbetrachtung werden die Werte der Druckverteilung zwischengespeichert:

$$p_{k,l}^{alt} = p_{k,l} \quad (6.127)$$

Im Folgenden weichen die hier beschriebenen Iterationsschritte von Polonski und Keer [118] ab. In [118] wird die Druckverteilung gemäß Glg. (6.128) geändert. Hierbei werden die $p_{k,l}$ in Abhängigkeit von den gewichteten „conjugate directions“ geändert.

$$p_{k,l} \leftarrow p_{k,l} - \tau \cdot t_{k,l}; \quad (k,l) \in I_p \quad (6.128)$$

In einem weiteren Schritt wird die Randbedingung (6.117), dass keine Zugspannungen an der Oberfläche auftreten dürfen angewendet.

$$\begin{aligned} \text{wenn } p_{k,l} &< 0 \\ \text{dann } p_{k,l} &= 0 \end{aligned} \quad (6.129)$$

Für Punkte, die keine Kontaktpunkte sind, also solche Punkte, für welche $p_{k,l}=0$ gilt, wird getestet, ob diese Punkte die virtuelle starre Fläche durchdringen. Eine Durchdringung ist gegeben wenn gilt $s_{k,l} < 0$. In diesen Punkten werden die Druckwerte wie folgt korrigiert:

$$\begin{aligned} \text{wenn } s_{k,l} &< 0 \\ \text{dann } \begin{cases} \delta = 0 \\ p_{k,l} = p_{k,l} - \tau \cdot s_{k,l} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.130)$$

Hierdurch wird die Ungleichung (6.67) sicher gestellt. Um das plastische Verhalten der Kontaktpunkte mit zu erfassen, wird in Erweiterung zur Original-Literatur zusätzlich eine Datenmatrix p^{plast} eingeführt. Je nach gewählter Härtekenlinie $H^{\text{eff}}(p_{k,l})$ (siehe Kapitel 6.2.4.2) berechnen sich die $p^{\text{plast}}_{k,l}$ -Werte wie folgt: In einem ersten Schritt werden die Werte mit den Werten der momentanen Druckverteilung initialisiert.

$$p^{\text{plast}}_{k,l} = p_{k,l} \quad (6.131)$$

Falls die punktuellen Druckwerte größer als ein bestimmter Maximalwert (abhängig vom gewählten Plastizitätsmodell) sind, werden die $p^{\text{plast}}_{k,l}$ -Werte wie folgt modifiziert.

$$\begin{aligned} \text{wenn } p^{\text{plast}}_{k,l} &> H^{\text{eff}}(p_{k,l}) \\ \text{dann } p^{\text{plast}}_{k,l} &= H^{\text{eff}}(p_{k,l}) \end{aligned} \quad (6.132)$$

Hierbei wird $H^{\text{eff}}(p_{k,l})$ gemäß den Kennlinien (6.111), (6.114) bzw. (6.115) eingesetzt. Anschließend erfolgt die Berechnung der momentan wirkenden Normalkraft:

$$F_N^{\text{itera}} = \Delta_x \Delta_y \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} p^{\text{plast}}_{i,j} \quad (6.133)$$

Nun erfolgt eine Normierung der $p_{k,l}$ Werte:

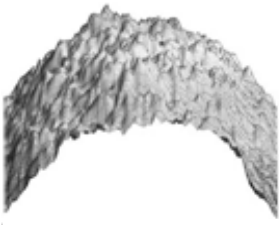
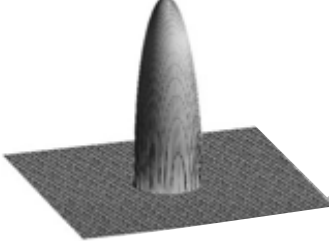
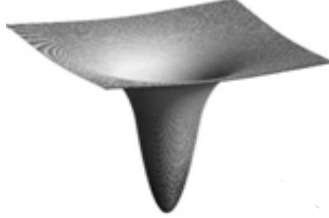
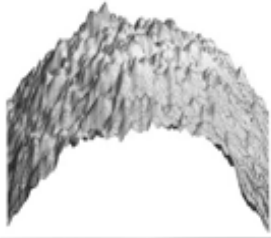
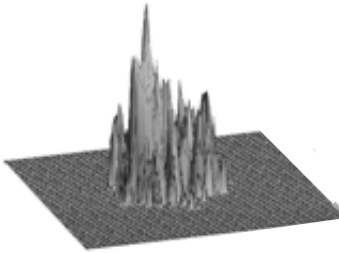
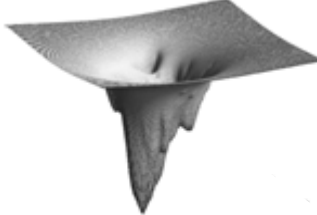

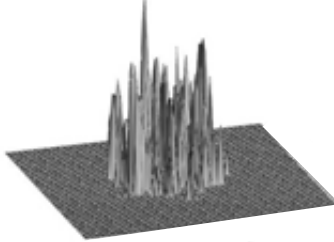
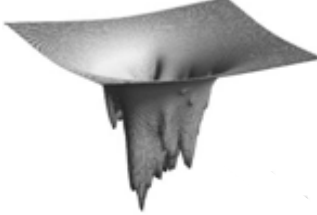
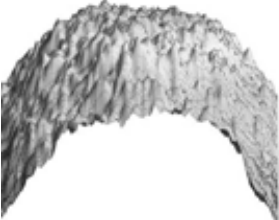
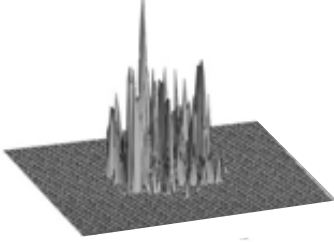
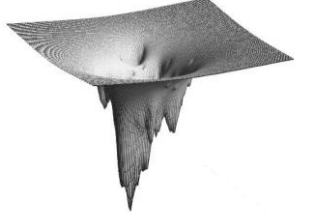

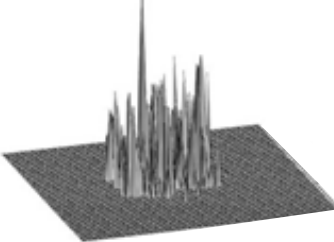
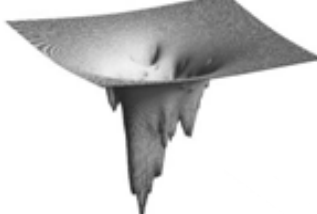
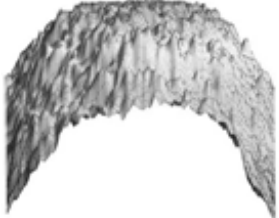
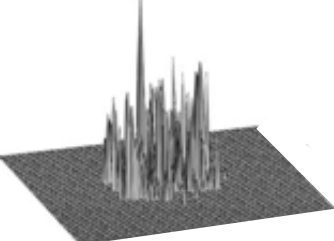
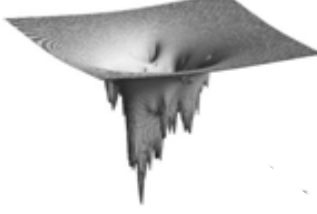
$$p_{i,j} \leftarrow \left(\frac{F_N}{F_N^{\text{itera}}} \right) \cdot p_{i,j} \quad (6.134)$$

Die Anwendung der obigen Gleichung auf die $p^{\text{plast}}_{k,l}$ würde die Randbedingung nach Glg. (6.69) erzwingen. Der momentane Fehler wird wie folgt abgeschätzt:

$$\mathcal{E}^{\text{itera}} = F_N^{\text{itera}} - F_N \quad (6.135)$$

Ist $\mathcal{E}^{\text{itera}}$ größer als eine zu Beginn festgelegte Fehlergrenze ε_0 , erfolgt eine erneute Berechnung der Deformationen $u_{k,l}$, ansonsten endet der Iterationsalgorithmus an dieser Stelle. Tabelle 6.4 zeigt in bildlicher Darstellung die schnelle Konvergenz des hier vorgestellten CG-Algorithmus.

Tabelle 6.4: Exemplarische Darstellung des CG-Algorithmus an Hand einer Topographie mit einer Auflösung von 128 x 128 Punkten (x/y-Achsen). Auf eine explizite Darstellung der Skalenwerte (z-Achse) wird hier verzichtet.

N Itera	z-Werte /m	Druckverteilung / Pa	Deformationen / m
0 $F_N=1 \text{ N}$			
1 $F_N=2,22 \text{ N}$			
2 $F_N=1,34 \text{ N}$			
3 $F_N=1,06 \text{ N}$			
4-6	Aus Platzgründen nicht dargestellt		
6 $F_N=0,98 \text{ N}$			
7 $F_N=1,00 \text{ N}$			

Als Beispiel dient eine raue Topographie mit einer lateralen Auflösung von 128 x 128 Punkten. Unter reiner Verwendung des Multi-Grid-Algorithmus beträgt die Gesamtrechnenzeit weniger als 2 sec. Zur Berechnung der Deformation werden die $p_{k,l}$ verwendet. Sowohl die $p_{k,l}$ - als auch die $p_{k,l}^{plast}$ -Werte werden gespeichert. An dieser Stelle sei noch einmal erwähnt, dass die Berechnung der Kontaktdeformation durch unterschiedliche Verfahren erfolgen kann. Im Allgemeinen wird bei der hier besprochenen CG-Methode in einem ersten Durchlauf die Deformationen mit dem geschwindigkeitsoptimierten MLMS-Verfahren (Kapitel 6.2.4.1) berechnet. Die sich hierdurch ergebende Druckverteilung wird dann als Startverteilung einer folgenden Iteration verwendet. Bei dieser zweiten Iteration werden dann langsamer arbeitende Verfahren verwendet (siehe Kapitel 6.2.7), welche die Deformationen beschichteter Kontakte ergeben. Hierdurch ergibt sich dann die gesuchte Druckverteilung. Bei den weiteren Berechnungen der inneren Deformationen von beschichteten Kontakten werden die $p_{k,l}$ -Werte verwendet. Zur Berechnung der inneren Spannungen beschichteter Kontakte werden die $p_{k,l}^{plast}$ -Werte verwendet.

6.2.5 Prinzip der kleinsten Energie

Der Vollständigkeit halber wird in diesem Kapitel ein Verfahren zur Lösung des Kontaktproblems rauer Oberflächen beschrieben, das in der Literatur häufig herangezogen wird. Hierbei wird die Druckverteilung über die minimale „komplementäre potentielle Energie“ bestimmt, die sich beim Kontakt zweier rauer Oberflächen einstellt. Abbildung 6.21 zeigt die Definition der komplementären Energie.

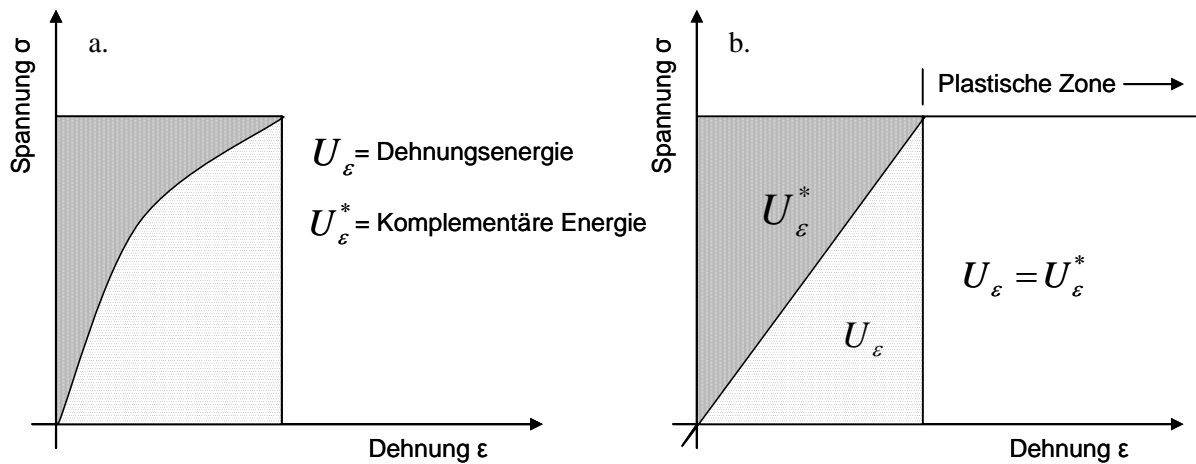


Abbildung 6.21: Definition der Dehnungs- und komplementären Energie und die Beziehung zwischen der Dehnungs- und komplementären Energie beim elastisch/plastischen (a) bzw. perfekt plastischen Fall (b).

Die Dehnungsenergie ist wie in Abbildung 6.21 a. ersichtlich:

$$U_{\epsilon} = \int \sigma_{\text{Kontakt}} d\epsilon \quad (6.136)$$

Hierbei kennzeichnet σ_{Kontakt} die Spannungen in den kontaktierenden Körpern. Für die gesamte komplementäre Energie V^* kann analog zu [142] folgende Formel angegeben werden:

$$V^* = \int_{\Omega} U_0^*(\sigma_{i,j}(x, y, z)) d\Omega + \int_A u_i^*(x, y) T_i dA \quad (6.137)$$

Der Term U_0^* steht für die interne komplementäre Energiedichte, welche über das entsprechende Körpervolumen Ω integriert wird. Das Produkt zwischen den vorgegebenen Deformationen (u_i^*) und den Scherbeanspruchungen (T_i) wird über die resultierende Kontaktfläche A integriert. Die vorgegebenen Deformationen ergeben sich aus der hypothetischen Überlappung der beiden rauen Oberflächen auf Grund einer vorgegebenen Kompression der beiden Kontaktpartner (siehe Abbildung 6.22).

Für die z-Komponenten gelten die Bedingungen analog zu Glg. (6.47) und Glg. (6.48).

$$u_z^*(x, y) = c - (z_1(x, y) - z_1(x, y)); \quad (x, y) \in I_c \quad (6.138)$$

$$u_z^*(x, y) > c - (z_1(x, y) - z_1(x, y)); \quad (x, y) \notin I_c \quad (6.139)$$

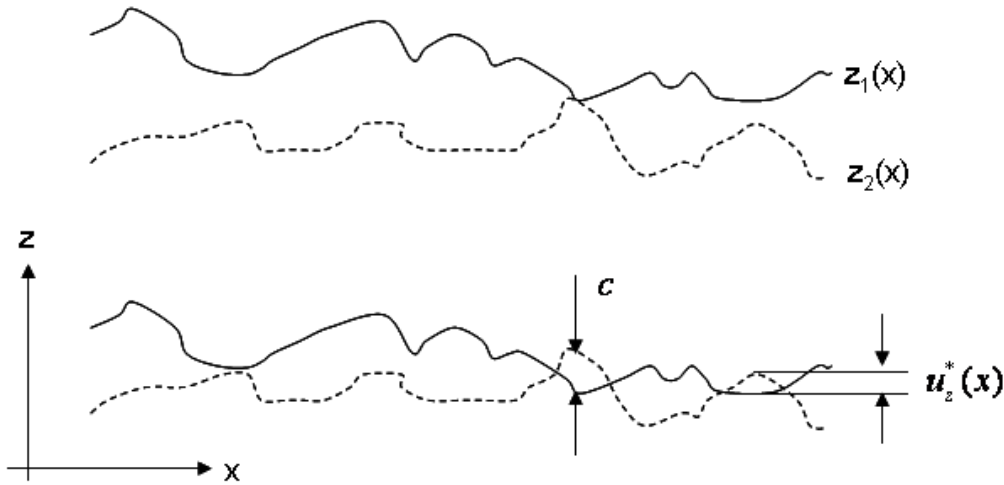


Abbildung 6.22: Definition der vorgegebenen Deformation zweier rauer kontaktierender Körper

Im Falle zweier kontaktierender rauer Oberflächen ist die totale komplementäre Energie durch folgende Formel gegeben [142].

$$\begin{aligned} V^* &= U_\varepsilon^* - \int_A p(u_{z1}^* - u_{z2}^*) dA \\ &= U_\varepsilon^* - \int_A p \bar{u}_z^* dA \end{aligned} \quad (6.140)$$

Hierbei beschreibt U_ε^* die innere komplementäre Energie der beiden Kontaktpartner. Der Term \bar{u}_z^* steht für die addierte vorgegebene Deformation innerhalb der Kontaktzone, basierend auf der geometrischen Überlappung gemäß Glg. (6.138) und (6.139). Im Falle elastischer Körper, die dem Hook'schen Gesetz gehorchen, ist die innere komplementäre Energie gleich der elastischen Spannungsenergie (siehe Abbildung 6.21 d.). Die Spannungsenergie kann in Abhängigkeit von der Kontaktbelastung und den Deformationen auf der Kontaktfläche nach folgender Formel beschrieben werden.

$$\begin{aligned}
U_\varepsilon &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} p(u_{z1} + u_{z2}) dA \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} p \bar{u}_z dA
\end{aligned} \tag{6.141}$$

Hierbei steht \bar{u}_z für die gesamte Deformation zweier Kontaktpunkte, die sich wiederum aus der gesuchten Druckverteilung ergibt. Zur Berechnung der \bar{u}_z können die in den Kapiteln 6.2.2 bis 6.2.4 beschriebenen Verfahren verwendet werden. Einsetzen von Glg. (6.141) in Glg. (6.140) ergibt:

$$V^* = \frac{1}{2} \int_A p \bar{u}_z dA - \int_A p \bar{u}_z^* dA \tag{6.142}$$

Stellt man die Deformation in einer vektoriellen Form als Produkt des Druckvektors mit der Influenzmatrix gemäß Glg. (6.50) dar, so ergibt sich die diskrete Form von Glg. (6.142) wie folgt:

$$V^* = \frac{1}{2} \sum_i^N p_i \sum_j^N M_{i,j} p_j - \sum_i^N p_i \bar{u}_{z_i}^* \tag{6.143}$$

Somit ergibt sich die totale komplementäre Energie als quadratische Funktion bezüglich der Druckverteilung. In einem realen Kontaktsystem stellen sich die wahre Kontaktfläche und die entsprechende Druckverteilung so ein, dass die totale komplementäre Energie einen Minimalwert besitzt. Die Lösung dieses Problems wird in der Literatur im Wesentlichen durch zwei Verfahren, die „standard mathematical programming“-Methode und die „direct mathematical programming“-Methode beschrieben. Die „standard mathematical programming“-Methode wurde erstmals von Conry [24] und Kalker [62] beschrieben. Hierbei werden die Gleichungen (6.47) und (6.48) mit Glg. (6.51) zu einer quadratischen Gleichung folgender Form kombiniert.

$$\vec{p}^T (M\vec{p} + \vec{s} - c\vec{e}) \tag{6.144}$$

Hierbei stellt M die Matrix der additiven Influenzkoeffizienten gemäß (6.61) dar. Die Punktkräfte \vec{p} und Separationen \vec{s} liegen als einspaltige Vektoren mit N_x mal N_y Elementen vor. Der Term \vec{e} kennzeichnet einen entsprechenden Einheitsvektor. Der hochgestellte Index T kennzeichnet die Transponierte des jeweiligen Vektors bzw. der Influenzmatrix. Die Minimalwertaufgabe erfolgt unter Einbeziehung folgenden Bedingungen:

$$-M\vec{p}^T + c\vec{e} \leq \vec{s} \tag{6.145}$$

$$\vec{e}^T \vec{p} = F_N \tag{6.146}$$

$$p_i > 0 \quad \text{für} \quad c > 0 \text{ und } i \in I_c \tag{6.147}$$

Die Lösung erfolgt analog zur Simplex-Methode. Da dieser Lösungsansatz in der vorliegenden Arbeit keine Verwendung findet, sei hier auf die Literatur von Wolfe [160] verwiesen. Der Simplex-Algorithmus ist auf Grund der Mehrfachsummation in Glg. (6.144) sehr rechenintensiv und daher nicht für eine hohe Topographieauflösung geeignet. Die „direct quadratic programming“-Methode wird unter anderem von Tian [142], Kalker [61] und Bushan [17] beschrieben. Dieser Ansatz geht von der Matrixform der Glg. (6.143) aus.

$$V^*(\vec{p}) = \frac{1}{2} \vec{p}^T \cdot M \cdot \vec{p} - \vec{p}^T \vec{u}_z^* \quad (6.148)$$

Da die Influenzmatrix eine positive definite Matrix darstellt, besitzt die totale komplementäre Energie das Minimum an der Stelle \vec{p}^* die durch folgende Bestimmungsgleichung gegeben ist:

$$\nabla V^*(\vec{p}^*) = M \cdot \vec{p}^* - \vec{u}_z^* = 0 \quad (6.149)$$

Somit ergibt sich \vec{p}^* zu:

$$\vec{p}^* = M^{-1} \cdot \vec{u}_z^* \quad (6.150)^{21}$$

Diese Gleichung stellt wieder die Lösung von Glg. (6.51) durch direkte Matrixinversion dar. Der hochgestellte Index -1 kennzeichnet hierbei die inverse Matrix. Unter der Randbedingung, dass keine negativen Druckwerte auftreten dürfen (siehe auch Kapitel 6.2.4.3), wird die obige Gleichung z.B. bei [142] über den Gauß-Seidel-Algorithmus mit LU-Dekomposition iterativ gelöst. Der Prozess gestaltet sich wie folgt:

$$\vec{p}_{itera+1}^* = \begin{cases} -(L+D)^{-1} U \cdot \vec{p}_{itera}^* + (L+D)^{-1} \cdot \vec{u}_z^*; & \text{für } \vec{p}_{itera_i}^* \geq 0 \\ 0; & \text{für } \vec{p}_{itera_i}^* < 0 \end{cases} \quad (6.151)$$

Hier sei angemerkt, dass in der Literatur [142][83] die Bedingungen in obiger Gleichung auf den gesamten Vektor und nicht auf dessen Komponenten angewendet beschrieben werden. Bei der LU-Dekomposition wird die Influenzmatrix in drei Komponenten zerlegt. Hierbei kennzeichnet L (Lower) die Komponenten der Influenzmatrix, welche unterhalb der Diagonalen angeordnet sind. Der Term U (Upper) kennzeichnet die obere Dreiecksmatrix. Die Matrix, welche nur die Diagonalelemente von M enthält, wird mit D gekennzeichnet.

$$M = (L + D + U) \quad (6.152)$$

Der tief gestellte Index itera steht für den jeweiligen Iterationsschritt. Stanley [137] benutzt zur Lösung der Minimalwertaufgabe ebenfalls einen iterativen Algorithmus. Die direkte Matrixmultiplikation wird über FFT-Verfahren gelöst (siehe Kapitel 6.2.6). Ein weiterer iterativer Ansatz zur Minimierung der inneren Energie wird von Hu [46] verwendet. Eine Möglichkeit, die Berechnung zu beschleunigen, ist, Kontaktpunkte für $P < 0$ aus der Berechnung auszuschließen. Es wird jedoch nicht mit Schichten oder plastischer Deformation gerechnet. Es wird eine Bousinesq-Cerutti-Integralform angegeben, die auch Traktion beinhaltet. Sayles[128] und Willner[159] verwenden ebenfalls das Prinzip der geringsten Energie, um Kontaktprobleme zu lösen. Ein ähnlicher Ansatz für zusätzlich Scherkräfte wird von Klabring [68][69][70] („mathematical programming approach“) verwendet.

²¹ Gleiches Verfahren wird in dieser Arbeit zur Berechnung der Papkovitch-Neuber-Koeffizienten verwendet.

6.2.6 DC-FFT-Verfahren

Die Integralform der Druck-Deformationsrelationen für den Linienkontakt gemäß Glg. (6.58) bzw. für den Flächenkontakt gemäß Glg. (6.59) stellen im mathematischen Sinne eine Faltung zwischen der Druckverteilung und einer Transferfunktion dar. Die Anwendung des Faltungssatzes z.B. auf Glg. (6.59) ergibt im Falle eines unendlich ausgedehnten Kontaktbereichs dann folgende Form:

$$\tilde{u}(\omega_x, \omega_y) = H(\omega_x, \omega_y) \tilde{p}(\omega_x, \omega_y) \quad (6.153)$$

Hierbei stehen $\tilde{u}(\omega_x, \omega_y)$ und $\tilde{p}(\omega_x, \omega_y)$ für die zweidimensionale kontinuierliche Fouriertransformation in x- und y-Richtung. Der Term $H(\omega_x, \omega_y)$ steht in Analogie zu Glg. (6.19) für die Fourier-Transformierte der Transferfunktion. Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt darin, dass die Integration in eine einfache Multiplikation überführt wird. Wie jedoch bereits in Kapitel 6.1.3 beschrieben, muss die Transferfunktion bekannt sein.

Ju [58] errechnet die Transferfunktion aus der analytischen Lösung für die Deformation für eine sinusförmige Druckverteilung. Die gleiche Vorgehensweise benutzt Stanley [137] für den ein- und zweidimensionalen Fall. Bei der Annahme, dass sich die Druckverteilung aus einer Überlagerung sinusförmiger Anteile ergibt, wird die Transferfunktion wieder aus der analytisch bekannten Bestimmungsgleichung der Deformationen (Johnson 1985) bestimmt. Nogi et. al. [110] verwenden die bei O'Sullivan [113] analytisch gegebene fouriertransformierte Transferfunktion, um den Fall eines rauen sphärischen Stempels gegen eine glatte beschichtete Ebene zu berechnen. Hu et al. [46] benutzen die einfache Form der Transferfunktion $H(\omega_x, \omega_y) = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ im Falle zweier elastischer rauer Körper mit einheitlichen Materialparametern, um Ort und Betrag der maximalen Scherspannung innerhalb des Materials zu berechnen.

Bei der Verwendung der diskreten Fouriertransformation kommt es jedoch auf Grund von Aliasing-Effekten an den Rändern des Rechenbereiches zu Fehlern in den Simulationsergebnissen. Eine Möglichkeit diesen Effekt zu umgehen, ist, den Rechenbereich (Zielbereich; siehe Abbildung 6.23) um einen Faktor χ zu vergrößern und anschließend die Simulationsergebnisse an den fehlerbehafteten Rändern zu verwerfen. In der Literatur werden für den Faktor χ -die Werte 5 [58] bzw. 8 [120][125] angegeben. Dies ergibt jedoch wiederum zu sehr stark aufgeblähte Datenstrukturen, was wiederum zu einer ineffektiven Berechnung führt.

Im Folgenden wird der in dieser Arbeit verwendete Ansatz, basierend auf den Veröffentlichungen von Liu [86][87] dargestellt. Bei dieser Vorgehensweise genügt ein χ -Faktor von 2, um keinen Verlust an Rechengenauigkeit an den Rändern des Zielbereichs zu generieren. Bei den hier betrachteten Kontaktproblemen ist es beim Übergang vom Raum- in den Zeitbereich oft nicht möglich, die kontinuierliche Form der Fouriertransformierten $\tilde{p}(\omega_x, \omega_y)$ zu ermitteln. Weiterhin ist der betrachtete Kontaktbereich immer nur von endlicher Größe. Eine diskrete Darstellung der Topographie und Druckverteilung zur numerischen Berechnung des Kontaktproblems ist daher der einzige verfügbare Weg. An dieser Stelle sei genauer auf den Unterschied zwischen der kontinuierlichen und der diskreten (schnellen) Fouriertransformation eingegangen.

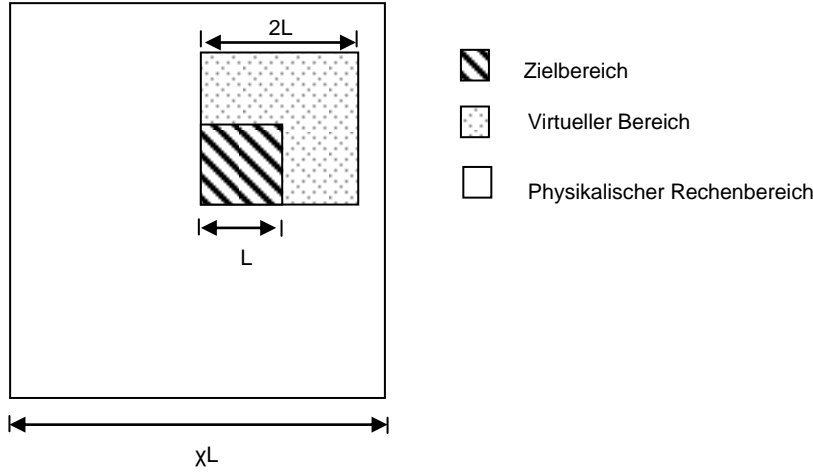


Abbildung 6.23: Bereichserweiterung

Die diskrete Fouriertransformation DFT bzw. die schnelle Fouriertransformation FFT stellt das Gegenstück zur kontinuierlichen Fouriertransformation dar. Analog stellt die inverse schnelle Fouriertransformation iFFT das Gegenstück zur inversen kontinuierlichen Fouriertransformation iFT dar. Im Falle eines diskreten Systems ist die Faltung durch eine zyklische Form gemäß nachstehender Formel definiert:

$$u_{i,j} = \sum_{k=0}^{N_x-1} \sum_{l=0}^{N_y-1} K_{i-k+2N_x H(k-i), j-l+2N_y H(l-j)} p_{k,l} \quad (6.154)$$

Hierbei steht $H(x)$ für die Heaviside Sprungfunktion.

$$H(x) = \begin{cases} 1; & \text{für } x > 0 \\ 0; & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.155)$$

Der Term K repräsentiert in diesem Falle wieder die Matrix der Influenzkoeffizienten. Zur Erläuterung seien folgende Beispiele möglicher Indexpaare aus Glg. (6.154) dargestellt:

1. $i-k = -2 \quad \rightarrow \quad i-k+2N_x H(k-i) = -2 + 2N_x$
2. $i-k = 2 \quad \rightarrow \quad i-k+2N_x H(k-i) = 2$

Abbildung 6.24 zeigt den Unterschied zwischen einer zyklischen und linearen Indizierung. In der englischen Nomenklatur wird diese zyklische Art der Indizierung auch mit „wrap around order“ bezeichnet. Eine Anwendung dieses Schemas ergibt zum Beispiel für die diskreten Frequenzen in zyklischer Indizierung die Darstellung wie in Abbildung 6.25 gezeigt.

$$\omega_{xi} = \begin{cases} \frac{2\pi}{L} i; & \text{für } 0 \leq i \leq N_x - 1 \\ \frac{2\pi}{L} (2N_x - i - 1); & \text{für } N_x \leq i \leq 2N_x - 1 \end{cases} \quad (6.156)$$

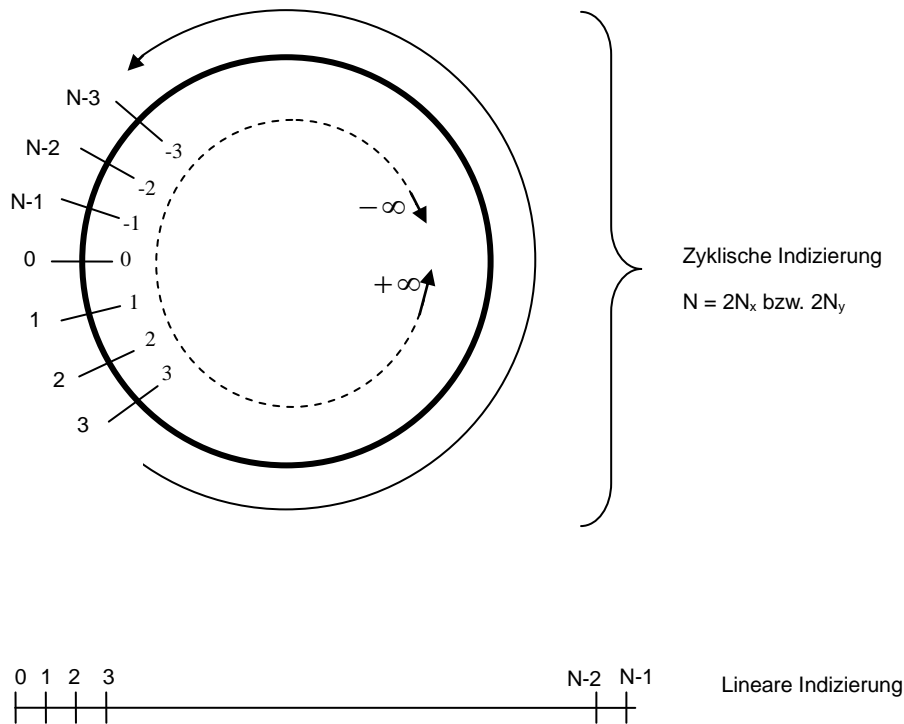
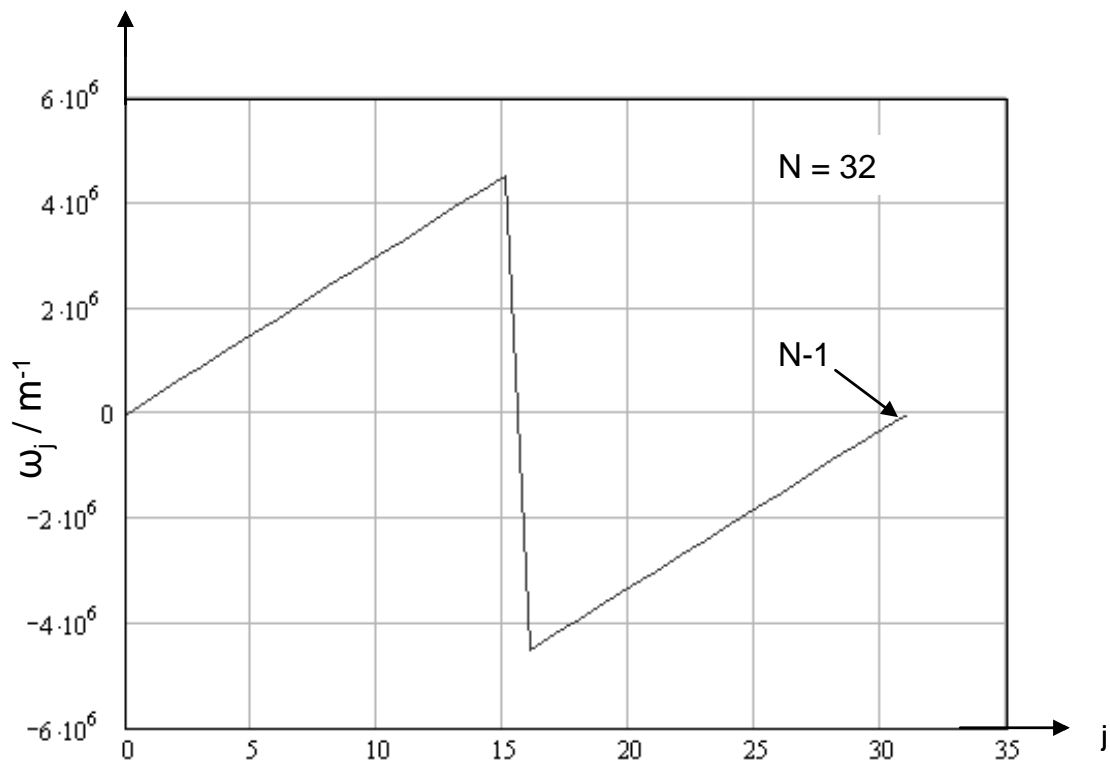


Abbildung 6.24.: Zyklische und lineare Anordnung diskreter Funktionswerte.

Abbildung 6.25.: Darstellung der Frequenzvariablen in zyklischer Indizierung ($N = N_x$ bzw. N_y).

Die Anwendung der diskreten Fouriertransformation auf Glg. (6.154) ergibt unter Einbeziehung des (zyklischen) Faltungssatzes nachstehende Beziehung:

$$\hat{u}_{i,j} = \hat{K}_{i,j} \hat{p}_{i,j} \quad i, j < N-1 \quad (6.157)$$

An dieser Stelle seien folgende wichtige Punkte herausgestellt. Im Unterschied zur kontinuierlichen Fouriertransformation in Glg. (6.153), die durch „~“ gekennzeichnet wird, bezeichnet das doppelte Dachsymbol „^“ die schnelle (diskrete) Fouriertransformation. Im Gegensatz zum allgemeinen Faltungssatz, der auf kontinuierliche Funktionen Anwendung findet und sich auf einen unbegrenzten Bereich bezieht, gilt Glg. (6.157) für diskrete Werte eines endlichen Bereiches. Weiterhin sind die Influenzkoeffizienten der diskreten (zyklischen) Faltung nicht mit der Transferfunktion (im engl. auch „unit impulse response“) identisch. Bei der FFT ist weiterhin zu beachten, dass auf Grund des angewendeten Algorithmus [147] die Anzahl Gitterpunkte in x- und y-Richtung nur eine ganzzahlige Potenz von zwei sein darf.

$$N = 2^m; \quad m \in \mathbb{N} \quad (6.158)$$

Im Falle von gemessenen Oberflächen, deren Punkteanzahl in x/y-Richtung nicht dieser Einschränkung entspricht, muss daher der Datenbereich auf die nächste kleinere passende Potenz reduziert werden. Alternativ kann die Datenmatrix mit Nullen aufgefüllt werden, bis Bedingung (6.158) erfüllt ist. Dieser Vorgang wird in der englischen Literatur auch mit „Zero Padding“ beschrieben.

Ein weiterer Unterschied zwischen der kontinuierlichen auf einen unendlichen Bereich ausgedehnten Fouriertransformation und einer diskreten Fouriertransformation mit einer endlichen Anzahl Frequenzterme, zeigt sich im Aliasing-Problem und dem Gibbs-Phänomen (siehe Anhang 2).

In Ref. [86] wird gezeigt, dass die Anwendung der zyklischen Faltung bereits mit einer Bereichserweiterung um den Faktor $\chi=2$ einen Fehler an den Rändern des untersuchten Kontaktproblems im Bereich kleiner 2% gegenüber einer analytischen Lösung (Boussinesq-Cerutti-Lsg. [63]) ergibt. Abbildung 6.26 zeigt für den Fall einer eindimensionalen Druckverteilung, wie diese hinsichtlich der Periodizität erweitert wird. Zuerst wird der laterale Bereich so weit erweitert, dass der Rechenbereich etwa die doppelte Ausdehnung wie der auf Grund des Hertz'schen Falles zu erwartenden Kontaktbereich ergibt. Die zusätzlichen Werte werden mit dem Wert Null initialisiert. Dieser Bereich wird dann um den Faktor $\chi=2$ erweitert und sämtliche Maschenpunkte mit dem Wert Null initialisiert.

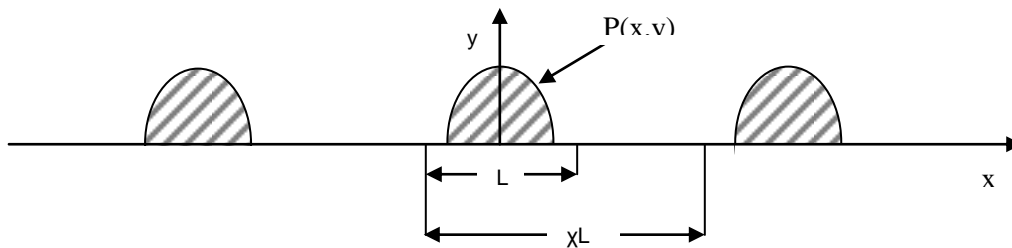


Abbildung 6.26: Erweiterung der Druckverteilung

Abbildung 6.27 a. zeigt den äquivalenten zweidimensionalen Fall. Die Terme der Fouriertransformation sind in zyklischer Anordnung dargestellt. In Abbildung 6.27 b. ist sehr gut zu erkennen, dass durch den schnellen Abfall der Koeffizienten der fouriertransformierten Druckverteilung, die Aliasing-Effekte wirksam unterdrückt werden.

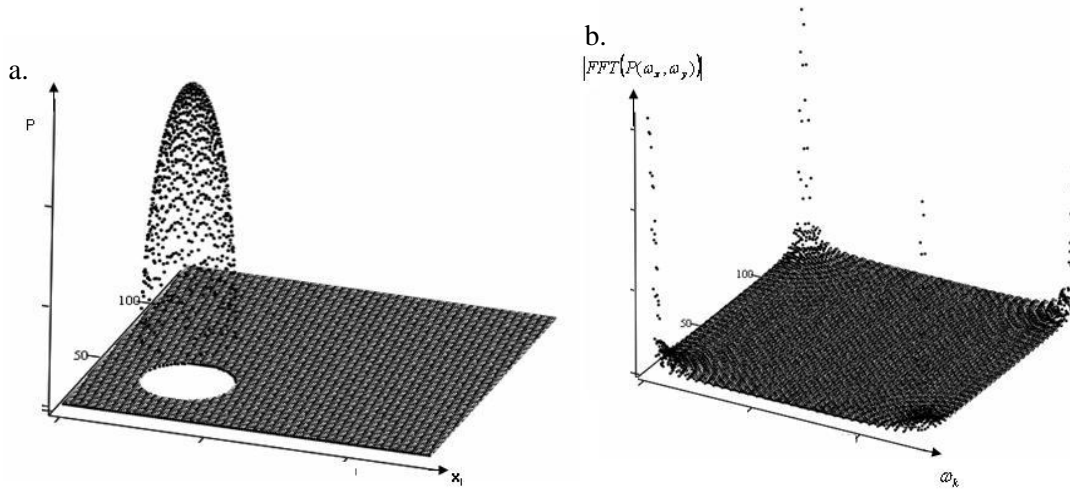


Abbildung 6.27: Erweiterte Hertzsche Druckverteilung (a.) im Ortsraum mit Zero Padding (b.) im Frequenzraum in zyklischer Anordnung

Der Vollständigkeit halber, wird an dieser Stelle der Formalismus der mehrdimensionalen Fouriertransformation kurz erläutert. Eine zweidimensionale diskrete Fouriertransformation wird über die folgende Formel definiert:

$$\hat{u}_{i,j} = \sum_{k=0}^{2N_x-1} \sum_{l=0}^{2N_y-1} e^{-2\sqrt{-1}\pi \frac{k}{2N_x} i} \cdot e^{-2\sqrt{-1}\pi \frac{l}{2N_y} j} x_{k,l} \quad (6.159)$$

Für die inverse Fouriertransformation gilt entsprechend der nachstehende Formalismus.

$$u_{k,l} = \frac{1}{4N_x N_y} \cdot \sum_{i=0}^{2N_x-1} \sum_{j=0}^{2N_y-1} e^{2\sqrt{-1}\pi \frac{k}{2N_x} i} \cdot e^{2\sqrt{-1}\pi \frac{l}{2N_y} j} \hat{u}_{i,j} \quad (6.160)$$

Um eine Verwechslung mit den Indexvariablen i bzw. j auszuschließen ist hier die imaginäre Zahl durch $\sqrt{-1}$ dargestellt.

Ein Code für die schnelle Fouriertransformation kann in [147] gefunden werden. Hierbei ist zu beachten, dass die diskreten Variablen im Frequenzraum ebenfalls in zyklischer Anordnung vorliegen müssen (siehe auch Abbildung 6.25). Abbildung 6.28 zeigt prinzipiell die Erweiterung des Rechengebietes auf eine doppelte virtuelle Größe, auf welche dann die schnelle Fouriertransformation angewendet wird. Die bisher in diesem Kapitel angesprochenen Lösungsansätze die auf dem Faltungssatz beruhen (z.B. Glg. (6.157)), beinhalten immer die Multiplikation zweier Datenmatrizen mit entsprechend hoher Anzahl an Rechenschritten. Ein anderer Ansatz, der auf einer direkten Berechnung der fouriertransformierten Komponenten des Spannungstensors und des Deformationsvektors beruht, wird im Folgenden beschrieben. Hierdurch entfällt die direkte Matrixmultiplikation.

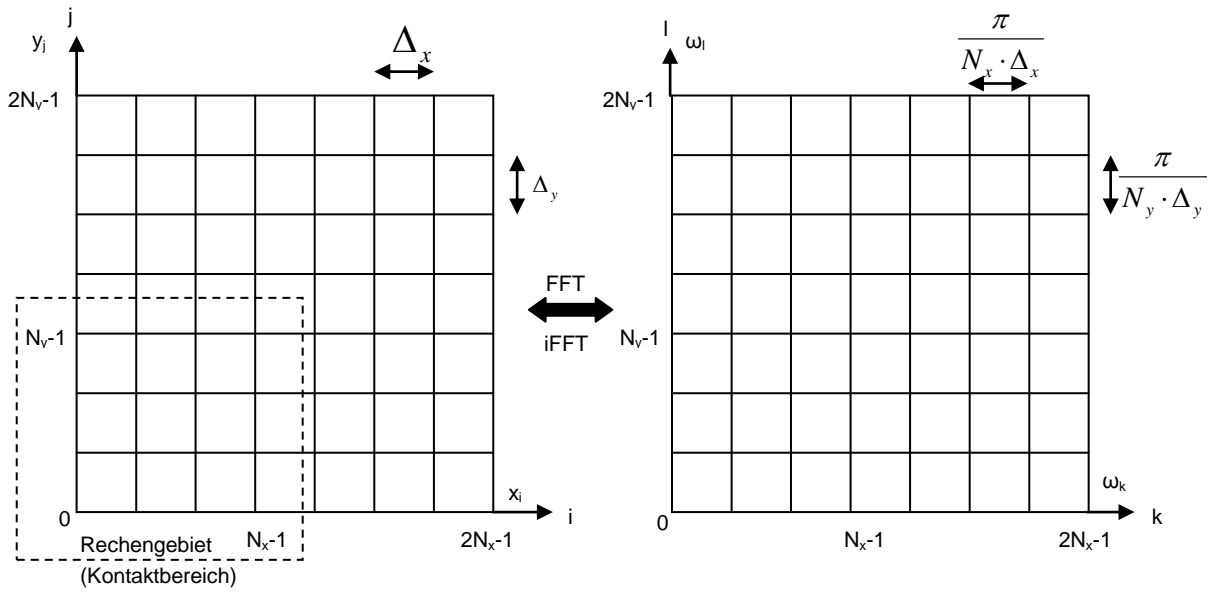


Abbildung 6.28: Netzstruktur in der räumlichen (a.) bzw. Frequenz-Domäne (b.)

6.2.7 Spannungsverteilung und Deformation beschichteter Kontaktkörper

Bei den bisher behandelten Verfahren wird keine Aussage über den Einfluss unterschiedlicher Schichtfolgen auf die Deformation bzw. die inneren mechanischen Spannungen zweier kontaktierender rauer Flächen gemacht. Abbildung 6.29 zeigt die in dieser Arbeit verwendete Schichtstruktur. Jede Schicht hat eine konstante Dicke, welche durch drei unterschiedlich wählbare Auflösungen in z-Richtung charakterisiert wird.

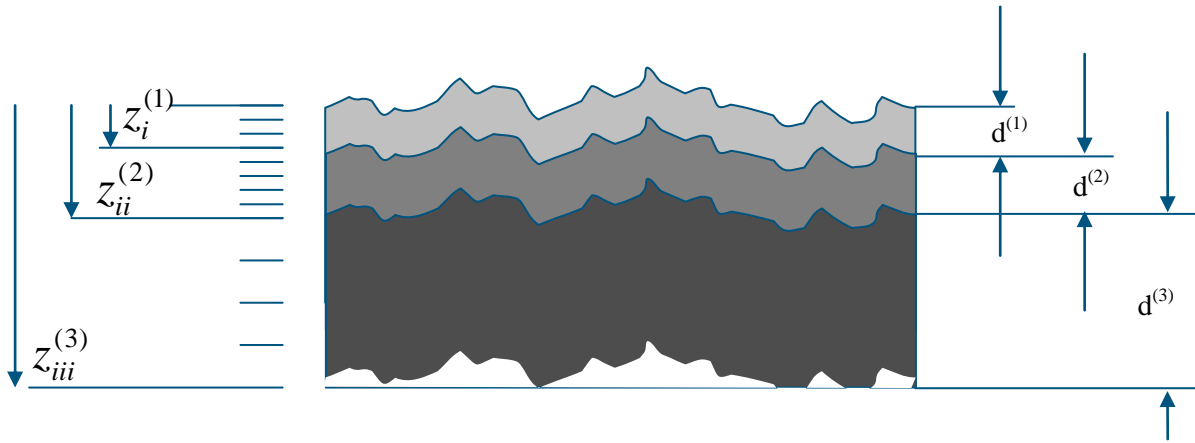


Abbildung 6.29: Parametrisierung der Beschichtungsabfolge.

Die drei nachstehenden Formeln zeigen die entsprechenden diskreten z-Werte der einzelnen Schichten. Die hochgestellten eingeklammerten Indizes laufen von 1 bis 3 und kennzeichnen in dieser Reihenfolge Deckschicht, Zwischenschicht und Grundmaterial.

$$z_i^{(1)} = \frac{i}{N_{z1}} \cdot d^{(1)}; \quad 0 \leq i < N_{z1} - 1 \quad (6.161)$$

$$z_{ii}^{(2)} = d^{(1)} + \frac{ii}{N_{z2}} \cdot d^{(2)}; \quad 0 \leq ii \leq N_{z2} - 1 \quad (6.162)$$

$$z_{iii}^{(3)} = d^{(1)} + d^{(2)} + \frac{iii}{N_{z3}} \cdot d^{(3)}; \quad 0 \leq iii \leq N_{z3} - 1 \quad (6.163)$$

Jede Schicht wird folglich durch eine vorgegebene Anzahl diskreter z-Werte dargestellt. Hierbei ist zu beachten, dass im Gegensatz zur Literatur [87] die individuellen z-Werte nicht mit 0 beginnen. Hier werden für die Zwischenschicht bzw. das Grundmaterial als Offset die jeweiligen Dicke(n) der darüber liegenden Schichten aufaddiert. Es wird davon ausgegangen, dass die Rauheit des Grundmaterials durch den elektrochemischen Beschichtungsprozess sich auch auf die darüber liegenden Schichten abbildet (Kapitel 4.3). Die einzelnen Schichten werden hinsichtlich deren mechanischen und elektrischen Kennwerte als isotrop und homogen angenommen. Die Haftung der einzelnen Schichten wird als ideal angenommen, d. h. es werden keine Delaminationseffekte betrachtet.

Eine der ersten Arbeiten auf dem Gebiet beschichteter Oberflächen wurden bereits 1945 von Burmister [13] für Flugplatz-Rollbahnen durchgeführt. Für Zylinderkoordinaten und ausgehend von den Gleichgewichtsbedingungen (6.164) (6.165) und Kompatibilitätsbedingungen (6.166) für die Stressfunktion ϕ

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (6.164)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (6.165)$$

$$\nabla^2 \varphi = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (6.166)$$

wird für die Stressfunktion der folgende Ansatz gewählt.

$$\varphi = J_0(\alpha r) \cdot [Ae^{\alpha z} - Be^{\alpha z} + Ce^{\alpha z} - De^{\alpha z}] \quad (6.167)$$

Hierbei stellt $J_0(\alpha r)$ eine Besselfunktion dar. Der Parameter α kann als Radius im Frequenzraum interpretiert werden.

$$\alpha = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} \quad (6.168)$$

Der Term $J_0(\alpha r)$ in Glg. (6.167) entspricht der vorgegebenen Druckverteilung an der Oberfläche. Die Koeffizienten A,B,C,D in den Schichten errechnen sich aus den Randbedingungen der Druckverteilung und den Kontinuitätsbedingungen an den Schichtgrenzen (siehe auch Glg. (6.177) - (6.181)).

Die gleiche Problemstellung, jedoch mit einer weiteren Schicht, wird bei Chen [19] mittels zweier harmonischer Funktionen $F^{(r)}$ und $Z^{(r)}$ gelöst (siehe auch Papkovitch-Neuber Potentiale). Diese harmonischen Funktionen stellen die Bestimmungsgleichungen der Spannungen und Deformationen dar und werden durch inverse Fourier-Transformationen ausgedrückt.

$$F^{(r)} = iFT \left(\frac{1}{\alpha^2} \left(A^{(r)}(\omega_x, \omega_y) e^{\alpha z^{(r)}} + B^{(r)}(\omega_x, \omega_y) e^{-\alpha z^{(r)}} \right) \tilde{p}(\omega_x, \omega_y) \right) \quad (6.169)$$

$$Z^{(r)} = iFT \left(\frac{1}{\alpha} \left(C^{(r)}(\omega_x, \omega_y) e^{\alpha z^{(r)}} + D^{(r)}(\omega_x, \omega_y) e^{-\alpha z^{(r)}} \right) \tilde{p}(\omega_x, \omega_y) \right) \quad (6.170)$$

Die kontinuierliche Fouriertransformation der Druckverteilung wird wieder durch vorgegebene analytisch transformierbare Funktionen vorgegeben. Die Koeffizienten der Exponentialterme ergeben sich wieder durch ein lineares Gleichungssystem, das durch die Rand- und Kontinuitätsbedingungen vorgegeben wird. Der Fall eines glatten sphärischen Stempels auf einer mehrschichtigen glatten Oberfläche wird von Plumet et. al. [117] betrachtet. Ausgehend von den Gleichgewichts- sowie Kompatibilitätsbedingungen und der Spannungs-Deformationsbeziehungen werden Fouriertransformationen auf die Bestimmungsgleichungen der Spannungen und Deformationen angewendet, um die partiellen Ableitungen hinsichtlich x und y zu eliminieren. Hierdurch ergibt sich wiederum ein lineares Gleichungssystem für Koeffizienten, die mit den Exponentialtermen $e^{\alpha z}$ und $e^{-\alpha z}$ in Beziehung stehen.

Eine Erweiterung des Modells für zusätzliche Scherkräfte an der Oberfläche wird von O'Sullivan et al. [113] angegeben. Im Falle räumlicher Probleme können die Spannungen und Deformationen mittels so genannter Papkovitch-Neuber-Potentiale Φ , Ψ_1 , Ψ_2 , Ψ_3 bestimmt werden. Hierbei stellt Φ ein harmonisches Skalarpotential und die Ψ_i die harmonischen Komponenten eines Vektorpotentials dar. Diese harmonischen Potentiale wurden unabhängig voneinander durch Papkovitch P. F. und Neuber H.

vorgeschlagen [114][108]. Der Ansatz verfolgt das Ziel, die Lösung der Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichung ((9.30) in Anhang 3) durch eine „Differentiation aus einer allgemeinen räumlichen Spannungsfunktion zu gewinnen“ [108] (Siehe Anhang 3).

Die Komponenten des Spannungstensors σ und des Deformationsvektors \vec{u} ergeben sich wie folgt:

$$2G^{(r)}u_i^{(r)} = \Phi_{,i}^{(r)} + x\Psi_{1,i}^{(r)} + z\Psi_{3,i}^{(r)} - (3-4\nu^{(r)})\Psi_i^{(r)} \quad (6.171)$$

$$\sigma_{ij}^{(r)} = \Phi_{,ij}^{(r)} - 2\nu^{(r)}(\Psi_{1,x}^{(r)} + \Psi_{3,z}^{(r)})\delta_{ij} - (1-2\nu^{(r)})(\Psi_{i,j}^{(r)} + \Psi_{j,i}^{(r)}) + x\Psi_{1,ij}^{(r)} + z\Psi_{3,ij}^{(r)} \quad (6.172)$$

mit

$$G^{(r)} = \frac{E^{(r)}}{2(1+\nu^{(r)})} \quad (6.173)$$

Die tief gestellten Indizes i und j stehen hierbei für die kartesischen Koordinaten x,y und z. Die Kennzeichnung „i“ steht für die partielle Ableitung gemäß der jeweiligen Variablen x,y oder z. Wie im Anhang 3 gezeigt, kann immer eine der Komponenten des Vektorpotentials zu Null gesetzt werden. Unter der Vorgabe, dass es sich bei den Papkovitch-Neuber-Potentialen um harmonische Funktionen handelt, kann deren Fouriertransformation in folgenden einfachen Ausdrücken geschrieben werden.

$$FFT_{xy} \Phi^{(r)} = \hat{\Phi}^{(r)} = A^{(r)}(\omega_x, \omega_y)e^{-\alpha z^{(r)}} + \bar{A}^{(r)}(\omega_x, \omega_y)e^{\alpha z^{(r)}} \quad (6.174)$$

$$FFT_{xy} \Psi_1^{(r)} = \hat{\Psi}_1^{(r)} = B^{(r)}(\omega_x, \omega_y)e^{-\alpha z^{(r)}} + \bar{B}^{(r)}(\omega_x, \omega_y)e^{\alpha z^{(r)}} \quad (6.175)$$

$$FFT_{xy} \Psi_3^{(r)} = \hat{\Psi}_3^{(r)} = C^{(r)}(\omega_x, \omega_y)e^{-\alpha z^{(r)}} + \bar{C}^{(r)}(\omega_x, \omega_y)e^{\alpha z^{(r)}} \quad (6.176)$$

Die Randbedingungen für die Druckverteilung auf der Oberfläche lauten:

$$\hat{\sigma}_{zz}^{(1)}(\omega_x, \omega_y, 0) = \hat{P}_t(\omega_x, \omega_y) \quad (6.177)$$

$$\hat{\sigma}_{zx}^{(1)}(\omega_x, \omega_y, 0) = \hat{S}_x(\omega_x, \omega_y) = \mu\hat{P}(\omega_x, \omega_y) \quad (6.178)$$

$$\hat{\sigma}_{zy}^{(1)}(\omega_x, \omega_y, 0) = \hat{S}_y(\omega_x, \omega_y) = 0 \quad (6.179)$$

Belastung an der Kontaktfläche
Druck wirkt in z-Richtung
Scherkräfte bzw. Torsionskräfte
entsprechend in x- oder y-Richtung

Die Kontinuitätsbedingungen für die Deformationen und Spannungskomponenten an den Schichtgrenzen.

$$\hat{\sigma}_{zj}^{(k)}(\omega_x, \omega_y, d_k) - \hat{\sigma}_{zj}^{(k+1)}(\omega_x, \omega_y, d_k) = 0 \quad (6.180)$$

$$\hat{u}_i^{(k)}(\omega_x, \omega_y, d_k) - \hat{u}_i^{(k+1)}(\omega_x, \omega_y, d_k) = 0 \quad (6.181)$$

Kontinuitätsbedingung:
z-Anteile der Spannungen;
und Deformationen an den Schicht-
grenzen sind gleich

Der hochgestellte Index k läuft hierbei bei einem Dreischichtmodell von 1 bis 2, bei einem Zweischichtmodell hat k den konstanten Wert 1. Wobei der Wert k=1 die Deckschicht und k+1 immer die tiefer liegende Schicht indiziert.

Eine weitere Randbedingung verlangt das Verschwinden der Deformationen und Spannungen für große z -Werte.

Daraus folgt:

$$\bar{A}^{(r)}(\omega_x, \omega_y) = \bar{B}^{(r)}(\omega_x, \omega_y) = \bar{C}^{(r)}(\omega_x, \omega_y) = 0 \quad (6.182)$$

Hierbei steht (r) stets für den Index der tiefsten Schicht. Somit ergeben sich je nach betrachtetem Schichtsystem immer $6 \cdot (r_{\max} - 1) + 3$ unabhängige Koeffizienten.

In [113] wird eine Herleitung für die daraus resultierenden fouriertransformierten Influenzkoeffizienten gegeben. Basierend auf dieser Arbeit geben Nogi et. al. [110] eine explizite Form der fouriertransformierten Transferfunktion für den Fall einer rauen undeformierbaren Sphäre gegen eine raue, elastische, beschichtete Oberfläche (keine Scherkraft) an. Ein weiterer Ansatz mit Papkovitch-Neuber-Potentialen für den elastisch plastischen Kontakt einer beschichteten rauen Oberflächen mit einer rauen Fläche wird von Bushan et. al. [17] gegeben. Eine Erweiterung dieses Modells auf raue Oberflächen mit einem Flüssigkeitsfilm wurde kürzlich von Cai et. al. [18] vorgestellt. In dieser Arbeit wird die Vorgehensweise von Liu et. al. [87] übernommen.

Bei den oben genannten Autoren werden die Koeffizienten der jeweiligen Potentiale durch eine analytische Lösung des linearen Gleichungssystems ermittelt. Dies ist bereits bei einem Zweischichtsystem mit 9 unabhängigen Koeffizienten kein triviales Unterfangen. Bei einem Dreischichtsystem mit 15 Unbekannten wird dieser Ansatz besonders bei zusätzlichen Scherkräften überaus aufwendig und wahrscheinlich fehlerbehaftet. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit ein numerischer Ansatz zur Lösung des resultierenden linearen Gleichungssystems verwendet. Da die angegebenen Formeln in [87] einige Tippfehler aufwiesen²², wird im Anhang die komplette Herleitung des linearen Gleichungssystems gegeben. Der besseren Lesbarkeit und einfacheren Schreibweise wegen werden im weiteren Text der Schichtindex nicht mit aufgeführt. Weiterhin werden die funktionalen Abhängigkeiten nicht explizit angegeben. Mit einer vereinfachten Darstellung der Frequenzvariablen ergeben sich die folgenden Schreibweisen.

1. Die Koeffizienten der fouriertransformierten Papkovitch-Neuber-Potentiale werden ohne Schichtindex und Funktionsvariablen geschrieben $\rightarrow A^{(r)}(\omega_x, \omega_y) = A, \dots$
2. Das Gleiche gilt für die Spannungen und Deformationen $\rightarrow \tilde{\sigma}_{zz}^{(r)}(\omega_x, \omega_y) = \tilde{\sigma}_{zz}, \dots$
3. Die Variablen im Frequenzraum werden der einfacheren Schreibweise wegen durch $\omega_x = m$ und $\omega_y = n$ substituiert $\rightarrow \alpha = \sqrt{m^2 + n^2}$

Zur Klarheit sind hier die zwei verwendeten Rechenregeln für Fouriertransformationen angegeben. Hierbei steht i für $\sqrt{-1}$.

$$FT_x \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x) \right] = i m \tilde{f}(m) \quad (6.183)$$

²² Hier sei dem Autor Liu S. für die schnelle Rückantwort mit den berichtigten Formeln gedankt.

$$FT_x[-ixf(x)] = \frac{\partial}{\partial m} \tilde{f}(m) \quad (6.184)$$

Zur Verdeutlichung wird die Anwendung dieser Rechenregeln an einigen Beispielen gezeigt. Die komplette Herleitung der Spannungskomponenten bzw. Deformationen kann in Anhang 4 bis Anhang 12 nachgelesen werden.

Anwendung der Rechenregel gemäß (6.183) ergibt z.B. für

$$FT_{xy}\left(\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}\Phi\right) = FT_x\frac{d}{dx}inFT_y\Phi = inimFT_{xy}\Phi = -nmAe^{-\alpha z} - nm\bar{A}e^{\alpha z}$$

Rechenregel (6.184) ergibt für das folgende Beispiel:

$$\begin{aligned} FT_{xy}\left(x\frac{d}{dz}\Psi_1\right) &= FT_y\left(FT_x\left(x\frac{d}{dz}\Psi_1\right)\right) = FT_y\left(-\frac{1}{i}\frac{d}{dm}FT_x\left(\frac{d}{dz}\Psi_1\right)\right) \\ &= \frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{i}\frac{d}{dm}FT_{xy}(\Psi_1)\right) = -\frac{1}{i}\frac{d}{dz}\frac{d}{dm}(Be^{-\alpha z} + \bar{B}e^{\alpha z}) \\ &= [imzB - i\alpha B' - i\frac{m}{\alpha}B]e^{-\alpha z} + [imz\bar{B} + i\alpha\bar{B}' + i\frac{m}{\alpha}\bar{B}]e^{\alpha z} \end{aligned}$$

Stellt man die Ableitung der B-Koeffizienten durch $\frac{\partial}{\partial m}B = B'$ bzw. $\frac{\partial}{\partial m}\bar{B} = \bar{B}'$ dar, so fallen durch

die Substitution $D = A + iB'$ und $\bar{D} = \bar{A} + i\bar{B}'$ alle Terme, welche die Ableitung der B-Koeffizienten enthalten weg (siehe hierzu die entsprechenden Herleitungen in den Anhängen).

Anwenden der o.g. Regeln auf die Bestimmungsgleichungen für die Spannungen (6.172) und Deformationen (6.171) ergibt die nachfolgenden aufgelisteten Formeln.

Spannungen in zz-Richtung: (siehe auch Anhang 4)

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{zz} &= \left\{ \alpha^2 D + [2im(1-\nu) - i\alpha zm]B + [2(1-\nu)\alpha + z\alpha^2]C \right\} e^{-\alpha z} + \\ &\quad \left\{ \alpha^2 \bar{D} + [2im(1-\nu) + i\alpha zm]\bar{B} + [-2(1-\nu)\alpha + z\alpha^2]\bar{C} \right\} e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (6.185)$$

Spannungen in xx-Richtung: (siehe auch Anhang 5)

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx} &= \left\{ -m^2 D + \left[-2im(2-\nu) + i\frac{zm^3}{\alpha} \right] B + [2\nu\alpha - zm^2]C \right\} e^{-\alpha z} + \\ &\quad \left\{ -m^2 \bar{D} + \left[-2im(2-\nu) - i\frac{zm^3}{\alpha} \right] \bar{B} + [-2\nu\alpha - zm^2]\bar{C} \right\} e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (6.186)$$

Spannungen in yy-Richtung: (siehe auch Anhang 6)

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{yy} &= \left\{ -n^2 D + \left[-2im\nu + i\frac{zmn^2}{\alpha} \right] B + [2\nu\alpha - zn^2]C \right\} e^{-\alpha z} + \\ &\quad \left\{ -n^2 \bar{D} + \left[-2im\nu - i\frac{zmn^2}{\alpha} \right] \bar{B} + [-2\nu\alpha - zn^2]\bar{C} \right\} e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (6.187)$$

Spannungen in zx-Richtung: (siehe auch Anhang 7)

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\sigma}}_{zx} = & \left\{ -im\alpha D + \left[2(1-\nu)\alpha + \frac{m^2}{\alpha} - m^2 z \right] B + [-im(1-2\nu) - zim\alpha] C \right\} e^{-\alpha z} + \\ & \left\{ im\alpha \bar{D} + \left[-2(1-\nu)\alpha - \frac{m^2}{\alpha} - m^2 z \right] \bar{B} + [-im(1-2\nu) + zim\alpha] \bar{C} \right\} e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (6.188)$$

Spannungen in zy-Richtung (siehe auch Anhang 8)

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\sigma}}_{zy} = & \left\{ -in\alpha D + \left[\frac{nm}{\alpha} - mnz \right] B + [-in(1-2\nu) - zin\alpha] C \right\} e^{-\alpha z} + \\ & \left\{ in\alpha \bar{D} + \left[-\frac{mn}{\alpha} - mnz \right] \bar{B} + [-in(1-2\nu) + zin\alpha] \bar{C} \right\} e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (6.189)$$

Spannungen in xy-Richtung: (siehe auch Anhang 9)

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\sigma}}_{xy} = & \left\{ -nmD + \left[-2(1-\nu)in + \frac{nnmz^2}{\alpha} \right] B + [-znm] C \right\} e^{-\alpha z} + \\ & \left\{ -nm\bar{D} + \left[-2(1-\nu)in - \frac{nnmz^2}{\alpha} \right] \bar{B} + [-znm] \bar{C} \right\} e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (6.190)$$

Deformation in z-Richtung: (siehe auch Anhang 10)

$$2G\tilde{\tilde{u}}_z = \left[-\alpha D + \left[-i\frac{m}{\alpha} + imz \right] B - [(3-4\nu) - z\alpha] C \right] e^{-\alpha z} + \left[\alpha \bar{D} + \left[i\frac{\omega_x}{\alpha} + imz \right] \bar{B} - [(3-4\nu) + z\alpha] \bar{C} \right] e^{\alpha z} \quad (6.191)$$

Deformation in x-Richtung (siehe auch Anhang 11):

$$2G\tilde{\tilde{u}}_x = \left\{ imD + \left[\frac{m^2 z}{\alpha} - (4-4\nu) \right] B + imz C \right\} e^{-\alpha z} + \left\{ im\bar{D} + \left[-\frac{m^2 z}{\alpha} - (4-4\nu) \right] \bar{B} + imz \bar{C} \right\} e^{\alpha z} \quad (6.192)$$

Deformation in y-Richtung (siehe auch Anhang 12):

$$2G\tilde{\tilde{u}}_y = \left\{ inD + B \frac{mnz}{\alpha} + inz C \right\} e^{-\alpha z} + \left\{ in\bar{D} - \bar{B} \frac{mnz}{\alpha} + inz \bar{C} \right\} e^{\alpha z} \quad (6.193)$$

Einsetzen von (6.186) bis (6.193) in die Randbedingungen (6.177) und Kontinuitätsbedingungen (6.181) ergibt ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten. Es sei an dieser Stelle herausgestellt, dass dieses Gleichungssystem für jeden Punkt im Frequenzraum gelöst werden muss. Die Darstellung des Gleichungssystems in Matrixform ergibt:

$$M(m, n) \cdot \vec{k}(m, n) = \vec{p}(m, n) \quad (6.194)$$

Der Vektor $\vec{k}(m, n)$ enthält hierbei die gesuchten Koeffizienten der fouriertransformierten Papkovitch-Neuber-Potentiale. Die Matrix $M(m, n)$ enthält die Frequenzterme und $\vec{p}(m, n)$ ist die Fouriertransformierte der Normal- und Tangentialbelastung an der Kontaktoberfläche. Die Komponenten der Matrix $M(m, n)$ werden explizit für ein Zwei- und Dreischichtsystem im Anhang 13 angegeben. Um die Programmierung des Gleichungssystems so zu vereinfachen, dass die Matrix des

Zweischichtsystem durch einfache Erweiterung in ein Dreischichtsystem überführt werden kann, wird das lineare Gleichungssystem nach Zeilen geordnet wie folgt aufgebaut. Für ein Zwei- und Dreischichtsystem lauten die ersten 9 Zeilen:

1. $\hat{\sigma}_{zz}^{(1)}(m, n, 0) = \hat{P}(m, n)$ Druckverteilung an der Oberfläche
2. $\hat{\sigma}_{zx}^{(1)}(m, n, 0) = \hat{T}_x(m, n) = \mu \hat{P}(m, n)$ Scherkraft an der Oberfläche in x-Richtung
3. $\hat{\sigma}_{zy}^{(1)}(m, n, 0) = 0$ Scherkraft an der Oberfläche in y-Richtung
4. $\hat{\sigma}_{zz}^{(1)}(m, n, d_1) - \hat{\sigma}_{zz}^{(2)}(m, n, d_1) = 0$ Kontinuität von σ_{zz} an der Schichtgrenze 1
5. $\hat{\sigma}_{zy}^{(1)}(m, n, d_1) - \hat{\sigma}_{zy}^{(2)}(m, n, d_1) = 0$ Kontinuität von σ_{zy} an der Schichtgrenze 1
6. $\hat{\sigma}_{zx}^{(1)}(m, n, d_1) - \hat{\sigma}_{zx}^{(2)}(m, n, d_1) = 0$ Kontinuität von σ_{zx} an der Schichtgrenze 1
7. $\hat{u}_x^{(1)}(m, n, d_1) - \hat{u}_x^{(2)}(m, n, d_1) = 0$ Kontinuität von u_x an der Schichtgrenze 1
8. $\hat{u}_y^{(1)}(m, n, d_1) - \hat{u}_y^{(2)}(m, n, d_1) = 0$ Kontinuität von u_y an der Schichtgrenze 1
9. $\hat{u}_z^{(1)}(m, n, d_1) - \hat{u}_z^{(2)}(m, n, d_1) = 0$ Kontinuität von u_z an der Schichtgrenze 1

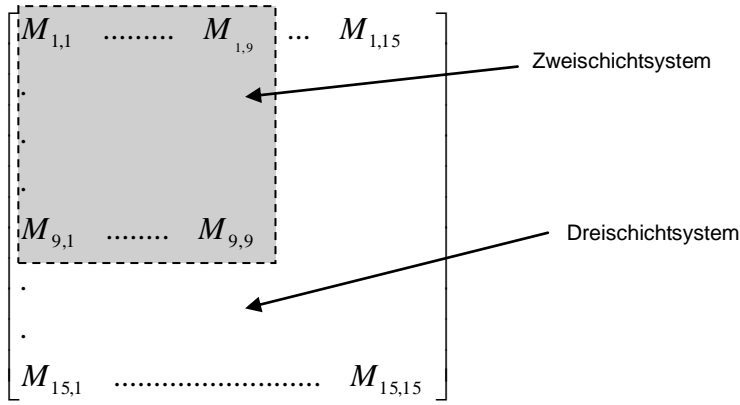
Für das Dreischichtsystem erfolgt die Erweiterung des Gleichungssystems:

10. $\hat{\sigma}_{zz}^{(2)}(m, n, d_2) - \hat{\sigma}_{zz}^{(3)}(m, n, d_2) = 0$ Kontinuität von σ_{zz} an der Schichtgrenze 2
11. $\hat{\sigma}_{zy}^{(2)}(m, n, d_2) - \hat{\sigma}_{zy}^{(3)}(m, n, d_2) = 0$ Kontinuität von σ_{zy} an der Schichtgrenze 2
12. $\hat{\sigma}_{zx}^{(2)}(m, n, d_2) - \hat{\sigma}_{zx}^{(3)}(m, n, d_2) = 0$ Kontinuität von σ_{zx} an der Schichtgrenze 2
13. $\hat{u}_x^{(2)}(m, n, d_2) - \hat{u}_x^{(3)}(m, n, d_2) = 0$ Kontinuität von u_x an der Schichtgrenze 2
14. $\hat{u}_y^{(2)}(m, n, d_2) - \hat{u}_y^{(3)}(m, n, d_2) = 0$ Kontinuität von u_y an der Schichtgrenze 2
15. $\hat{u}_z^{(2)}(m, n, d_2) - \hat{u}_z^{(3)}(m, n, d_2) = 0$ Kontinuität von u_z an der Schichtgrenze 2

Hierbei steht d_1 für die Dicke der Deckschicht. Der Term d_2 steht für die additive Dicke der Deck- und Zwischenschicht. Somit ergibt sich für ein Zweischichtsystem eine quadratische 9×9 Matrix, die, wie Abbildung 6.30 skizziert, im Falle eines Dreischichtsystems auf eine 15×15 Matrix erweitert wird. Beim Vergleich mit der gängigen Literatur [87][17] ist zu beachten, dass dort an den Schichtgrenzen die z -Variable erneut bei Null beginnt.

Stellt man die Variablen im Frequenzraum in deren diskreten Form gemäß (6.156) dar, so ergibt sich das lineare Gleichungssystem aus Glg. (6.194) wie folgt:

$$M_{i,j} \cdot \vec{k}_{i,j} = \vec{p}_{i,j} \quad (6.195)$$

Abbildung 6.30: Zwei- und Dreischicht Koeffizientenmatrix M^{23}

Das oben aufgeführte Gleichungssystem ergibt für $\vec{k}_{i,j}$ den folgenden in transponierter Form dargestellten Vektor.

Für ein Zweischichtsystem:

$$\vec{k}_{i,j}^T = (D_{i,j}^{(1)}, \bar{D}_{i,j}^{(1)}, B_{i,j}^{(1)}, \bar{B}_{i,j}^{(1)}, C_{i,j}^{(1)}, \bar{C}_{i,j}^{(1)}, D_{i,j}^{(2)}, B_{i,j}^{(2)}, C_{i,j}^{(2)}) \quad (6.196)$$

Gemäß Randbedingung (6.182) gilt:

$$\bar{D}_{i,j}^{(2)} = \bar{B}_{i,j}^{(2)} = \bar{C}_{i,j}^{(2)} = 0 \quad (6.197)$$

Für ein Dreischichtsystem ergibt sich analog

$$\vec{k}_{i,j}^T = (D_{i,j}^{(1)}, \bar{D}_{i,j}^{(1)}, B_{i,j}^{(1)}, \bar{B}_{i,j}^{(1)}, C_{i,j}^{(1)}, \bar{C}_{i,j}^{(1)}, D_{i,j}^{(2)}, B_{i,j}^{(2)}, C_{i,j}^{(2)}, \bar{D}_{i,j}^{(2)}, \bar{B}_{i,j}^{(2)}, \bar{C}_{i,j}^{(2)}, D_{i,j}^{(3)}, B_{i,j}^{(3)}, C_{i,j}^{(3)}) \quad (6.198)$$

Hierbei gilt gemäß (6.182)

$$\bar{D}_{i,j}^{(3)} = \bar{B}_{i,j}^{(3)} = \bar{C}_{i,j}^{(3)} = 0 \quad (6.199)$$

Die transponierte Form des Vektors $\vec{p}_{i,j}$ hat folgende Form:

$$\vec{p}_{i,j}^T = (\hat{p}_{i,j}, \mu \cdot \hat{p}_{i,j}, 0, 0, \dots, 0) \quad (6.200)$$

Hierbei stellen die $\hat{p}_{i,j}$ die Elemente der FFT der Druckverteilung dar, die durch Erweiterung des virtuellen Rechengebietes auf $2N_x \times 2N_y$ Punkte und „Zero Padding“ gebildet werden. Die Anordnung der Elemente erfolgt in „wrap around order“ (siehe Abbildung 6.27).

Die Lösung dieses Gleichungssystems erfolgt für jeden Punkt im Frequenzraum über das Gauß/Jordan-Verfahren mit Zeilen und Reihentausch (siehe auch [147]). Durch Rücktransformation der Bestimmungsgleichungen (6.185) bis (6.193) und Reduzierung der Werte auf den Bereich $N_x \times N_y$ ergeben sich die entsprechenden Spannungen und Deformationen. Für $n=0$ sind jedoch die linearen Gleichungen bezüglich σ_{zy} (Zeilen 3, 5 und 11) und u_y (Zeilen 8 und 14) nicht auswertbar ($0=0$).

²³ Zur besseren Darstellung wird hier auf die Darstellung der funktionalen Abhängigkeit von den Frequenztermen verzichtet.

Bedingt durch die Bereichserweiterung können jedoch zwei Aussagen bzw. Abschätzungen getroffen werden. Zum Einen ist die auf der Oberfläche gegebene Spannungsverteilung hinsichtlich σ_{zy} , an den Rändern des Rechengebietes per Vorgabe mit dem Wert Null belegt („Zero Padding“). Zum anderen ist zu erwarten, dass die entsprechenden Deformationen und Spannungskomponenten an den Rändern des Rechenbereiches symmetrisch gegen Null abfallen. Daher werden für $n=0$ Hilfsbedingungen eingesetzt, die auf Grund der obigen Überlegungen das gesuchte Ergebnis nicht verfälschen.

$$\sigma_{zy}^{(k)}(m_i, 0, z^{(k)}) - \sigma_{zy}^{(k)}(m_i, 0, z^{(k+1)}) \rightarrow \sigma_{zy}^{(k)}(0, m_i, z^{(k)}) - \sigma_{zy}^{(k)}(0, m_i, z^{(k+1)}) \quad (6.201)$$

$$u_y^{(k)}(m_i, 0) - u_y^{(k+1)}(m_i, 0) \rightarrow u_y^{(k)}(0, m_i) - u_y^{(k+1)}(0, m_i) \quad (6.202)$$

Einsetzen dieser Hilfsbedingungen in (6.195) ergibt dann ein numerisch lösbares Gleichungssystem. Der Punkt $(m, n) = (0, 0)$ im Frequenzraum wird nicht zur Berechnung herangezogen. Im Falle von u_z ergibt dieser Wert zum Beispiel einen konstanten Offset (rigid body approach) [86]. Die Gleichungen (6.185) bis (6.193) werden an diesen Stellen Null gesetzt.

6.3 Der Engewiderstand

Im Folgenden soll versucht werden, aus der Kenntnis der Druckverteilung auf der Kontaktoberfläche, und somit bei bekannter a-Spot Verteilung, auf den Engewiderstand eines elektrischen Kontaktpunktes zurück zu schließen. Hierbei soll des Weiteren der Schichtaufbau des Kontaktsystems mit in Betracht gezogen werden. Die Effekte auf Grund von Deckschichten werden im Rahmen dieser Arbeit noch nicht betrachtet. Um Tunneleffekte analysieren zu können, wäre eine z-Werte-Auflösung der Simulation im Nanometerbereich notwendig. Dies wäre jedoch zu Speicherplatz- und Rechenzeintensiv. Da wegen der plastischen Deformation der a-Spots und des geringen Anteils von Bereichen mit einem verbleibenden Kontaktspace im Nanometerbereich (siehe Kapitel 7.2 und 8) - zumindest bei den edlen Kontaktoberflächen - kein nennenswerter Anteil von Tunnelströmen zu erwarten ist, wird auf die Thematik in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen.

6.3.1 Grundlegende theoretische Arbeiten

Es ist allgemein bekannt und bereits zu Beginn des VDE-Seminars „Kontaktverhalten und Schalten“ mehrmals publiziert [100][101][42], dass die Holm'sche Formel (1.1) nur eine grobe Abschätzung darstellt. Der Umstand, dass eine reale Kontaktfläche aus mehreren a-Spots besteht, wird in der Holm'schen Formel nicht berücksichtigt. Basierend auf der Annahme, dass sich die Stromdichteverteilung über mehrere a-Spots so einstellt, dass es zu einer minimalen Wärmeerzeugung kommt, leitet Greenwood [35] die nachstehende Formel für den Kontaktwiderstand her.

$$R_E = \frac{\rho}{2 \sum a_i} + \frac{\rho}{\pi} \frac{\left(\sum \sum \frac{a_i a_j}{s_{ij}} \right)}{\left(\sum a_i \right)^2} \quad i \neq j \quad (6.203)$$

Hierbei bedeutet s_{ij} den Abstand zweier a-Spots. Die Form der a-Spots wird hierbei als kreisförmig angenommen. Ersetzt man die individuellen a-Spot-Radien durch deren Mittelwert, so kann obige Gleichung vereinfacht werden zu:

$$R_E \approx \frac{\rho}{2 \sum a_i} + \frac{\rho}{\pi \cdot n^2} \left(\sum \sum \frac{1}{s_{ij}} \right) \quad i \neq j \quad (6.204)$$

Setzt man den mittleren Abstand der a-Spots mit $a/2$ an, kann diese Gleichung weiter vereinfacht werden. Hierbei bedeutet der Term a wieder den Hertz'schen Kontaktradius. Durch Einsetzen von $a/2$ anstelle der s_{ij} in Formel (6.204) und für große n vereinfacht sich obige Gleichung zu:

$$R_E \approx \frac{\rho}{2 \sum a_i} + \frac{2\rho}{\pi \cdot a} \quad (6.205)$$

Einen experimentellen Ansatz, die Wechselwirkung einzelner a-Spots zu bestimmen wird in [30] beschrieben. Hier versucht man über verschiedene Lochblenden, die in einem mit Quecksilber gefüllten Zylinder eingebracht sind, empirische Näherungsformeln für den Engewiderstand zu ermitteln. Im Allgemeinen ist jedoch die Verteilung und individuelle Größe der a-Spots nicht bekannt. In der Praxis kommen daher oft empirische Formeln zum Einsatz, welche die Normalkraft/Engewiderstand-Beziehung annähern. In der Literatur [127][44] ist in Anlehnung an Glg. (2.4) folgende Formel angegeben:

$$R_E = 0,89 \cdot \rho \sqrt{\frac{H}{F_N}} \quad (6.206)$$

Eine weitere häufig zitierte Beziehung ist die von Kesselring [67][148].

$$R_{\text{Kontakt}} = K \cdot \rho \cdot F_N^{-n} \quad (6.207)$$

Es ist zu beachten, dass diese Beziehung nicht den Engewiderstand, sondern den gesamten Kontaktwiderstand annähert. Der Term K stellt einen Topographiefaktor dar, welcher den Zustand der Oberfläche in Betracht zieht. In der Literatur [127][66][131] werden zum Beispiel die in Tabelle 6.5 aufgeführten Werte angegeben.

Tabelle 6.5: Werte des Topographiefaktors für unterschiedliche Kupferoberflächen

Zustand der Kontaktoberfläche	Topographiefaktor K
Cu fein gebürstet	45
Cu grob gebürstet	110
Cu sandgestrahlt	150

An Hand von Tabelle 6.5 ist bereits sehr gut zu erkennen, dass die Struktur der Kontaktoberfläche einen sehr starken Einfluss auf die a-Spot-Verteilung und somit den Engewiderstand haben muss. Für den Exponenten „ n “ in Glg. (6.207) werden Werte zwischen 0,9 und 1 angegeben. Niedrigere Werte als $n=0,9$ deuten auf einen mit einer Fremdschicht behafteten Kontakt hin [148].

6.3.2 Angewandte Verfahren zur numerischen Simulation des Engewiderstandes

Um die Wechselwirkung der individuellen a-Spots zu bestimmen, muss die Feldverteilung im Innern der Kontaktkörper bekannt sein. Weiterhin ist es notwendig, den jeweiligen Schichtaufbau mit in die Rechnung einzubeziehen. Der in dieser Arbeit verfolgte Ansatz löst die Laplace-Gleichung für raumladungsfreie Felder mittels Differenzenverfahren und Gauß-Seidel-Iteration. Hierbei wird die Potentialverteilung im Bereich des Kontaktgebietes iterativ bestimmt. Das in [116] skizzierte Differenzenverfahren wird hierzu auf ein dreidimensionales Rechenggebiet erweitert.

Für homogene Medien gilt:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho^*}{\varepsilon} \quad (6.208)$$

Der Term ρ^* stellt hier die Raumladungsdichte dar und ist nicht mit dem spezifischen Widerstand zu verwechseln. Der Feldstärkevektor \vec{E} eines wirbelfreien Feldes kann im Allgemeinen durch den negativen Gradienten eines skalaren Potentials dargestellt werden.

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla \varphi \quad (6.209)$$

Einsetzen von Glg. (6.208) in Glg. (6.209) ergibt die Gleichung von Poisson:

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho^*}{\varepsilon} \quad (6.210)$$

In einem raumladungsfreien Gebiet ergibt sich daraus die Laplacesche Gleichung.

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0 \quad (6.211)$$

Die Laplacesche Gleichung lautet in kartesischen Koordinaten:

$$\Delta \varphi(x, y, z) = \frac{d^2 \varphi(x, y, z)}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi(x, y, z)}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi(x, y, z)}{dz^2} = 0 \quad (6.212)$$

Überzieht man das Rechenggebiet mit einem äquidistanten kubischen Raumgitter, so kann das Potential im Punkt (x_i, y_j, z_k) durch eine Taylorreihe 2ter Ordnung angenähert werden. Die Herleitung analog zu [116] siehe Anhang 14.

$$\varphi(x_i, y_j, z_k) = \frac{\varphi(x_{i-1}, y_j, z_k) + \varphi(x_{i+1}, y_j, z_k) + \varphi(x_i, y_{j-1}, z_k) + \varphi(x_i, y_{j+1}, z_k) + \varphi(x_i, y_j, z_{k-1}) + \varphi(x_i, y_j, z_{k+1})}{6} \quad (6.213)$$

Das Potential innerhalb eines Raumgitters ergibt sich somit durch Mittelwertbildung bezüglich aller Nachbarpunkte.

An den Rändern in z-Richtung gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(x_i, y_j, z_0) &= \varphi_1 \\ \varphi(x_i, y_j, z_{N_z}) &= \varphi_2 \end{aligned} \quad \text{mit } \varphi_1 \neq \varphi_2 \quad (6.214)$$

Zur Berechnung der Potentialverteilung im Bereich des Kontaktpunktes wird wie folgt vorgegangen:

Zuerst wird zur Modellierung des Kontaktpunktes ein dreidimensionales Gitter erzeugt. Die Maschenweite in x- und y-Richtung ergibt sich durch die jeweils zur Berechnung der Deformationen vorgegebene laterale Ausdehnung und Auflösung N_x . Die Maschenweite in z-Richtung ergibt sich aus den folgenden Überlegungen. Im Gegensatz zur Berechnung der mechanischen Kontaktcharakteristika können die z-Werte nicht mehr als beliebige Gleitkommazahl in die Rechnung übernommen werden, sondern müssen analog zu den x- und y-Werten als diskrete Wertefolge behandelt werden (siehe auch Abbildung 6.31). Die Maschenweite muss hierbei so gering gesetzt werden, dass Oberflächenstrukturen noch damit erfasst werden können. Weiterhin müssen die Ränder des Rechenbereiches ausreichend weit von der Kontaktfläche (z-Richtung) entfernt sein, damit eine parallel zur x/y-Ebene verlaufende Äquipotentialfläche angenommen werden kann. Dies ist gleichbedeutend mit der Bedingung, dass der Einfluss der a-Spots auf die Potentialverteilung so weit abgeklungen ist, dass ein konstantes Potential gegeben ist (siehe auch Glg. (6.214)). Da eine typische Kontaktrauheit $\sigma \sim 0.2 \mu\text{m}$ beträgt, muss die Auflösung in z-Richtung $\sim 0,02 \mu\text{m}$ betragen, um eine hinreichend feine Modellierung der Potentiallinien im Kontaktbereich zu erzielen. Bei einer Auflösung von $0,02 \mu\text{m}$ und einer untersuchten Leiterlänge von $H=0,02 \text{ mm}$ ergibt sich die Anzahl zu $N_H=1000$ Lagen. Eine variable Gitterweite in z-Richtung gestaltet sich auf Grund der beliebig klein wählbaren Kontaktradien als nicht trivial (siehe Abbildung 6.32). In einem ersten Iterationsschritt werden sämtliche Raumpgitterpunkte mit einem Startwert belegt. Hierbei erhalten sämtliche Gitterpunkte, die innerhalb des ersten Kontaktkörpers liegen den Startwert φ_1 . Die Gitterpunkte innerhalb des zweiten Kontaktes werden entsprechend mit dem Startwert φ_2 belegt. Sämtliche Maschenpunkte außerhalb der Kontaktkörper werden mit dem Wert Null belegt. Ausgehend vom Indexpunkt $[i=0, j=0, z=1]$ erfolgt nun analog zum Gauß-Seidel-Verfahren die Neuberechnung der Potentialwerte. Wie in Abbildung 6.33 für den zweidimensionalen Fall dargestellt, erfolgt die Neuberechnung sukzessive mit zeilenartig aufsteigenden Indexvariablen.

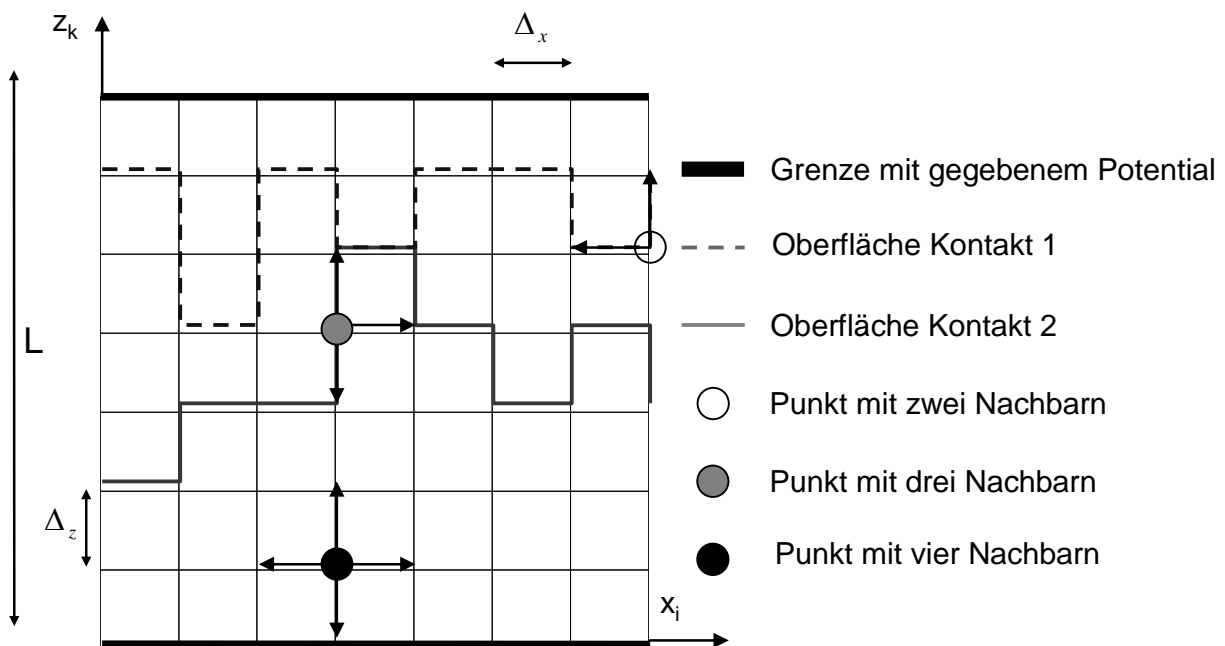


Abbildung 6.31: Prinzipielle Darstellung der des Rechengitters zur Bestimmung der Potentialverteilung (gezeigt x/y Ebene)

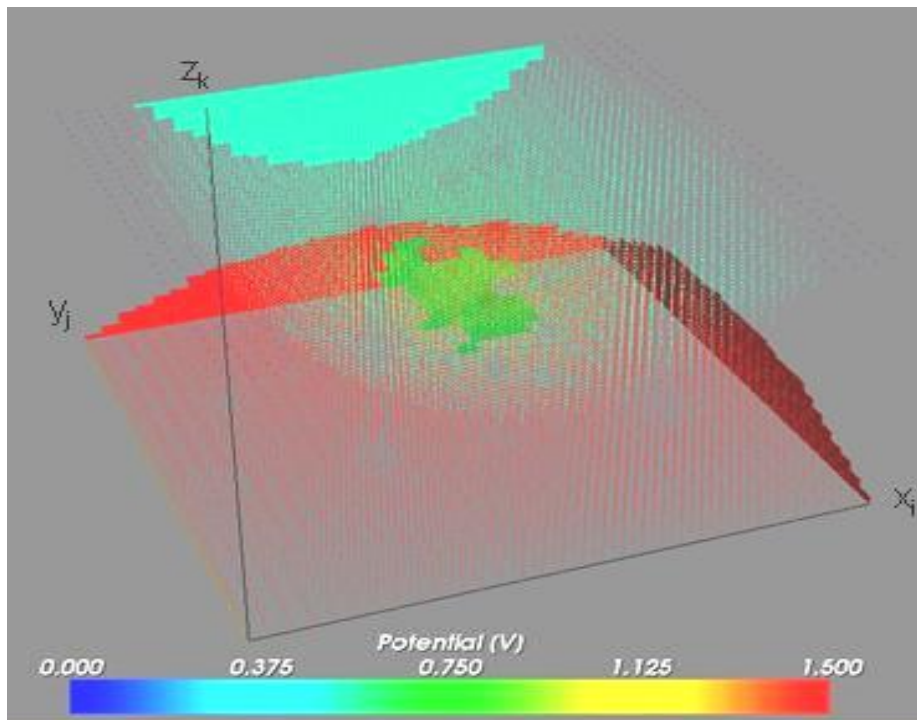


Abbildung 6.32: Raumgitter mit x/y Auflösung 32 Punkte. In z-Richtung sind 64 von 192 Punkten gezeigt. Die roten beziehungsweise grünen Bereiche stellen die Rechenpunkte zweier sphärischer Kontakte dar. Bereiche mit $\varphi(x,y,z) = 0$ sind ausgeblendet und werden nicht in der Berechnung berücksichtigt. Bereiche mit flächiger Farbgebung kennzeichnen die Lage frei verschiebbarer Schnittebenen.

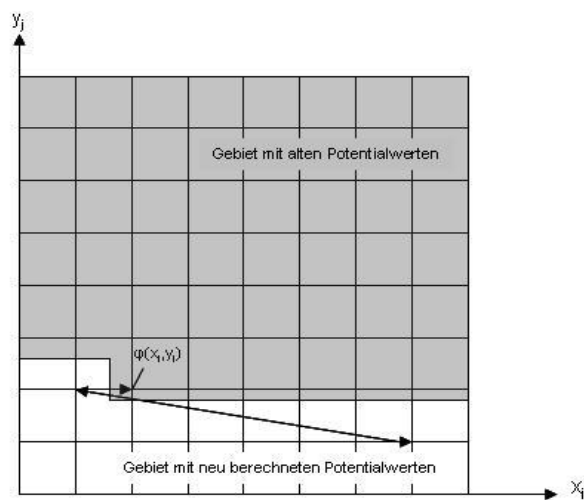


Abbildung 6.33: Ablauf der Potentialberechnung nach dem Iterationsverfahren. (gezeigt x/y-Ebene)

Maschenpunkte die nicht innerhalb eines Kontaktkörpers liegen werden nicht in die Iterationsschritte mit einbezogen. Unter Einbeziehung der Randbedingung (6.214) wird für jeden zu berechnenden Maschenpunkt geprüft, welche der sechs benachbarten Maschenpunkte innerhalb der Kontaktkörper liegen. Beim Fehlen eines Nachbarpunktes z.B. in $-x$ -Richtung ist für den Term $\varphi(x_{i-1}, y_j, z_k)$ in Glg. (6.213) $\varphi(x_{i+1}, y_j, z_k)$ einzusetzen. Dies ist gleichbedeutend mit der Bedingung, dass die Feldlinien und somit der Stromdichtevektor parallel zu den Körperperrändern verläuft (siehe Abbildung 6.31). Für Maschenpunkte innerhalb der jeweiligen Kontaktkörper erfolgt eine weitere Prüfung, ob der aktuelle

Maschenpunkt $P_{i,j,k}$ einen Punkt auf einer Grenzfläche zweier Kontaktschichten darstellt. Beschreibt man die Topographien der beiden Kontaktpartner als zweidimensionale Datenmatrizen $K1$ und $K2$, so können die Tests bzgl. Schichtgrenzen wie folgt definiert werden.

Grenzfläche Grundmaterial/Zwischenschicht Kontakt 1 \rightarrow

$$P_{i,j,k} \leq K1_{i,j} - d_{K1}^{(1)} - d_{K1}^{(2)} \leq P_{i,j,k+1} \quad (6.215 \text{ a.})$$

Grenzfläche Zwischenschicht/Deckschicht Kontakt 1 \rightarrow

$$P_{i,j,k} \leq K1_{i,j} - d_{K1}^{(1)} \leq P_{i,j,k+1} \quad (6.215 \text{ b.})$$

Punkt ist a-Spot \rightarrow

$$P_{i,j,k} \leq K1_{i,j} \quad \wedge \quad K2_{i,j} \leq P_{i,j,k+1} \quad \wedge \quad K1_{i,j} = K2_{i,j} \quad (6.215 \text{ c.})$$

Grenzfläche Deckschicht/Zwischenschicht Kontakt2 \rightarrow

$$P_{i,j,k} \leq K2_{i,j} + d_{K2}^{(1)} \leq P_{i,j,k+1} \quad (6.215 \text{ d.})$$

Grenzfläche Zwischenschicht/Grundmaterial Kontakt 2 \rightarrow

$$P_{i,j,k} \leq K2_{i,j} + d_{K2}^{(1)} + d_{K2}^{(2)} \leq P_{i,j,k+1} \quad (6.215 \text{ e.})$$

In den Formeln 6.215 a. – e. kennzeichnen die Terme $d_{K1}^{(1)}$ bis $d_{K2}^{(2)}$ die Schichtdicken der Deck- und Zwischenschicht der beiden Kontaktpartner (siehe auch Abbildung 6.29). Die Oberflächen entsprechen den deformierten und gemäß Abbildung 7.40 kontaktierenden Topographien.

Für den Potentialabfall an den Schichtgrenzen gelten folgende Überlegungen. An den Schichtgrenzen ist das Verhältnis des Potentialabfalls in z-Richtung gleich dem Verhältnis der spezifischen Widerstände (siehe Abbildung 6.34). Dies folgt aus der Konstanz der Stromdichte über die Schichtgrenze hinweg.

$$\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_2} = \frac{\varphi_{i-1} - \varphi_i}{\varphi_i - \varphi_{i+1}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (6.216)$$

Die Auflösung obiger Gleichung nach φ_i ergibt:

$$\varphi_i = \frac{\rho_2 \cdot \varphi_{i-1} + \rho_1 \cdot \varphi_{i+1}}{\rho_2 + \rho_1} \quad (6.217)$$

Für den dreidimensionalen Fall folgt analog:

$$\varphi(x_i, y_j, z_k) = \frac{\rho_2 \cdot \varphi(x_i, y_j, z_{k-1}) + \rho_1 \cdot \varphi(x_i, y_j, z_{k+1})}{\rho_1 + \rho_2} \quad (6.218)$$

Dabei gibt ρ_1 den spezifischen Widerstand im Bereich z_{k-1} und ρ_2 den spezifischen Widerstand im Bereich z_{k+1} an. Weiterhin wird zur Vereinfachung ausgegangen, dass an den Schichtgrenzen der überwiegende Teil der Stromrichtung in z-Richtung erfolgt.

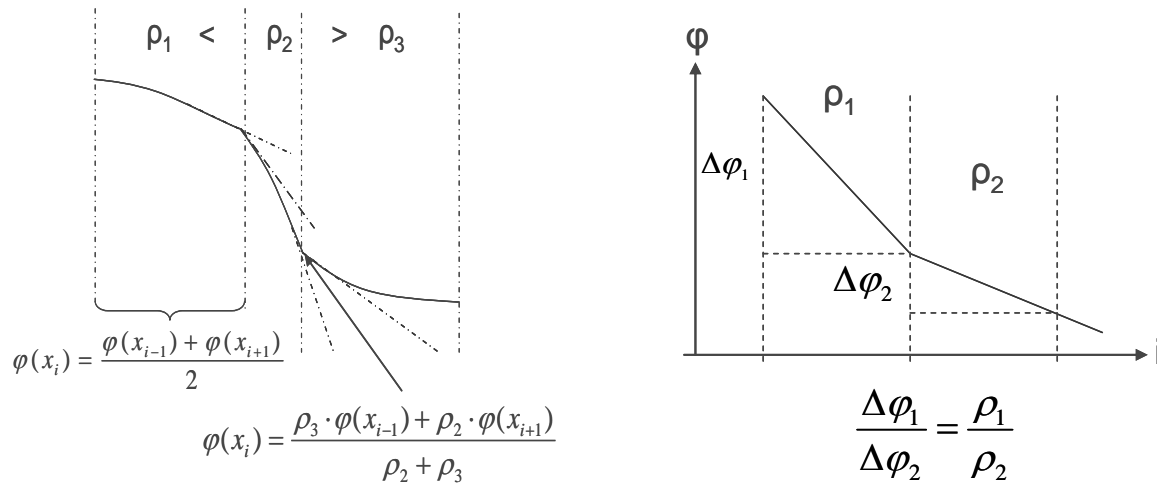


Abbildung 6.34: Potentialabfall an Grenzen unterschiedlicher Leitfähigkeit

Die iterative Neuberechnung der Potentialwerte im homogenen Medium erfolgt in Anlehnung an [116]. Indiziert man den aktuellen Iterationsdurchlauf in der Form $\varphi^n(x_i, y_j, z_k)$, so kann eine erhöhte Konvergenz wie folgt erzielt werden.

Mit der Einführung einer Hilfsgröße der Form:

$$\begin{aligned} \text{hilf} &= \varphi^n(x_{i-1}, y_j, z_k) + \varphi^n(x_{i+1}, y_j, z_k) \\ &+ \varphi^n(x_i, y_{j-1}, z_k) + \varphi^n(x_i, y_{j+1}, z_k) \\ &+ \varphi^n(x_i, y_j, z_{k-1}) + \varphi^n(x_i, y_j, z_{k+1}) \\ &- 6 \cdot \varphi^n(x_i, y_j, z_k) \end{aligned} \quad (6.219)$$

ergibt sich der neu berechnete Potentialwert unter Beachtung eines Relaxationsfaktors ω_R zu:

$$\varphi^{n+1}(x_i, y_j, z_k) = \varphi^n(x_i, y_j, z_k) + \omega_R \cdot \text{hilf} \quad (6.220)$$

Der Relaxationsfaktor liegt typischerweise im Bereich $1 \leq \omega_R < 2$.

Ein Abbruch des Iterationsprozesses erfolgt, wenn die größte Differenz zwischen dem neu berechneten Potentialwert und dem vorhergehenden Wert kleiner als eine vorgegebene Genauigkeitsschwelle $\varepsilon^{\text{itera}}$ ist.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein weiteres Verfahren entwickelt, um die Konvergenz der Iteration zu erhöhen. Wie bereits zu Beginn des Abschnittes erwähnt, wird eine sehr feine Maschenweite benötigt, um die Rauheitsstrukturen der Kontaktoberflächen zu erfassen. Solche engmaschigen Gitter benötigen eine entsprechend große Anzahl an Iterationsschritten, um zu konvergieren. Um dieses zu umgehen, wird die Iteration in mehreren Stufen durchgeführt. In einer ersten Iteration wird die Maschenweite in z-Richtung um den Faktor 2^n vergrößert. Hierbei liegt n zwischen 3 und 4. Wie in Abbildung 6.35 a. und b. verdeutlicht, konvergiert ein gröberes Gitter um ein Vielfaches schneller als ein entsprechend feineres Gitter.

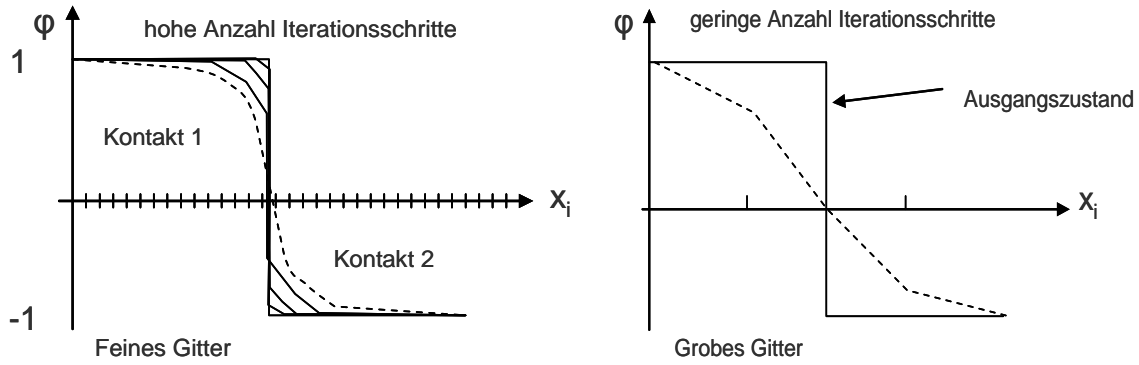


Abbildung 6.35 a. b.: Iterative Lösung der Laplace Gleichung mit Gauß-Seidel-Iteration. a: Feines Gitter;

b: Grobes Gitter

Nach Konvergenz der groben Iteration wird die z-Maschenweite um den Faktor 2 verringert ($n = n-1$) und mit Werten aus dem groben Gitter aufgefüllt. Hierbei gilt:

$$\varphi(x_i, y_j, z_k) = \varphi(x_i, y_j, z_{k+1}) \quad (6.221)$$

Dieses wird nach erneuter Iteration so lange wiederholt bis $n=1$.

Ein vereinfachtes Flussdiagramm wird in Abbildung 6.36 gezeigt. Zur besseren Darstellung sind die Abfragen bezüglich Anzahl an Nachbarpunkten nicht mit aufgeführt. Ist die Potentialverteilung innerhalb der Kontaktkörper bekannt, so kann durch einfache Weise die Feld- und Stromdichtverteilung berechnet werden.

Für die Feldverteilung gilt Glg. (6.209). Die einzelnen Vektor Komponenten errechnen sich wie folgt:

$$E_x(x_i, y_j, z_k) = \frac{\varphi(x_{i-1}, y_j, z_k) - (x_{i-2}, y_j, z_k) + (x_{i+2}, y_j, z_k) - (x_{i+1}, y_j, z_k)}{2 \cdot \Delta x} \quad (6.222 \text{ a.})$$

$$E_y(x_i, y_j, z_k) = \frac{\varphi(x_i, y_{j-1}, z_k) - (x_i, y_{j-2}, z_k) + (x_i, y_{j+2}, z_k) - (x_i, y_{j+1}, z_k)}{2 \cdot \Delta y} \quad (6.222 \text{ b.})$$

$$E_z(x_i, y_j, z_k) = \frac{\varphi(x_i, y_j, z_{k-1}) - (x_i, y_j, z_{k-2}) + (x_i, y_j, z_{k+2}) - (x_i, y_j, z_{k+1})}{2 \cdot \Delta z} \quad (6.222 \text{ c.})$$

Die Stromdichtverteilung errechnet sich gemäß:

$$\vec{J} = \frac{1}{\rho} \vec{E} \quad (6.223)$$

Die Multiplikation des Kehrwertes des spezifischen Widerstandes mit dem elektrischen Feldvektor muss wieder unter Beachtung der jeweiligen Schichtenabfolge analog Glg. (6.215 a. – e.) erfolgen. Ist die Stromdichteverteilung bekannt, kann der Engwiderstand wie folgt berechnet werden.

Unter der Annahme, dass die Flussrichtung des Stromes durch die a-Spot nur in z-Richtung erfolgt, ergibt sich der durch die gesamte Kontaktfläche fließende Strom durch folgende einfache Summation über alle a-Spots:

$$I = \Delta_x \Delta_y \sum_A J_z(x, y, z) \quad (6.224)$$

Hierbei soll „A“ analog zur Integration die wahre Kontaktfläche, die sich aus der Summe aller a-Spots ergibt symbolisieren. Der Engewiderstand ergibt sich dann letztendlich zu:

$$R_E = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{I} \quad (6.225)$$

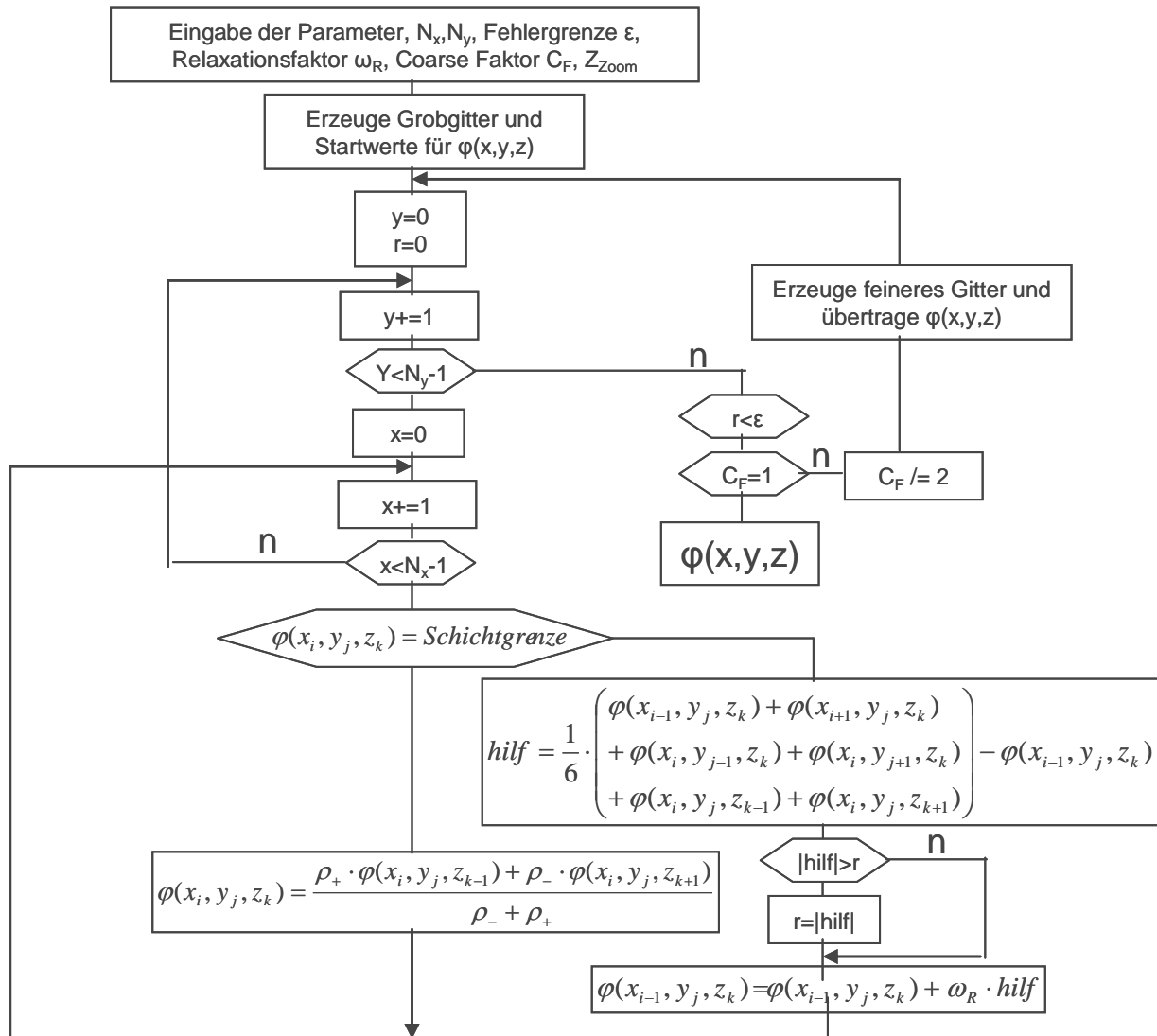


Abbildung 6.36: Vereinfachtes Flussdiagramm zur Bestimmung der Potentialverteilung innerhalb zweier beschichteter elektrischer Kontakte. Abfragen, ob ein Punkt Randpunkt ist (wenige als 6 Nachbarpunkte), sind zur besseren Lesbarkeit nicht mit aufgeführt.

7 Implementierung und Verifikation

In den nachfolgenden Abschnitten werden die drei Themenpunkte Oberflächen, mechanische und elektrische Kontaktcharakteristik hinsichtlich deren Implementierung in die praktische Anwendung und Plausibilität betrachtet.

7.1 Simulierte Oberflächen

Die in Kapitel 6.1 dargestellten Verfahren zur Simulation rauer Oberflächen wurden so in die Software integriert, dass die in den folgenden Tabellen aufgelisteten Parameter gesetzt werden können. In der Software können für jede Schicht bzw. Grundmaterial unterschiedliche Topographien erzeugt werden. Wie jedoch in Abbildung 6.29 dargestellt, wird in den Berechnungen der elektrischen und mechanischen Kenngrößen immer von einer konstanten Dicke der Schichten bzw. des Grundmaterials ausgegangen. Die Möglichkeit unterschiedliche Schichttopographien in die Simulation der mechanischen und elektrischen Kennwerte mit einzubeziehen soll im Anschluss an diese Arbeit weiter verfolgt werden. Zurzeit besteht jedoch die Option die unterschiedlichen Topographien zu addieren. Hierdurch ist die Möglichkeit gegeben, zum Beispiel fraktale und statistisch erzeugte Oberflächen zu kombinieren.

Tabelle 7.1 zeigt die Parametrisierung fraktaler gemäß Kapitel 6.1.2 erzeugter Oberflächen. Zur Berechnung der Topographie wird die anisotrope Form gemäß Formel (6.15) verwendet. Die Parametrisierung statistisch erzeugter Oberflächen analog zu Kapitel 6.1.3 wird in Tabelle 7.2 gezeigt. Die Parameter Subsize wird nur ausgewertet wenn die entsprechende Option gesetzt ist. Zur Parametrisierung der geschwindigkeitsoptimierten Oberflächen kommen die in Tabelle 7.3 aufgeführten Parameter zum tragen. Der Parameter „Seed-Value“ dient zur Initialisierung des Zufallszahlengenerators und dient als dessen neuer Basiswert. Hiermit wird sichergestellt, dass bei erneuter Berechnung der Topographie die gleiche Zufallszahlenfolge vorliegt. Dies ist notwendig wenn Simulationsfolgen gerechnet werden, bei denen gezielt nur ein Parameter geändert werden soll. Bei einer Initialisierung des Zufallszahlengenerators z.B. durch die Systemzeit des Rechners, würden jedes Mal unterschiedliche Zahlenfolgen erzeugt werden, was jedes Mal zu einer anderen Verteilung des a-Spots führen würde. Durch Änderung der „Seed-Values“ kann dies gezielt erfolgen (siehe hierzu auch Kapitel 6.1). Tabelle 7.4 zeigt die zum Programmstart vorgegebenen Werte, die nachträglich editiert werden können. Das gezielte Ändern der z-Werte-Verteilung analog Kapitel 6.1.5 erfolgt in einem eigenen Programm-Modul. Hier wird keine Unterscheidung hinsichtlich Deck-, Zwischenschicht und Grundmaterial gemacht. Die Änderungen beziehen sich immer auf die Topographie der Kontaktoberflächen des gerade ausgewählten Kontaktpartners. Eine Änderung der Häufigkeitsverteilung ist nur für gefilterte Profile möglich, d.h. für Profile, die hinsichtlich der makroskopischen Kontaktgeometrie gefiltert sind. Die Filterung kann im Falle simulierter Oberflächen durch Subtraktion der durch die Kontaktradien definierten Kontaktgeometrien erfolgen. Im Falle gemessener Oberflächen wird eine Start- und Stop-Frequenz der fouriertransformierten Topographie definiert. Die Filterung geschieht dann durch die separate Rücktransformation der beiden so definierten Frequenzbereiche.

Tabelle 7.1: Parametrisierung fraktaler Oberflächen gemäß Kapitel 6.1.2.

Parameter	Default-Werte jeweils für Kontakt 1 und Kontakt 2 editierbar			Programminterner Multiplikationsfaktor
	Deckschicht	Zwischenschicht	Grundmaterial	
$\sigma / \mu\text{m}$	0,2	0,2	0,2	10^{-6}
M	10	10	10	1
D	2,3	2,3	2,3	1
G	1,3	1,3	1,3	10^{-11}
L	32	32	32	10^{-6}

Tabelle 7.2: Parametrisierung statistisch erzeugter Oberflächen gemäß Kapitel 6.1.3.

Parameter	Default-Werte jeweils für Kontakt 1 und Kontakt 2 editierbar			Programminterner Multiplikationsfaktor
	Deckschicht	Zwischenschicht	Grundmaterial	
$\sigma / \mu\text{m}$	0,2	0,2	0,2	10^{-6}
ACF X	5	1	1	1
ACF Y	20	1	1	1
Subsize	32	32	32	1

Tabelle 7.3: Parametrisierung geschwindigkeitsoptimierter Oberflächen gemäß Kapitel 6.1.4.

Parameter	Default-Werte jeweils für Kontakt 1 und Kontakt 2 editierbar			Interner Multiplikationsfaktor
	Deckschicht	Zwischenschicht	Grundmaterial	
$\sigma / \mu\text{m}$	0,2	0,2	0,2	10^{-6}
H	0,2	0,2	0,2	1

Tabelle 7.4: Initialisierung des Zufallszahlengenerators.

	Kontakt 1			Kontakt 2		
	Deckschicht	Zwischenschicht	Grundmaterial	Deckschicht	Zwischenschicht	Grundmaterial
Seed-Value	1	3	5	2	4	6

Die Berechnung der Autokorrelationsfunktionen respektive der spektralen Leistungsdichten in x- und y-Richtung aus gegebenen Topographien, ist im Rahmen dieser Arbeit noch nicht im Programm integriert und für eine nachfolgende Revision vorgesehen. Autokorrelation und Leistungsdichte werden extern mit Hilfe des Software-Paketes MathCad berechnet. Bei der Ermittlung der fraktalen Dimension D aus gemessenen bzw. simulierten Topographien ist folgendes zu beachten. Gemäß Glg. (6.10) gilt:

$$PSD(\omega) \approx \frac{1}{\omega^{(5-2D)}} \quad (7.1)$$

Dies gilt für den eindimensionalen Fall. In dieser Arbeit wird jedoch die spektrale Leistungsdichte als Fouriertransformierte der zweidimensionalen Autokorrelationsfunktionen in x- und y-Richtung analog zu Glg. (6.20) und (6.21) berechnet. Auf Grund der Doppelsummation in diesen Gleichungen gilt hier

$$PSD(\omega) \approx \left(\frac{1}{\omega^{(5-2D)}} \right)^2 \quad (7.2)$$

Wobei die spektrale Leistungsdichte in folgender Form geplottet wird.

$$PSD(\omega) = \sqrt{PSD(\omega) \cdot \overline{PSD(\omega)}} \quad (7.3)$$

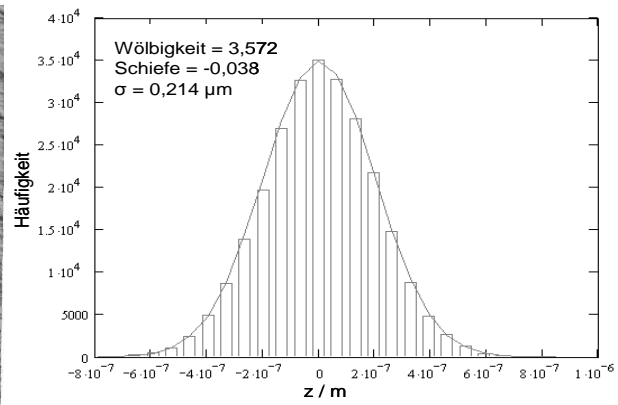
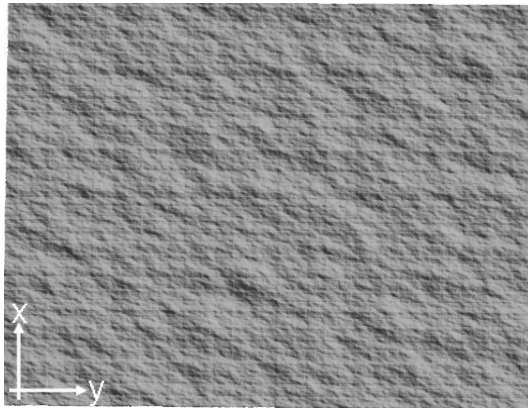
7.1.1 Vergleich mit gemessenen realen Oberflächen

Nachfolgend werden einige Beispiele der in Kapitel 6.1 dargestellten Verfahren zur Simulation rauer Oberflächen durchgerechnet. Durch Vergleich mit 3D-Messungen eines realen verzinnnten Kontaktpunktes wird untersucht, ob die jeweiligen Simulationstechniken die Abbildung einer realen Kontaktfläche erlauben. Des Weiteren werden Oberflächen analysiert, die mit unterschiedlichen Bearbeitungsverfahren hergestellt wurden. Es wird gezeigt, dass zur Simulation einer realen Oberfläche fünf Kennwerte genügen. Falls nicht explizit erwähnt, werden bei der Parametrisierung der Simulationsalgorithmen immer die in Kapitel 7.1 angegebenen Default-Werte verwendet. Die in den nachfolgenden Beispielen diskutierten Linienprofile werden jeweils für einen konstanten Indexwert von 10 (Schnittlinie) in x- bzw. y-Richtung geplottet. Die Abbildungen der Linienprofile, Autokorrelationsfunktionen und spektralen Leistungsdichten werden nur im ersten Beispiel exemplarisch gezeigt. In den weiteren Beispielen werden die entsprechenden Kennwerte wie die Autokorrelationslängen $\beta_{x,y}$ und fraktale Dimension D weiterhin angegeben und diskutiert. Um jedoch eine bessere Lesbarkeit des Textes zu gewähren, werden die entsprechenden graphischen Darstellungen im Anhang 15 ergänzt.

7.1.1.1 Oberflächen mit normalverteilter z-Werteverteilung.

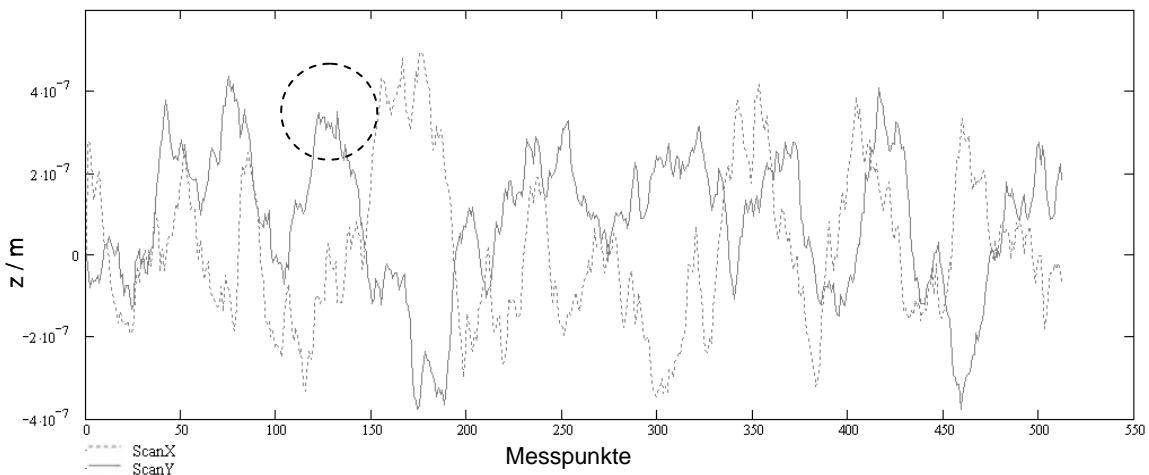
Anisotrope fraktale Oberfläche

Abbildung 7.1 a. – e. zeigt eine simulierte anisotrope fraktale Oberfläche analog Glg. (6.15) aus Kapitel 6.1.2. An Hand der z-Werte Verteilung ist sehr gut zu erkennen, dass die Zufallszahlenverteilung des Phasenwinkels θ_{mn} sich unverändert in einer Normalverteilung der z-Werte abbildet. Die Wölbigkeit liegt in guter Näherung bei 3. Die Schiefe der Verteilung kann mit Null angegeben werden. Die vorgegebene Rauheit σ von $0,2 \mu\text{m}$ ist gegeben. Die im rechten Winkel zueinander liegenden Schnitte (Abbildung 7.1. c.) zeigen die zu erwartende mehrfach skalierte Rauheitsstruktur (siehe kreisförmige Markierung). Die Autokorrelationsfunktionen in x- und y-Richtung zeigen einen annähernd linearen Verlauf. Die anisotrope Natur der Oberfläche zeigt sich in den errechneten unterschiedlichen Autokorrelationskoeffizient $ACF_x = 22$ und $ACF_y = 35$ wieder. Zwar ergeben sich unterschiedliche Autokorrelationslängen, eine Vorabdefinition ist jedoch nicht möglich. Dies ist gegenüber dem statischen Verfahren gemäß Kapitel 6.1.3 ein entscheidender Nachteil. Die fraktale Dimension D ergibt für die aus den Autokorrelationsfunktionen errechneten spektralen Leistungsdichten jeweils den Wert 2,25. Gegenüber dem vorgegebenen Wert von 2,3 ergibt sich hier eine Abweichung von $\sim 2,1\%$. Betrachtet man Abbildung 7.1. a. so ist eine regelmäßige fliesenartige Struktur zu erkennen.

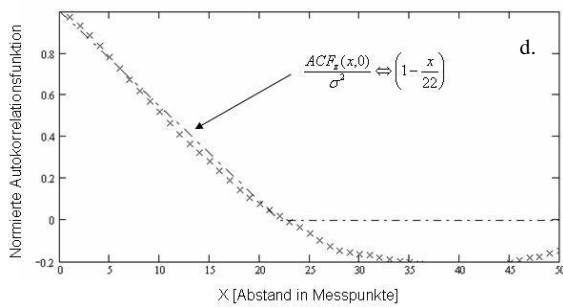


a.: Topographie

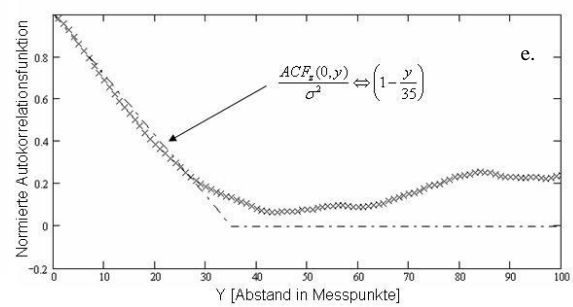
b.: z-Werte-Verteilung



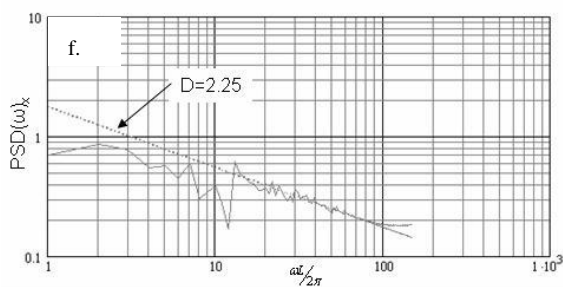
c.: Linienscan in x- bzw. y-Richtung.



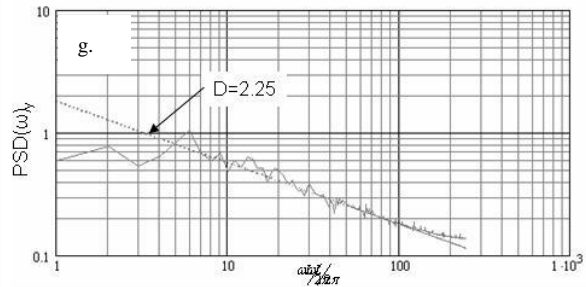
d.: Autokorrelation in x-Richtung.



e.: Autokorrelation in y-Richtung.



f.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.

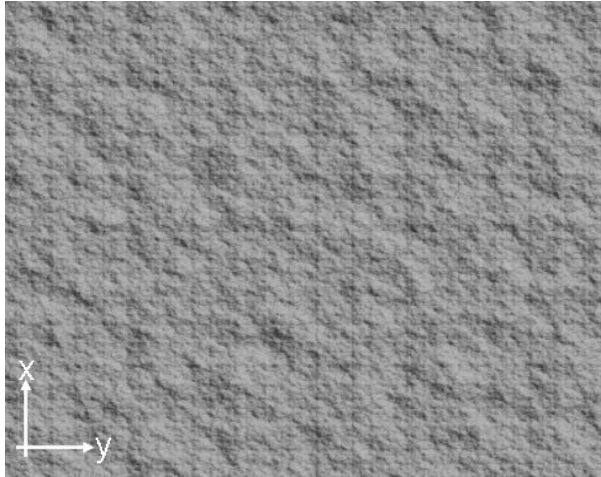


g.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

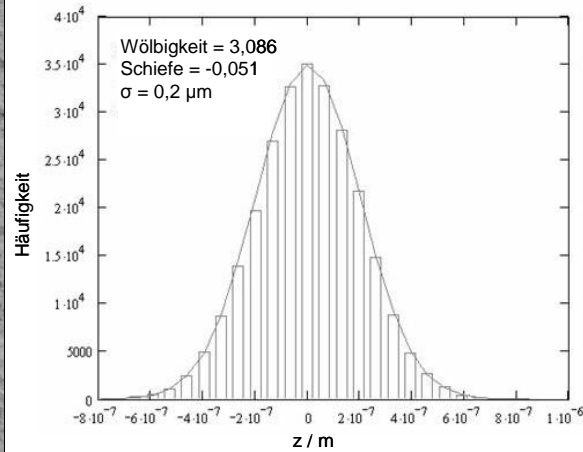
Abbildung 7.1 a – g: Simulierte fraktale anisotrope Oberfläche gemäß Ausloos Berman (512 x 512 Pkt).

Isotrope fraktale Oberfläche

Abbildung 7.2 bzw. Abbildung 9.4 (siehe Anhang 15) zeigt eine simulierte isotrope fraktale Oberfläche analog Glg. (6.16) aus Kapitel 6.1.2. Wie im obigen Beispiel ist sowohl hinsichtlich der Wölbigkeit (3,086), als auch der Schiefe (0,051) eine Normalverteilung der z-Werte gegeben. Die Autokorrelationsfunktion hat eine annähernd lineare Form. Die Autokorrelationslängen sind symmetrisch und haben den Wert $\beta_x = \beta_y = 25$. Hierdurch ist eine isotrope Oberfläche gegeben. Eine Vorgabe der Werte ist jedoch nicht möglich. Die fraktale Dimension kann wieder analog zu Abbildung 7.1 mit $D = 2.25$ angegeben werden.



a.: Topographie



b.: z-Werte-Verteilung

Abbildung 7.2 a – g: Simulierte fraktale isotrope Oberfläche gemäß Ausloos Berman (512 x 512 Pkt).

Geschwindigkeitsoptimiertes Simulationsmodell

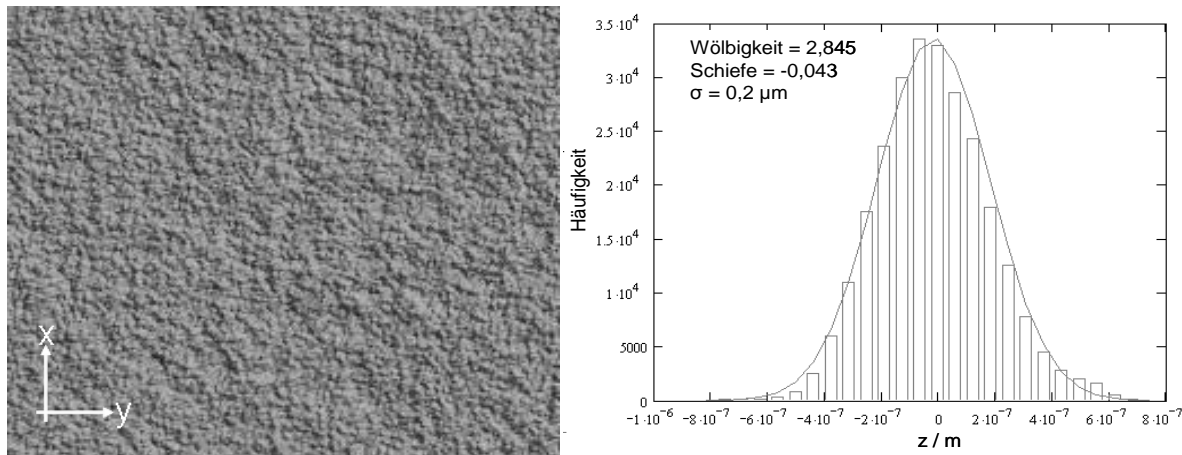
Der Nachteil, dass die Autokorrelationsfunktion nicht vorgegeben werden kann, gilt auch für das hinsichtlich Geschwindigkeit optimierte Simulationsmodell aus Kapitel 6.1.4. Abbildung 7.3 zeigt eine so generierte Oberfläche mit einer vorgegebenen Rauheit von $\sigma = 0,2 \mu\text{m}$. Die Draufsicht auf die so erzeugte Oberfläche Abbildung 7.3. a. zeigt sehr gut deren isotropen Charakter. Wie auch bei den beschriebenen fraktalen Oberflächen ergibt sich wieder eine Normalverteilung der z-Werte. Anders jedoch als bei den fraktalen Oberflächen zeigen die beiden Linienscans in x- und y-Richtung (siehe auch Abbildung 9.5 Anhang 15) nicht das multiskalige Erscheinungsbild der fraktalen Topographien. Ein weiterer deutlicher Unterschied zu den zuvor diskutierten fraktalen und später ausführlich beschriebenen statistischen Oberflächen zeigt sich in der Form der Autokorrelationsfunktionen. Wie zu erwarten, stimmen die Autokorrelationsfunktionen in x- und y-Richtung überein (Abbildung 9.5 b. und c.). Der Funktionsverlauf kann jedoch weder mit einem linearen noch einem exponentiellen Abfall approximiert werden. Die Autokorrelationsfunktion kann vielmehr durch folgende Funktionen angenähert werden. Für die x-Richtung gilt:

$$ACF_x(x,0) = \sigma^2 \cdot (1 + c \cdot x)^n \quad (7.4)$$

bzw. für die y-Richtung folgt auf Grund der Isotropie analog:

$$ACF_y(0,y) = \sigma^2 \cdot (1 + c \cdot y)^n \quad (7.5)$$

mit $c = 0,5$ und $n = -0,6$. Die spektralen Leistungsdichten ergeben für die fraktale Dimension $D = 2,33$.



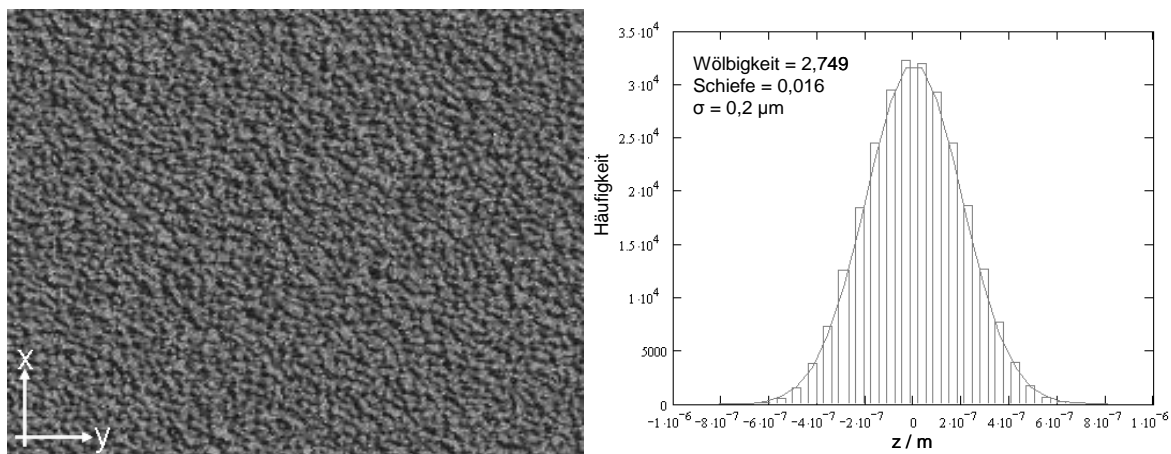
a.: Topographie

b.: z-Werte-Verteilung

Abbildung 7.3 a – b: Simulierte fraktale Oberfläche gemäß Kapitel 6.1.4 (512 x 512 Pkt).

Isotrope Oberfläche gemäß Kapitel 6.1.3

Die oben diskutierten Oberflächen-Simulationsmethoden bieten keine Möglichkeit, Isotropien bzw. Anisotropien in x- und y-Richtung definiert vorzugeben. Diesen Nachteil überkommt das in Kapitel 6.1.3 beschriebene statistische Verfahren. Abbildung 7.4 zeigt eine isotrope unkorrelierte Oberfläche. D.h., eine Oberfläche deren Autokorrelationslängen sehr kurz gewählt wurden. In Abbildung 7.4 sind $\beta_x = \beta_y = 2$ gewählt. Zur Approximation der Autokorrelationsfunktion dient die linear abfallende Funktion analog zu Glg. (6.26). Vergleicht man die so entstandene Oberfläche mit der isotropen Oberfläche aus Abbildung 7.3, so lassen sich die folgenden Gemeinsamkeiten erkennen. Die z-Werte-Verteilung beider Topographien entspricht in sehr guter Näherung einer Normalverteilung. Für beide Topographien ergibt sich annähernd die gleiche fraktale Dimension $D=2,33$ (Abbildung 7.3) bzw. $D = 2,32$ (Abbildung 7.4). Ein Vergleich der Linienprofile lässt augenscheinlich keine Unterschiede erkennen. Lediglich der visuelle Vergleich zwischen Abbildung 7.3 a. und Abbildung 7.4 a. zeigt eine unterschiedliche Oberflächenstruktur. Dies spiegelt sich deutlich in der unterschiedlichen Form der Autokorrelationsfunktion in x- und y-Richtung wieder (Abbildung 9.5 und 9.6; Anhang 15).



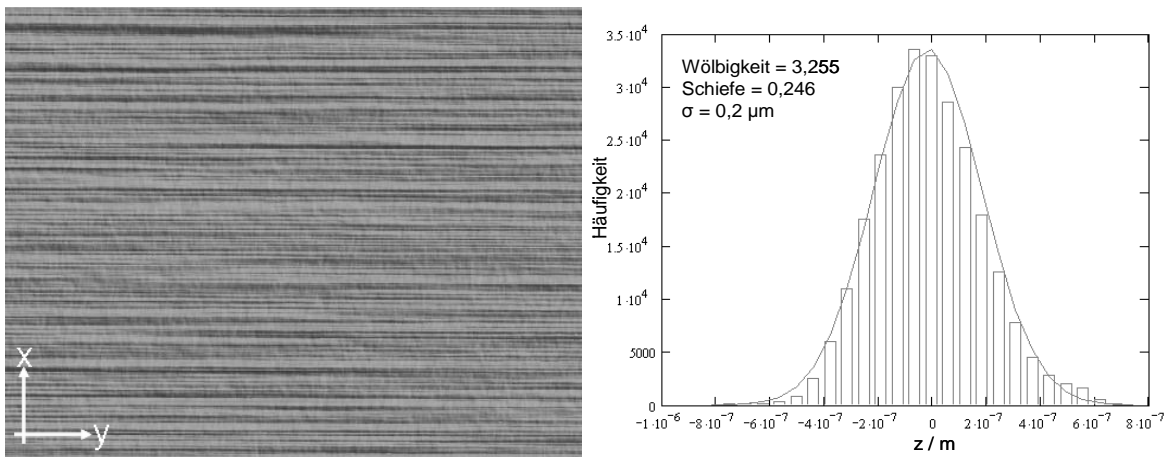
a.: Topographie

b.: z-Werte-Verteilung

Abbildung 7.4 a – g: Simuliert isotrope Oberfläche (512 x 512 Pkt).

Anisotrope Oberfläche gemäß Kapitel 6.1.3

Abbildung 7.5 zeigt eine anisotrope Topographie, die durch die Wahl stark unterschiedlicher Autokorrelationskoeffizienten entsteht. Hierbei wurde $\beta_x = 8$ und $\beta_y = 420$ gewählt. Diese Werte wurden zuvor aus einem stark anisotropen Profil (siehe Abbildung 7.6) ermittelt. Auch hier wurde wieder die lineare Form der Autokorrelationsfunktion gemäß Glg. (6.26) gewählt. Anhand Abbildung 7.5 a. sieht man deutlich die dadurch entstandene riefenartige Struktur der Oberfläche. Die Verteilung der z-Werte zeigt noch die Form einer Gauß'schen Glockenkurve. Die Linienprofile für die x- und y-Richtung zeigen deutlich unterschiedliche Verlaufsformen, welche der multiskaligen Form der fraktalen Profile aus Abbildung 7.1 ähneln. Die vorgegebenen Autokorrelationsfunktionen stimmen sehr gut mit den aus der simulierten Topographie errechneten Autokorrelationsfunktionen überein (siehe auch Abbildung 9.7; Anhang 15). Für die fraktale Dimension ergibt sich sowohl aus der PSD in x-Richtung als auch aus der PSD in y-Richtung mit $D = 2,24$ ein geringerer Wert als bei den isotropen Topographien aus Abbildung 7.3 und Abbildung 7.4. Dies stimmt mit der Aussage von Ausloos und Berman [4] überein, dass geringere Werte der fraktalen Dimension D mit der Hervorhebung größerer Wellenlängenteile der Oberflächenstruktur einher geht.



a.: Topographie

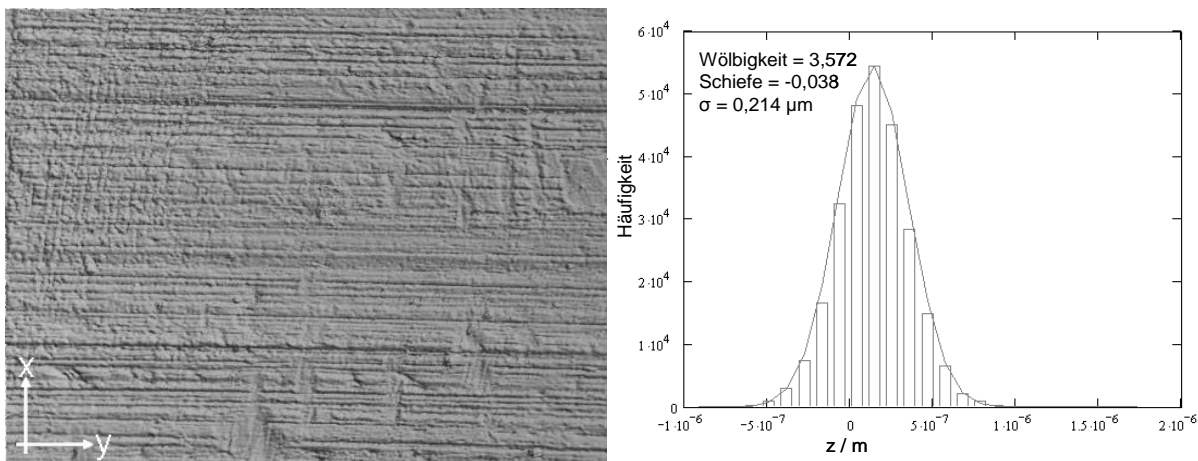
b.: z-Werte-Verteilung

Abbildung 7.5 a – b: Simulierte anisotrope Oberfläche (512 x 512 Pkt.).

Gemessene anisotrope Oberfläche

Abbildung 7.6 a. – b. zeigt eine gemessene stark anisotrope vergoldete Oberfläche. Zur Messung diente das in Kapitel 5.1 beschriebene Verfahren. Die gemessene Fläche besteht aus 512 x 512 Messpunkten. Bei einem Messbereich von 800 μm ergibt dies eine Auflösung in x- und y-Richtung von 1.5625 μm . Die gemessene Oberfläche wurde hinsichtlich des langwelligen Anteils (Kontaktradien) so gefiltert, dass eine ebene Fläche entstand. Anhand der Hüllkurve (Gauß) der in Abbildung 7.6 dargestellten Verteilung ist zu erkennen, dass die z-Werte in guter Näherung einer Normalverteilung entsprechen. Als Standardabweichung kann $\sigma = 0,21 \mu\text{m}$ angegeben werden. Die Linienprofile ähneln den Profilen der fraktal erzeugten Oberflächen. Auch hier sind Strukturen längerer (Wellenlinien zwischen Erhöhungen und Riefen) und kürzerer Wellenlänge (unkorrelierte Mikro-Rauheit) zu erkennen. Die Autokorrelationsfunktion kann durch einen linearen Verlauf angenähert werden. Für die linearen Autokorrelationslängen ergibt sich für $\beta_x = 8$ und für $\beta_y = 420$. Mit den drei ermittelten Kennwerten σ , β_x und β_y wurde die Topographie aus Abbildung 7.5 simuliert. Vergleicht man die gemessene Topographie mit der simulierten Topographie, so zeigen Abbildung 7.6 a. und Abbildung 7.5 a. eine sehr

gute Ähnlichkeit hinsichtlich der Riefenstruktur. Die in der realen Oberfläche ersichtlichen dellenartigen Abdrücke können durch die Simulation jedoch nicht mit abgebildet werden. Um auch solche Strukturen mit abzubilden, sei an dieser Stelle auf die Beispiele aus Abbildung 7.12 und Abbildung 7.13 verwiesen. Die Autokorrelationsfunktion in y-Richtung zeigt über den gesamten berechneten Bereich (Abstand 0 – 450 Punkte) einen eindeutig linearen Verlauf. Die Autokorrelation in x-Richtung zeigt nur zu Beginn ein annähernd lineares Verhalten. Eine bessere Approximation ist durch eine Form analog zu Glg. (7.4) gegeben. Als Gleichungsparameter kann $c = 0,5$ und $n = -0,8$ angegeben werden. Betrachtet man das Linienprofil in x-Richtung aus Abbildung 7.6 c., so scheint die untersuchte Probe in x-Richtung etwas gekippt zu sein (siehe gestrichelte Linie). Dies kann zu dem beobachteten reduzierten Abfallverhalten der Autokorrelationsfunktionen in x-Richtung führen. Die unterschiedliche Form der Autokorrelationsfunktion spiegelt sich auch in einer unterschiedlichen Form und Steigung (doppellogarithmische Darstellung) der spektralen Leistungsdichte wieder. Hierdurch ergeben sich unterschiedliche Werte der fraktalen Dimension in x- ($D = 2.25$) und y- Richtung ($D = 2.28$).



a.: Topographie

b.: z-Werte-Verteilung

Abbildung 7.6 a – b: Gemessene stark anisotrope Oberfläche (512 x 512 Pkt.; x/y-Auflösung 1,5625 μm).

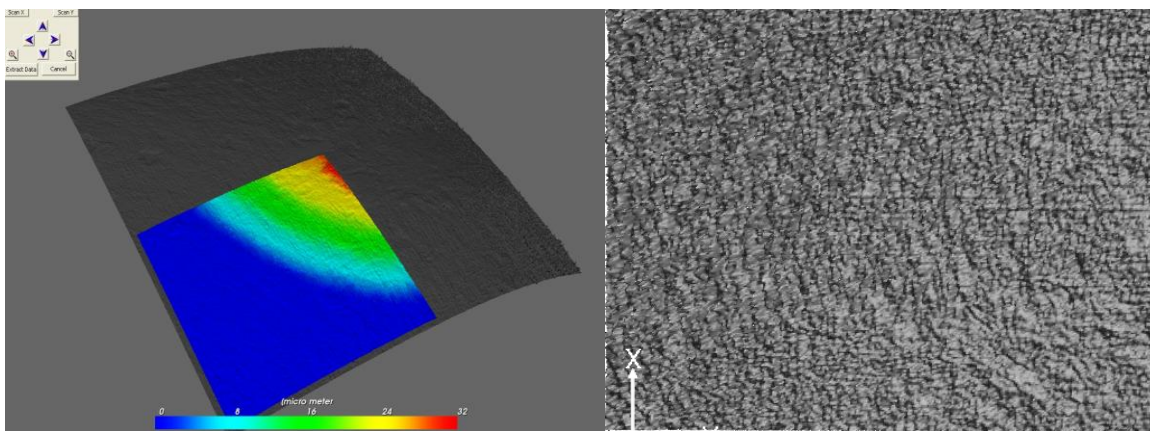
7.1.1.2 Oberflächen mit nicht normalverteilter z-Werte-Verteilung.

In den obigen Beispielen sind die z-Werte-Verteilungen immer annähernd normalverteilt. In der Praxis vorkommende Oberflächen haben teilweise jedoch stark abweichende Verteilungsformen. In den folgenden Beispielen soll untersucht werden, in wie weit ein Simulationsverfahren eine so geartete Oberfläche abbilden kann. Der besseren Lesbarkeit wegen werden im Folgenden die Abbildungen der Linienprofile, Autokorrelationsfunktionen und der spektralen Leistungsdichten im Anhang 15 aufgeführt.

Unbelasteter Zinn-Kontaktpunkt

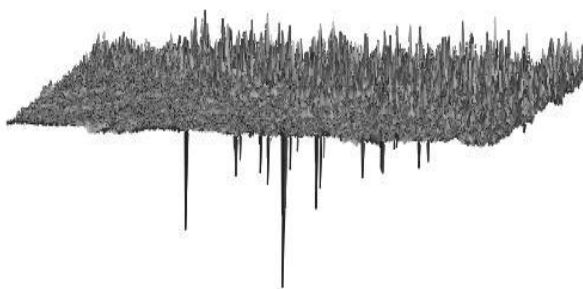
Abbildung 7.7 a. zeigt ein 3D-Profil eines verzinnten Steckverbinder Kontaktpunktes. Der farblich hervorgehobene Bereich ist mechanisch unbelastet und wird in Abbildung 7.7 b. – d. (bzw. Abbildung 9.9 a. – e.) analysiert. Hierzu wurden analog zum obigen Beispiel die langwelligen Anteile der Ober-

fläche (Kontaktradien) herausgefiltert. Die z-Werte Verteilung zeigt mit einer Wölbigkeit von 49,1 und einer Schiefe von -0,2 eine deutliche Abweichung von der Gauß'schen Glockenkurve. Die Standardabweichung der z-Werte Verteilung ergibt eine Rauheit von $\sigma = 0,51 \mu\text{m}$. Verdeutlicht wird dies auch an Hand der perspektivischen Darstellung der gefilterten Topographie. Eine graphische Überhöhung der z-Koordinaten gegenüber den x/y-Werten lässt starke Ausschläge in positiver wie negativer Richtung erkennen. Dies ist ebenfalls an der Form z-Werte-Verteilung erkennbar. Ansonsten zeigt die Topographie hinsichtlich der Autokorrelationsfunktionen (Abbildung 9.9 b. und c.) ein isotropes und schnell abfallendes lineares Verhalten. Die Autokorrelationskoeffizienten können mit dem Wert 2 angegeben werden. Die fraktale Dimension zeigt mit den Werten $D = 2,37$ (x-Richtung) bzw. $D = 2,34$ (y-Richtung) einen im Vergleich zu Topographien mit großen Autokorrelationskoeffizienten ($D \sim 2,25$) höheren Wert.

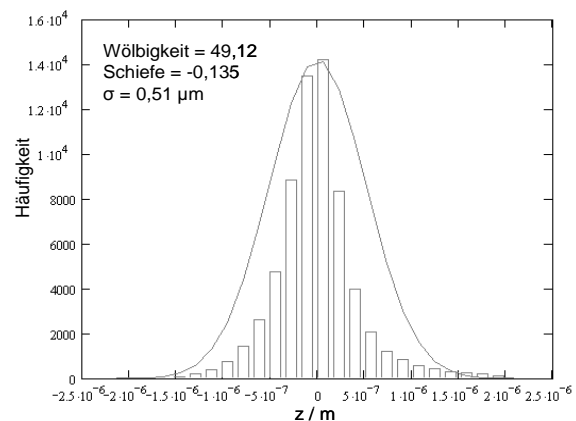


a.: Zinn-Kontakt

b. Topographie Draufsicht



c.: Topographie perspektivisch

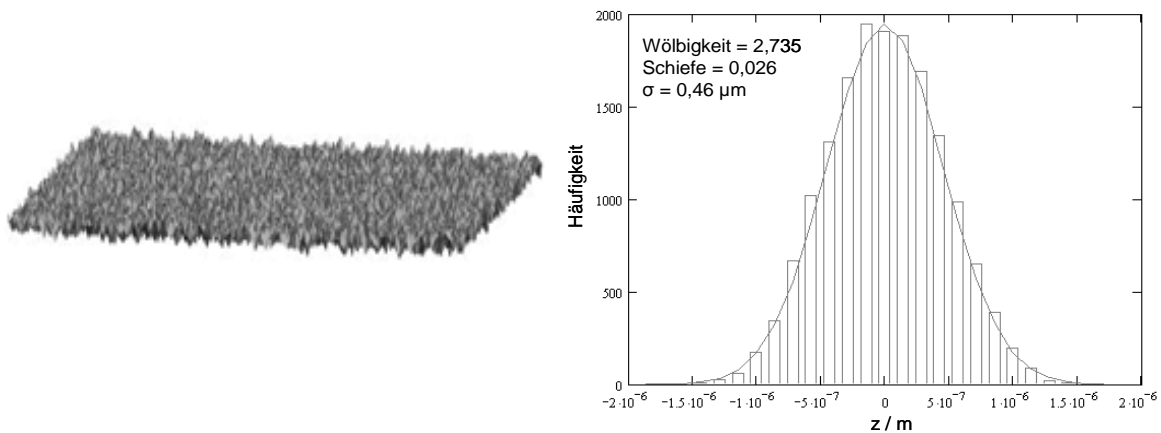


d.: z-Werte-Verteilung

Abbildung 7.7 a – d: Gemessene isotrope Oberfläche (256 x 256 Pkt.; Auflösung 1,5625 μm).

Simuliert man eine Oberfläche gemäß Kapitel 6.1.3 mit den oben ermittelten Kennwerten für $\sigma = 0,51 \mu\text{m}$, $\beta_x = \beta_y = 2$, so ergibt sich bei einer gleichen Auflösung von 256 x 256 Punkten das in Abbildung 7.8 a. und b. gezeigte Bild. Wie zu erwarten entsteht eine isotrope Oberfläche mit Gauß-verteilten z-Werten. Die Standardabweichung der z-Werte-Verteilung beträgt $\sigma = 0,51 \mu\text{m}$. Die Wölbigkeit hat den

Wert 2,73 und die Schiefe ergibt sich zu 0,02. Die in Abbildung 7.7 c. erkennbaren Oberflächen-Maxima und -Minima sind bei gleicher Skalierung nicht zu erkennen.



a.: Topographie

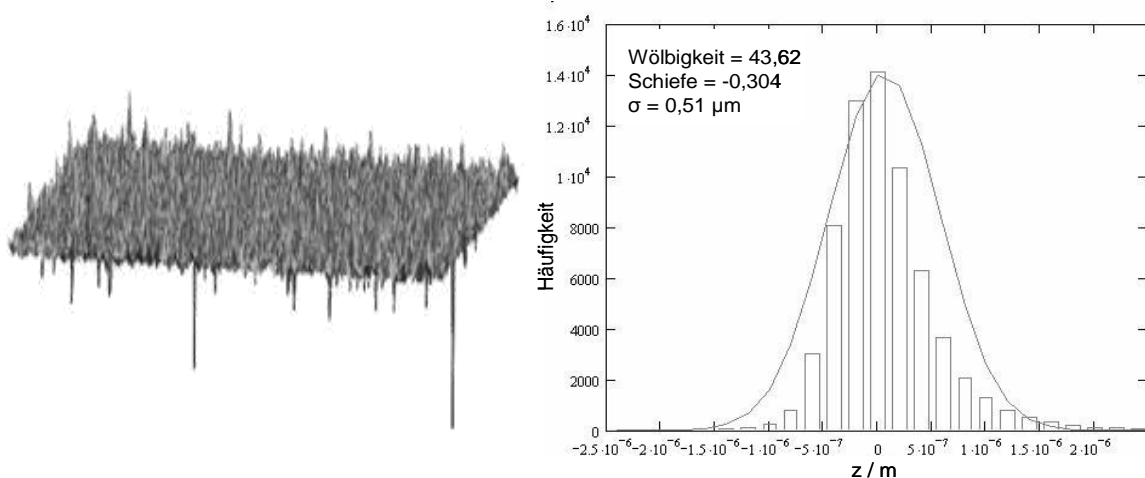
b.: z-Werte-Verteilung

Abbildung 7.8 a.- b.: Simulierte isotrope Topographie. $\sigma = 0,51 \mu\text{m}$, $\beta_x = \beta_y = 2$ (256 x 256 Pkt.)

Durch Anwenden des in Kapitel 6.1.5 dargestellten Verfahrens, kann die z-Werte Verteilung manuell so modelliert werden, dass Wölbigkeit und Schiefe annähernd den Werten aus Abbildung 7.7 b. entsprechen. Da diese nachträglich Änderung nach dem „Try and Error“ Prinzip durchgeführt wird und keinem numerischen Algorithmus folgt, ist keine exakte Übereinstimmung der Verteilungen zu erzielen. Jedoch ist an Hand von Abbildung 7.9 a. gut zu erkennen, dass sich Maxima und Minima in gleicher Weise wie bei der gemessenen Zinntopographie aus Abbildung 7.7 ausbilden. Die 6 Konstanten aus Glg. (6.39) wurden wie folgt ermittelt:

$$\begin{aligned} C^{L1} &= 12; & C^{L2} &= 1; & C^{L3} &= 9,3; \\ C^{R1} &= 3; & C^{R2} &= 0,9; & C^{R3} &= 2,3; \end{aligned}$$

Mit diesen Parametern ergibt sich eine Wölbigkeit von 43,6 und eine Schiefe von -0,304. Die Rauheit der Oberfläche wird analog zu Glg. (6.34) auf $\sigma = 0,51 \mu\text{m}$ skaliert.



a.: Topographie

b.: z-Werte-Verteilung

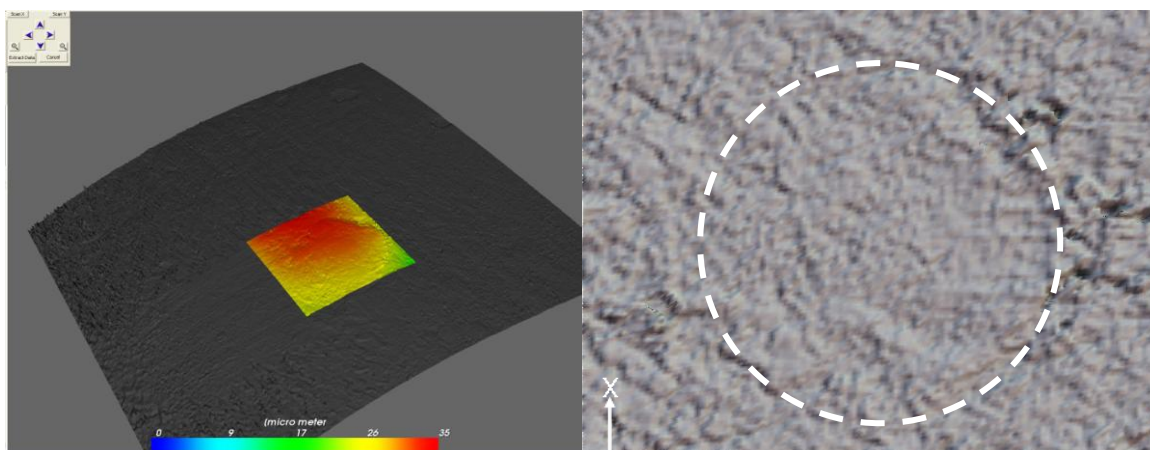
Abbildung 7.9 a.- b.: Simulierte isotrope Topographie mit nachträglich deformierter z-Werte-Verteilung.

$\sigma = 0,51 \mu\text{m}$, $\beta_x = \beta_y = 2$ (256 x 256 Pkt.)

Die Autokorrelationsfunktionen ergeben den vorgegebenen linearen Verlauf (siehe auch Abbildung 9.10). Die Korrelationslängen in x- und y-Richtung zeigen beide den gleichen Näherungswert von 2. Den deutlichsten Unterschied zur gemessenen Topographie aus Abbildung 7.7 zeigen die spektralen Leistungsdichten und die daraus ermittelte fraktale Dimension. Während bei der gemessenen Oberfläche eine mittlere fraktale Dimension $D = 2,35$ angenähert wird, ergibt sich für die simulierte Oberfläche ein Wert von $D = 2,25$. Ob dieser Unterschied durch das Filtern des langwelligen Anteils der gemessenen Oberfläche zustande kommt, kann an dieser Stelle nicht beantwortet werden. Weitere Vergleiche zwischen simulierten Oberflächen und den Kennzahlen gemessener Oberflächen werden deshalb an ebenen Referenzmustern durchgeführt.

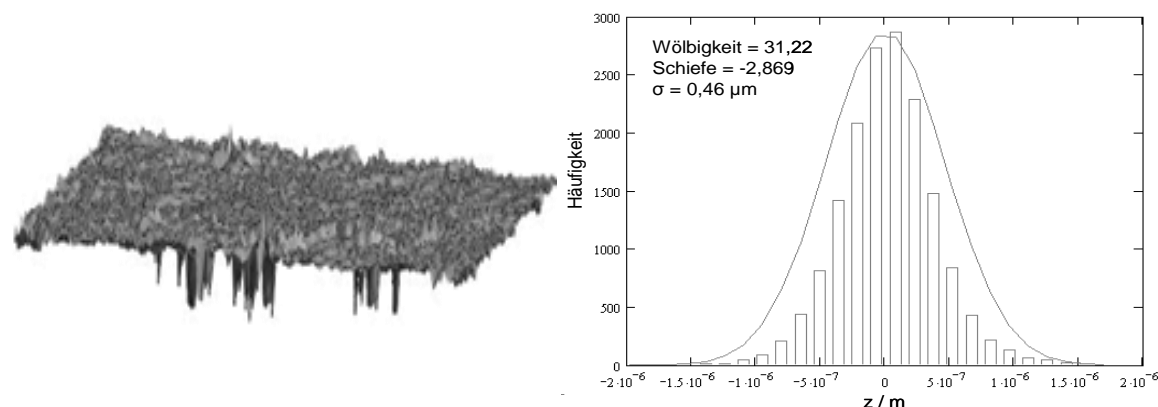
Belasteter Zinn-Kontaktpunkt

Untersucht man den durch einen Steckvorgang plastisch deformierten Bereich des Zinn-Kontaktes aus Abbildung 7.7 a., so ergibt sich erwartungsgemäß eine geänderte Oberflächenstruktur. Bei der verwendeten Auflösung des 3D-Profilometers von $800\ \mu\text{m} \times 800\ \mu\text{m}$ ergibt sich ein Punkteraster von 128×128 Punkten, um den Bereich für den eigentlichen Kontaktpunkt zu erfassen (hervorgehobener Bereich Abbildung 7.10 a). Die Draufsicht des Kontaktpunktbereiches zeigt die durch die gestrichelte Linie in Abbildung 7.10 b. angedeutete, kreisförmige Struktur sphärischer Kontakte.



a.: Zinn-Kontakt

b.: Topographie Draufsicht



c.: Topographie perspektivisch

d.: z-Werte-Verteilung

Abbildung 7.10 a – d.: Gemessene Topographie eines Steckverbinder Kontaktpunktes (128×128 Pkt. Auflösung $1,5625\ \mu\text{m}$).

Durch die plastische Deformation des Kontaktpunktes werden die in Abbildung 7.7 c. erkennbaren Oberflächenmaxima vollständig eingeebnet. Die ausgeprägten Minima der Topographie sind jedoch weiterhin zu erkennen. Dies bedeutet, dass etwaige Poren durch den Steckvorgang nicht zwangsläufig aufgefüllt werden. Neben dem hohen Wert für die Wölbigkeit von 31,2 sind im Vergleich zur z-Werte Verteilung des unbelasteten Bereiches folgende Unterschiede festzustellen:

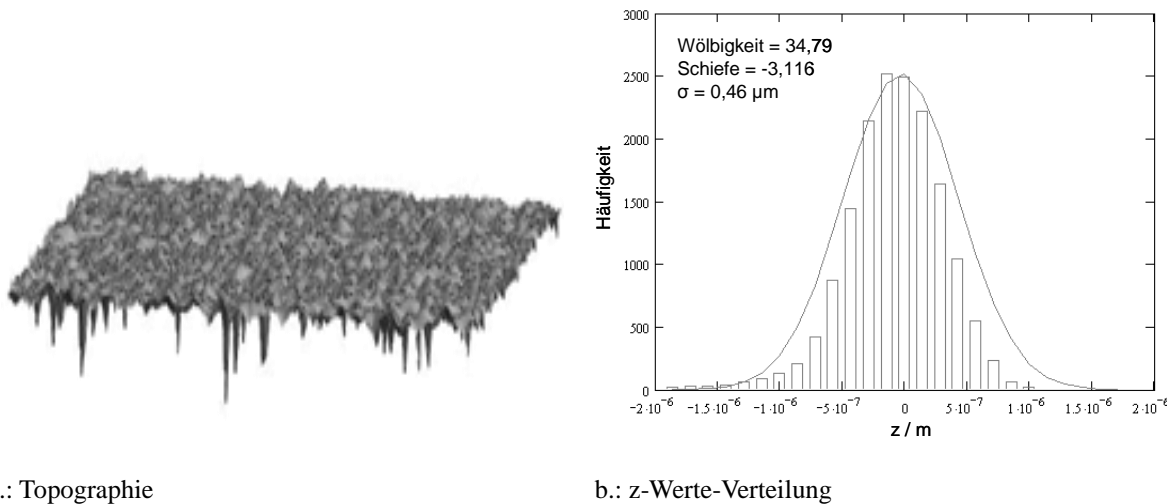
1. Die Schiefe Verteilung ändert sich von -0,1 auf -2,8
2. Die Rauheit verringert sich von 0,51 μm auf 0,46 μm

Dieser Umstand kann durch die Einebnungseffekte auf Grund der plastischen Kontaktdeformation erklärt werden. Aus dem gleichen Grunde erhöhen sich die Autokorrelationslängen geringfügig von 2 auf 3. Die fraktale Dimension hinsichtlich x- und y-Richtung ändert sich nur marginal von 2,37 auf 2,38 bzw. 2,34 auf 2,33 (siehe auch Abbildung 9.11).

Transformiert man die z-Werte-Verteilung der simulierten Oberfläche analog Abbildung 7.8 in der Weise, dass die z-Werte-Verteilung der belasteten Oberfläche angenähert wird, ergibt sich die Bildfolge von Abbildung 7.11. Die Parameter aus Glg. (6.39) ergeben sich hierbei zu:

$$\begin{aligned} C^{L1} &= 6; & C^{L2} &= 1,1; & C^{L3} &= 5; \\ C^{R1} &= \text{NA}; & C^{R2} &= \text{NA}; & C^{R3} &= 0; \end{aligned}$$

Hierdurch wird die positive Seite der (ursprünglichen) z-Werte-Verteilung nicht geändert. Es ergibt sich eine Häufigkeitsverteilung mit einer Wölbigkeit von 34,7 und einer Schiefe von -3,1. Die Standardabweichung wird gemäß der Verteilung aus Abbildung 7.10 d. mittels Glg. (6.34) skaliert.



a.: Topographie

b.: z-Werte-Verteilung

Abbildung 7.11 a.-b.: Simulierte isotrope Topographie mit nachträglich deformierter z-Werte-Verteilung.

$$\sigma = 0,46 \mu\text{m}, \beta_x = \beta_y = 2 \text{ (128 x 256 128.)}$$

Ein Vergleich der perspektivischen Darstellung des gemessenen bzw. simulierten Kontaktpunktes (Abbildung 7.10 c. und Abbildung 7.11 a.) zeigt visuell eine gute Übereinstimmung. Die spektralen Leistungsdichten und die daraus resultierenden fraktalen Dimensionen zeigen jedoch die gleiche Diskrepanz zwischen Messung und Simulation, wie zuvor beim mechanisch unbelasteten Bereich. Vergleicht man die Autokorrelationsfunktionen bzw. die spektralen Leistungsdichten der beiden Simulationen (belasteter / unbelasteter Kontaktbereich), so sind trotz der unterschiedlichen Verteilungsformen der z-Werte keine erkennbaren Unterschiede festzustellen. Beide Oberflächen weisen die gleiche fraktale Dimension $D=2,25$ auf (siehe auch Abbildung 9.12). Dies bedeutet jedoch im Umkehrschluss,

dass eine Charakterisierung einer Oberfläche nur mittels deren angenäherter Autokorrelationsfunktionen bzw. deren spektralen Leistungsdichten nicht eindeutig zu beschreiben ist. Die Kennwerte Wölbigkeit, Schiefe und Standardabweichung der z-Werte-Verteilung müssen ebenfalls mit abgebildet werden.

Um eine reale technische Oberfläche mittels einer der oben beschriebenen Simulationsverfahren annähern zu können, müssen neben der Auflösung in x/y-Richtung folgende Parameter übergeben werden:

1. Form der Autokorrelationsfunktion (linear / exponentiell)
2. Autokorrelationslänge in x- bzw. y-Richtung
3. Standardabweichung σ der z-Werte-Verteilung (Rauheit)
4. Wölbigkeit der z-Werte-Verteilung
5. Schiefe der z-Werte-Verteilung

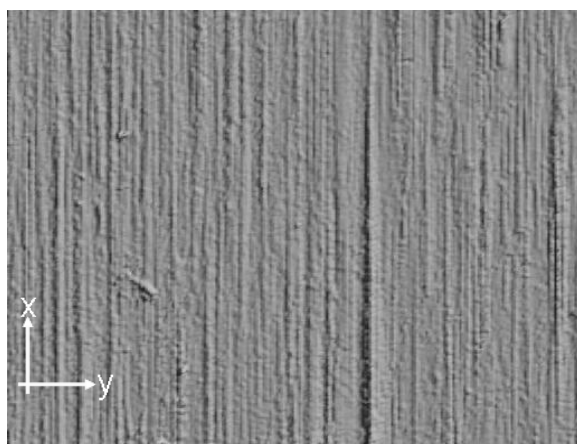
Eine Vorgabe der Autokorrelationsfunktionen ist nur mit dem in Kapitel 6.1.3 beschriebenen, statistischen Verfahren möglich. Eine Anpassung der Rauheit, Wölbigkeit und Schiefe der z-Werte-Verteilung erfolgt nachträglich und kann auch auf gemessene Oberflächen angewendet werden. Die dazu notwendigen 6 Parameter aus Glg. (6.39) werden hierbei durch Ausprobieren ermittelt. Tabelle 7.5 zeigt die Kennwerte unterschiedlicher gemessener Oberflächen und die zur Simulation notwendigen Kennwerte. Die fraktale Dimension D wird nur der Vollständigkeit halber mit aufgeführt. In Tabelle 7.6 sind die 3D-Darstellungen gemessener und entsprechend simulierter Topographien gegenübergestellt. Untersucht werden Oberflächen, welche durch die folgenden Fertigungsschritte entstehen:

1. Schleifen
2. Fräsen fein
3. Fräsen grob
4. Drahterodieren fein
5. Drahterodieren grob
6. Senkerodieren fein
7. Drehen

Hierzu werden Musterblöcke aus Stahl in der Abmessung 20 mm x 20 mm x 10 mm geschnitten und entsprechend bearbeitet. Die Vermessung der Topographie erfolgt berührungslos mit dem in Kapitel 5.1 beschriebenen Verfahren. Um Fehler bei der Bestimmung der Autokorrelationsfunktion durch langwellige Oberflächenstrukturen wie z.B. Durchbiegungen zu minimieren, werden die ersten 4 Frequenzterme der Fouriertransformierten der digitalisierten Topographie herausgefiltert. Sämtliche simulierten Oberflächen werden mittels des statistischen Verfahrens gemäß Kapitel 6.1.3 erzeugt.

Geschliffene Oberflächen

Abbildung 7.12 a. – b. zeigt eine durch Schleifen erzeugte stark anisotrope Oberfläche. Durch das abtragende Bearbeitungsverfahren ist die Verteilung der z -Werte hinsichtlich Schiefe = 1,66 und Wölbigkeit = 15,2 gegenüber einer Normalverteilung stark deformiert. Als Rauheit ergibt sich ein Wert von $\sigma = 0,14 \mu\text{m}$. Die Linienprofile in x - und y -Richtung zeigen ebenfalls, dass die z -Werte in positiver Richtung stärker streuen als in negativer Richtung. Die Autokorrelationsfunktion hat eine exponentiell abfallende Form (siehe auch Abbildung 9.13). Die Autokorrelationslänge in x -Richtung kann mit $\beta_x = 550$ angenähert werden. In y -Richtung ergibt sich ein Wert von $\beta_y = 2$. Aus diesen Unterschieden resultieren die stark differierenden spektralen Leistungsdichten in x - ($D = 2,26$) und y -Richtung ($D = 2,33$).



a.: Topographie

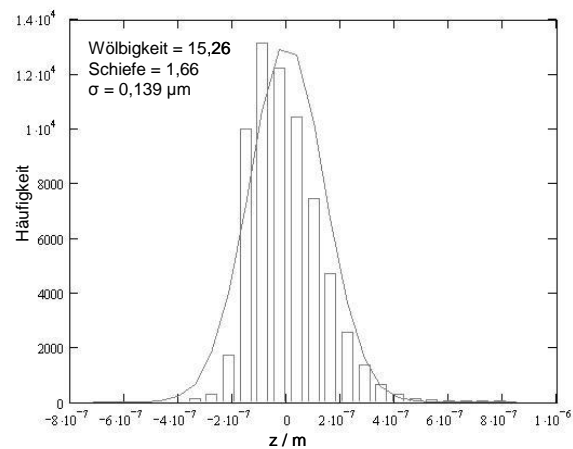
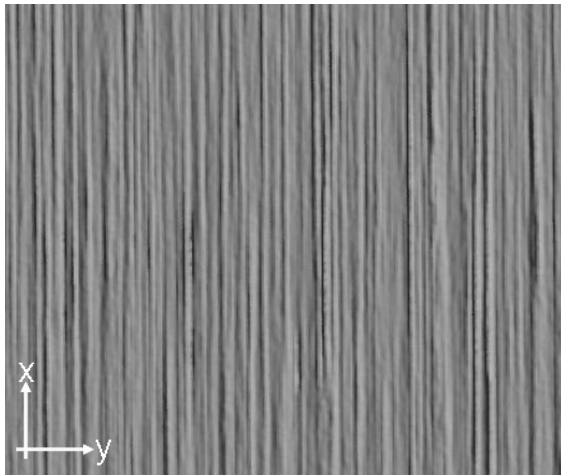
b.: z -Werte-Verteilung

Abbildung 7.12 a – b: Gemessene Topographie einer durch Schleifprozesse erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung $1,5625 \mu\text{m}$).

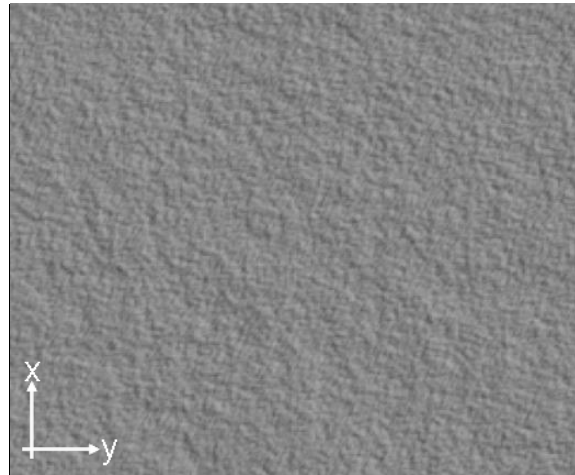
Mit den oben ermittelten Kennwerten der Autokorrelationsfunktionen und der Rauheit wurde eine entsprechende anisotrope Oberfläche (Abbildung 7.13 a) erzeugt. Um ein realistischeres Aussehen der Oberfläche zu erhalten, wurde zusätzlich eine isotrope ($\beta_x = \beta_y = 2$) Topographie mit halber Rauheit erzeugt (Abbildung 7.13 b) und zur anisotropen Topographie addiert. Die so erhaltene Topographie wurde mittels folgenden Parametern transformiert:

$$\begin{aligned} C^{L1} &= 8; & C^{L2} &= 1; & C^{L3} &= 3; \\ C^{R1} &= 2,35; & C^{R2} &= 0,67; & C^{R3} &= 5,5; \end{aligned}$$

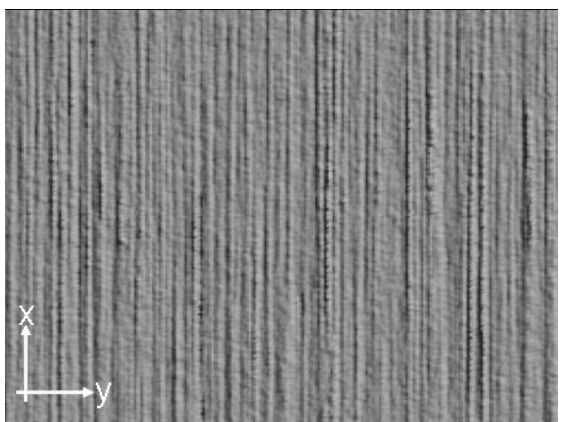
Hierdurch ergibt sich die in Abbildung 7.13 c. gezeigte Topographie. Die z -Werte-Verteilung zeigt annähernd die gleichen Kennwerte wie die gemessene Oberfläche. Die Linienprofile zeigen jedoch im Gegensatz zur gemessenen Topographie hinsichtlich negativer Werte nicht die scharf erscheinende untere Grenze.



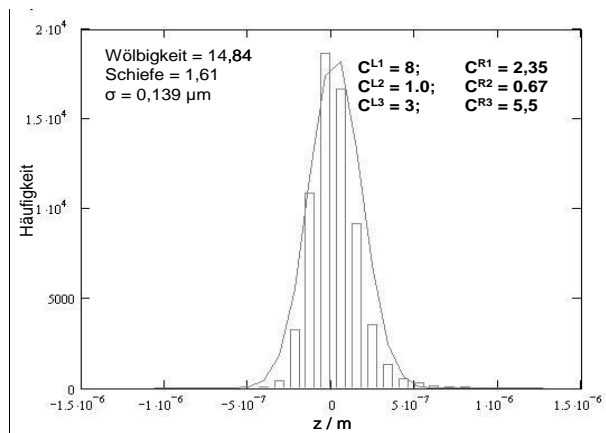
a.: Topographie anisotrop



b. Topographie isotrop



c.: Topographie

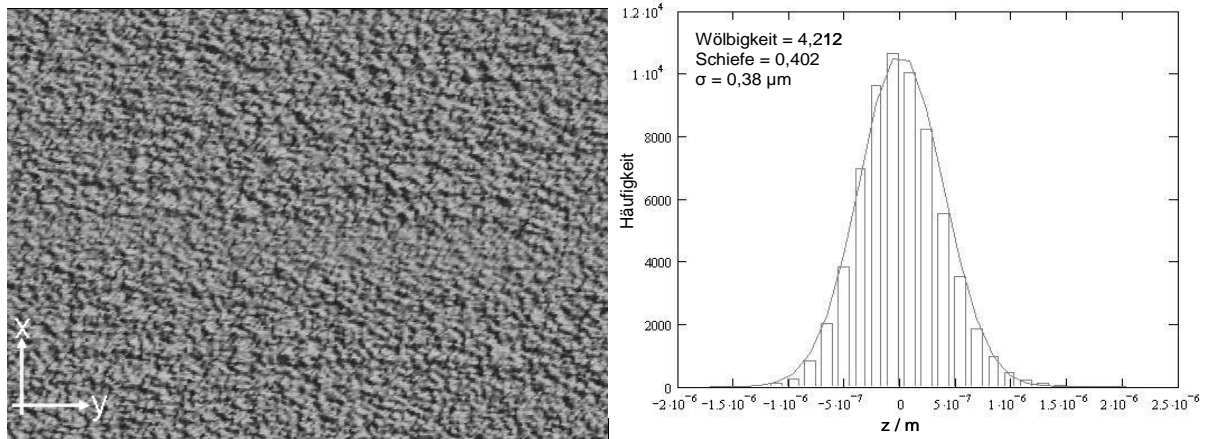


d. z-Werte-Verteilung

Abbildung 7.13 a – d: Simulierte Topographie einer durch Schleifprozesse erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 μm).

Drahtgeschnittene (fein) Oberfläche

Das 3D-Profil einer durch Drahtschneiden erzeugten Topographie wird in Abbildung 7.14 a –b.bzw. Abbildung 9.15 analysiert. Durch mehrere Schnittfolgen und langsame Schnittgeschwindigkeit wurde eine hinsichtlich Rauheit optimierte Oberfläche erzielt. Im mittleren Bereich von Abbildung 7.14 a. ist der horizontal verlaufende Abdruck des Schneiddrahtes zu erahnen. Die errechnete Rauheit ist mit $\sigma=0,38 \mu\text{m}$ etwa doppelt so, groß wie die der geschliffenen Oberfläche. Durch den Funkenerosionsprozess entsteht eine Häufigkeitsverteilung der z-Werte, die mit einer Wölbigkeit von 4,2 und einer Schiefe von 0,4 noch annähernd normalverteilt ist. Die Oberflächenstruktur ist isotrop mit exponentiell abfallender Autokorrelationsfunktion. Die Autokorrelationslängen ergeben sich zu $\beta_x = 2$ und $\beta_y = 3$. Die spektrale Leistungsdichten in x- und y-Richtung ergeben jeweils eine fraktale Dimension von $D=2,39$.



a.: Topographie

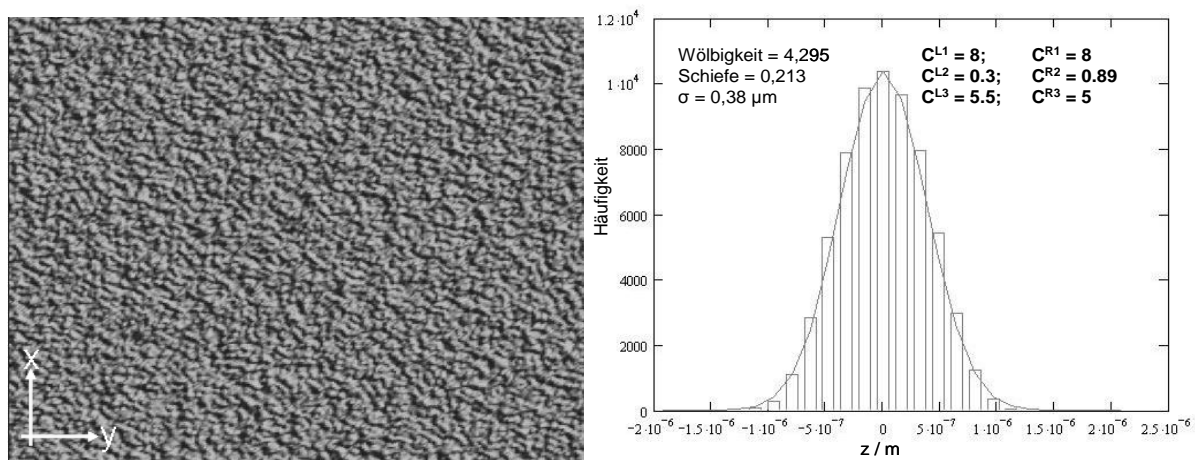
b.: z-Werte-Verteilung

Abbildung 7.14 a – b: Gemessene Topographie einer durch Drahtschneiden (fein) erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 μm).

Unter Verwendung der Kenndaten aus Abbildung 7.14 und entsprechender Transformation der z-Werte-Verteilung ergibt sich die in Abbildung 7.15 a. – b. gezeigte Bildfolge. Die zur Modellierung der Häufigkeitsverteilung verwendeten Parameter lauten:

$$\begin{aligned} C^{L1} &= 8; & C^{L2} &= 0,3; & C^{L3} &= 5,5; \\ C^{R1} &= 8; & C^{R2} &= 0,89; & C^{R3} &= 5; \end{aligned}$$

Hierdurch ergibt sich eine z-Werte-Verteilung mit einer Wölbigkeit von 4,2. Die Schiefe der Verteilung hat mit einem Wert von 0,21 nur den halben Wert der gemessenen Oberfläche. Hier zeigt sich der Nachteil der manuellen Bestimmung der Transformationsparameter. Die Entwicklung eines iterativen Verfahrens zur numerischen Ermittlung der Werte ist jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht geplant. Die Linienprofile ähneln stark den Linienprofilen der gemessenen Oberfläche (siehe auch Abbildung 9.16). Die angenäherten Autokorrelationen in x- und y-Richtung stimmen ebenfalls sehr gut mit den gemessenen Verläufen überein. Lediglich die aus den spektralen Leistungsdichten angenäherte fraktale Dimension ($D=2,25$) ist nicht mit der realen Fläche ($D=2,39$) vergleichbar.



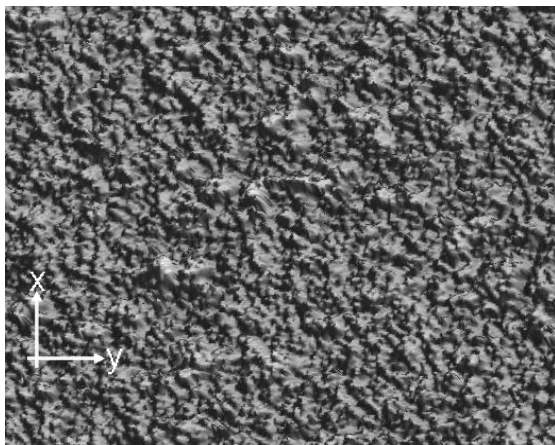
a.: Topographie

b.: z-Werte-Verteilung

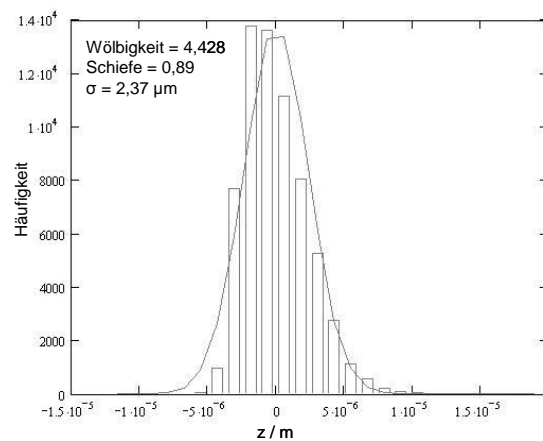
Abbildung 7.15 a – b: Simulierte Topographie einer durch Drahtschneiden (fein) erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 μm).

Drahtgeschnittene (grob) Oberfläche

Die 3D-Messung einer durch Drahtschneiden grob erodierten Oberfläche zeigt das folgende Beispiel (Abbildung 7.16 a.-b.). Bei einer vergleichbaren Wölbigkeit von 4,4, zeigt die z-Werte-Verteilung jedoch eine stärker ausgeprägte Schiefe von 0,89. Die Linienprofile aus (siehe auch Abbildung 9.17). zeigen deutlicherer Ausschläge in positiver als in negativer Richtung. Die Rauheit der Fläche errechnet sich zu $\sigma=2,37 \mu\text{m}$. Die Form der Autokorrelation in x/y-Richtung zeigt ein exponentiell abfallendes Verhalten. Durch die gröbere Struktur der Oberfläche ergeben sich größere Autokorrelationskoeffizienten ($\beta_x = \beta_y = 8$) als beim feinen Drahtschneiden. Während die Autokorrelation in y-Richtung sehr genau durch eine exponentielle Funktion beschrieben wird, zeigt sich bei der Autokorrelation in x-Richtung ab einem Abstand von mehr als 8 Messpunkten ein stärkerer Abfall als durch Glg. (6.25) beschrieben. Die fraktalen Dimensionen in y- und y-Richtung kann mit $D=2,3$ angenähert werden.



a.: Topographie



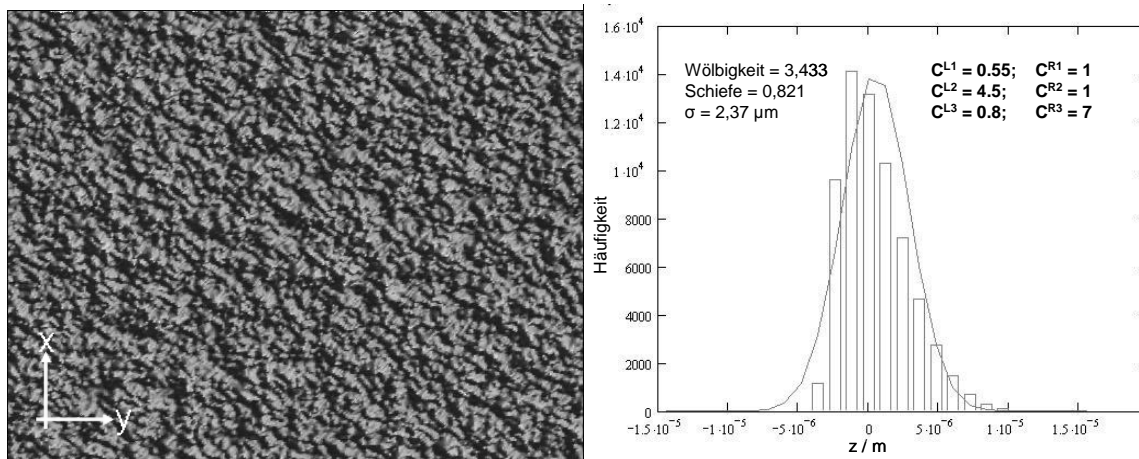
b.: z-Werte-Verteilung

Abbildung 7.16 a – b: Gemessene Topographie einer durch Drahtschneiden (grob) erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 μm).

Die Simulation einer grob drahtgeschnittenen Stahloberfläche ergibt mit den Kennwerten des obigen Beispiels und Transformationsparametern

$$\begin{array}{lll} C^{L1} = 0,55; & C^{L2} = 4,5; & C^{L3} = 0,8; \\ C^{R1} = 1; & C^{R2} = 1; & C^{R3} = 7; \end{array}$$

die Bildfolge von Abbildung 7.17 a.-b. Während die Wölbigkeit der z-Werte-Verteilung der simulierten Oberfläche mit 3,4 geringer als die der gemessenen Probe ausfällt (Wölbigkeit = 4,4), stimmt die Schiefe mit einem Wert von 0,82 in guter Näherung mit der Messung überein. Dies äußert sich auch im ähnlichen Aussehen der Draufsicht der Topographien aus Abbildung 7.16 a. und Abbildung 7.17 a. bzw. der Linienprofile. Sowohl die im Anhang 15 dargestellten Linienprofile aus Abbildung 9.17 a. (Messung) als auch aus Abbildung 9.18 a. (Simulation) zeigen für negative Werte eine schärfer ausgeprägte Grenze als bei positiven z-Werten. Die Autokorrelationsfunktionen zeigen wie zu erwarten eine sehr gute Übereinstimmung mit dem vorgegebenen exponentiellen Verlauf. Die spektralen Leistungsdichten ergeben die gleiche fraktale Dimension $D = 2,3$ wie sie auch aus der Messung ermittelt wurde.



a.: Topographie

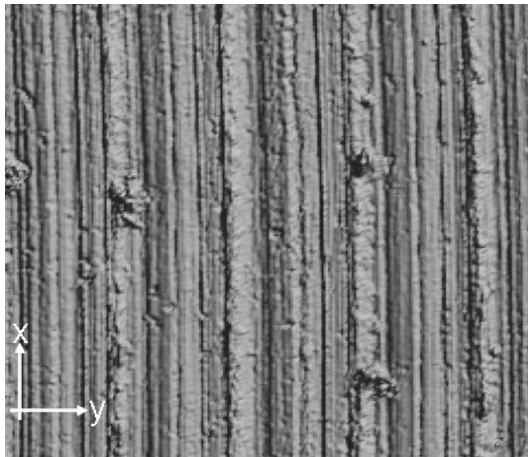
b.: z-Werte Verteilung

Abbildung 7.17 a – b: Simulierte Topographie einer durch Drahtschneiden (grob) erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 μm).

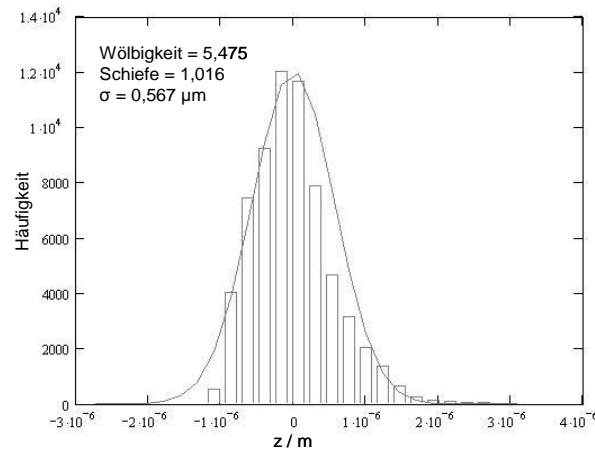
Gedrehte Oberflächen

Ein weiteres im Werkzeugbau häufig eingesetztes Bearbeitungsverfahren ist das Drehen. Im Gegensatz zu Verfahren wie dem Schleifen, entsteht hierbei eine Oberfläche mit rotationssymmetrischer Struktur. Es muss daher unterschieden werden, ob eine Vermessung der Oberfläche im Randbereich des Drehteiles erfolgt oder an der Rotationsachse. Im äußeren Bereich eines hinreichend großen Drehteiles sind die durch den Drehmeißel hervorgerufenen Bearbeitungsspuren annähernd geradlinig (Abbildung 7.18 a.). Der Bereich der Rotationsachse zeigt jedoch stark gekrümmte Strukturen auf (Abbildung 7.20 a.), die nicht mehr mit den bisher diskutierten Verfahren nachgebildet werden können. Die hier vorgestellten Algorithmen basieren ausschließlich auf einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem.

Abbildung 7.18 a. – b. zeigt den achsenfernen Bereich einer stirnseitig abgedrehten Stahl-Oberfläche. Dieser Bereich zeigt eine annähernd geradlinige Riefenstruktur. Die Oberfläche zeigt eine Rauheit von $\sigma=0,56 \mu\text{m}$ und ist damit noch rauer als eine durch grobes Drahtschneiden entstandene Topographie. Die Vermessung ergibt eine z-Werte-Verteilung mit einer Wölbigkeit von 5,4 und einer Schiefe von 1,0. Durch die Schiefe ergeben sich Linienprofile (siehe Abbildung 9.19), die ähnlich wie beim Schleifen hinsichtlich negativer Werte schärfer begrenzt sind als in positiver z-Richtung. Im Gegensatz zu den Schleif- oder Drahtschneideprozessen zeigen die Autokorrelationen in x- und y-Richtung einen linearen Abfall. Die Anisotropie der Oberfläche äußert sich in den Autokorrelationskoeffizienten $\beta_x=400$ bzw. $\beta_y=8$. Trotz unterschiedlicher Form ergeben die spektralen Leistungsdichten in x- und y-Richtung den gleichen Wert für die fraktale Dimension von $D=2,28$.



a.: Topographie



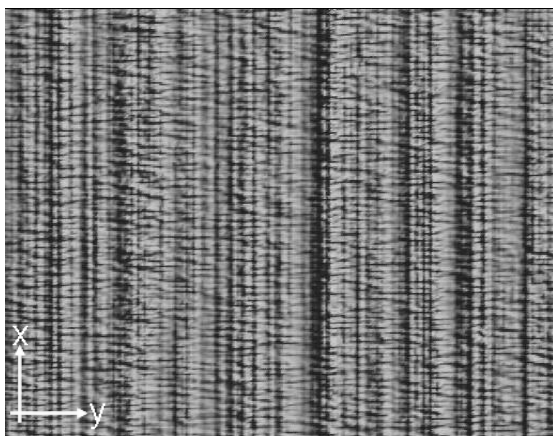
b.: z-Werte-Verteilung

Abbildung 7.18 a – b: Gemessene Topographie einer durch Drehen (außen) erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 μm).

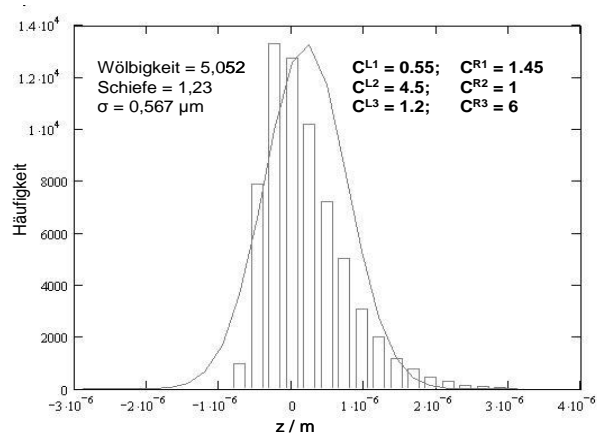
Die Bildfolge gemäß Abbildung 7.19 a. - b. zeigt die entsprechend den obigen Kennwerten durchgeführte Simulation einer gedrehten Oberfläche (Außenbereich). Als Transformationsparameter der z-Werte-Verteilung wurden folgende Konstanten bestimmt:

$$\begin{aligned} C^{L1} &= 0,55; & C^{L2} &= 4,5; & C^{L3} &= 1,2; \\ C^{R1} &= 1,45; & C^{R2} &= 1; & C^{R3} &= 6; \end{aligned}$$

Dies ergibt eine z-Werte-Verteilung mit einer Wölbigkeit von 5,0 (Messung 5,4) und einer Schiefe von 1,2 (Messung 1,0). Während die gemessene Topographie innerhalb der einzelnen Riefen in Drehrichtung nur eine geringe Strukturierung aufweist (Abbildung 7.18 a.), ist bei der simulierten Topographie auch hier eine additive Rauheit erkennbar. Diese wird auch in den unterschiedlichen Linienprofilen in x-Richtung aus Abbildung 9.19 a. und Abbildung 9.20 a. deutlich (siehe Anhang 15). Die Autokorrelation in y-Richtung folgt in sehr guter Näherung der vorgegebenen linearen Abhängigkeit. Die Autokorrelation in x-Richtung zeigt eine exponentiell abfallende Kurve (<10 Nachbarpunkte) um dann in eine lineare Form über zu gehen. Für die fraktale Dimension kann ein Wert von $D=2,25$ angegeben werden.



a.: Topographie



b.: z-Werte-Verteilung

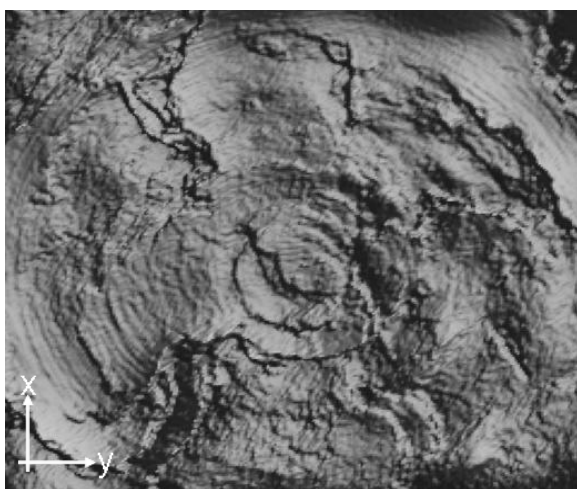
Abbildung 7.19 a – b: Simulierte Topographie einer durch Drehen (Außenbereich) erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 μm).

Wie bereits erwähnt, sind die in dieser Arbeit diskutierten Simulationmethoden nicht dazu geeignet, rotationssymmetrische Strukturen zu beschreiben, bzw. abzubilden. Dies soll an Hand des folgenden Beispiels verdeutlicht werden. Abbildung 7.20 bzw Abbildung 9.21 zeigt die Analyse des Rotationsmittelpunktes des in Abbildung 7.18 diskutierten Beispiels. In Abbildung 7.20 a. ist deutlich die Rotationssymmetrie der Oberflächenstruktur zu erkennen. Gegenüber dem Außenbereich der Probe ist die um fast eine Größenordnung höhere Rauheit von $\sigma=3,5 \mu\text{m}$ auffällig. Eine Wölbigkeit von 6,8 und eine Schiefe von $\sim 0,3$ lassen keine deutlichen Unterschiede zu den zuvor diskutierten Beispielen erkennen. An Hand der Linienprofile wird jedoch ersichtlich, dass das Profil aus einem langwelligen Anteil und einer kurzwelligen Komponente gebildet wird. Der langwellige Anteil bedingt die zuvor angesprochene hohe Rauheit der Oberfläche. Die Autokorrelationsfunktionen lassen sich am besten mit einem exponentiell abfallenden Verlauf interpolieren. Die Autokorrelationslänge in x-Richtung ergibt $\beta_x = 20$. Die Autokorrelationslänge in y-Richtung kann mit $\beta_y = 25$ angenähert werden. Die fraktale Dimension ergibt sich zu $D = 2,25$.

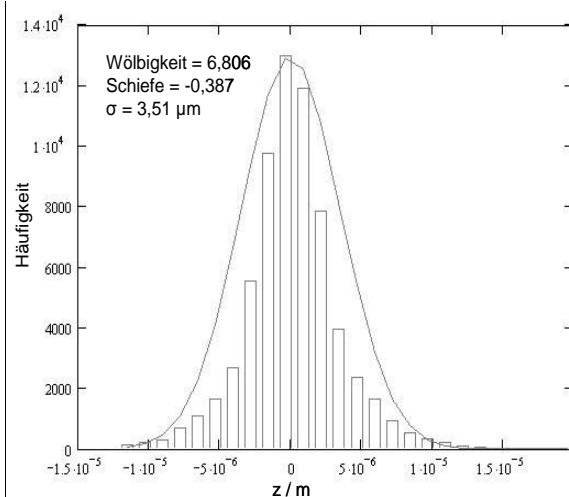
Der Versuch, an Hand dieser Kennwerte die Oberfläche abzubilden, ergibt das in Abbildung 7.21 a. gezeigte Bild. Um die z-Werte Verteilung aus Abbildung 7.20 b. anzunähern wurden folgende Transformationsparameter verwendet:

$$\begin{array}{lll} C^{L1} = 3,5; & C^{L2} = 1,9; & C^{L3} = 0,5; \\ C^{R1} = 3; & C^{R2} = 1,9; & C^{R3} = 0,5; \end{array}$$

Bereits an Hand der Draufsicht der so erzeugten Topographie ist zu erkennen, dass die rotationssymmetrische Oberfläche aus der Bildfolge von Abbildung 7.20 nicht zu erkennen ist. Um dies zu erreichen müsste sowohl bei der Errechnung der Autokorrelationsfunktionen, als auch bei der numerischen Bildung der Punktematrix mit sphärischen Koordinaten gearbeitet werden. Da jedoch die in der Steckverbinderindustrie vorkommenden Oberflächen auf Grund der Herstellungsprozesse (siehe Kapitel 4) keine rotationssymmetrischen Oberflächenstrukturen aufweisen, wurde diese Option nicht in der Software berücksichtigt.

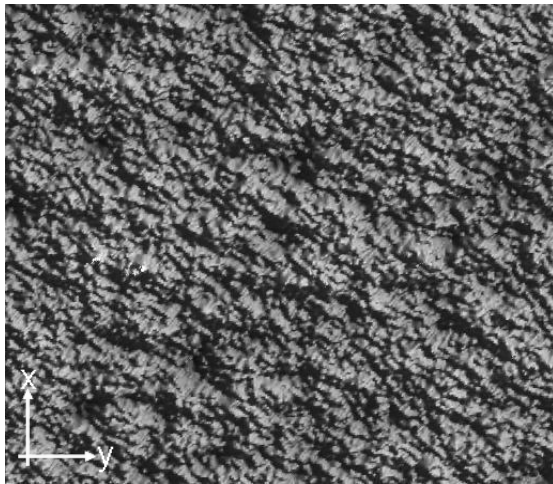


a.: Topographie

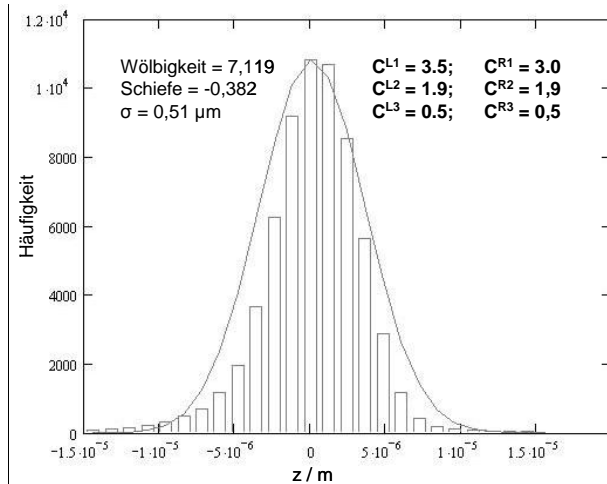


b.: z-Werte-Verteilung

Abbildung 7.20 a – b: Gemessene Topographie einer durch Drehen erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 μm). Dargestellt ist der Bereich um die Drehachse.



a.: Topographie

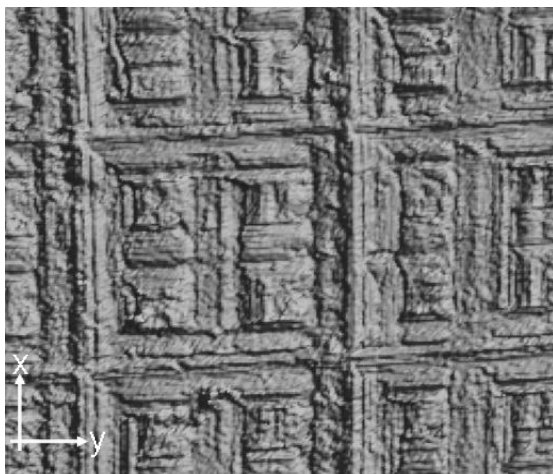


b. z-Werte-Verteilung

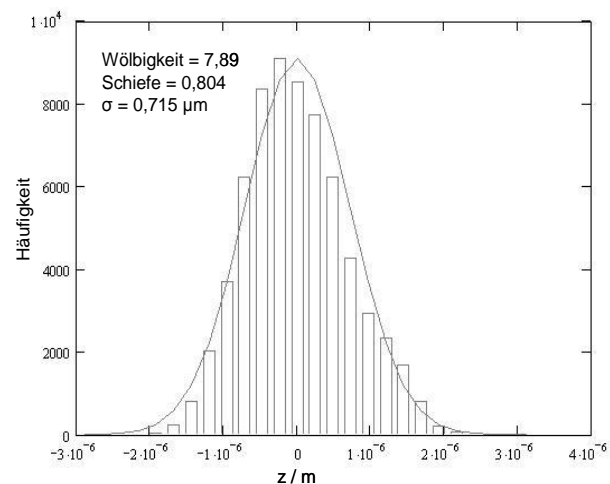
Abbildung 7.21 a – e: Simulierte Topographie einer durch Drehen erzeugten Stahl-Oberfläche mit den Parametern von Abbildung 7.20 (256 x 256 Pkt. Auflösung $1,5625 \mu\text{m}$).

Gefräste Oberflächen

Eine weitere Oberflächenstrukturform, die nicht mit den hier besprochenen Simulationstechniken nachgebildet werden kann, stellt die in Abbildung 7.22 bzw. Abbildung 9.22 diskutierte gefräste Oberfläche dar. Die doppelt anisotrope Struktur ergibt sich durch die mehrmalige senkrecht zueinander stehende Überfräsung des Probenkörpers. Die Rauheit der Oberfläche kann mit $\sigma = 0,71 \mu\text{m}$ angegeben werden. Die z-Werte-Verteilung zeigt mit einer Wölbigkeit von $\sim 7,9$ und einer Schiefe von 0,8 keine Auffälligkeiten gegenüber den zuvor beschriebenen z-Werte-Verteilungen.



a.: Topographie



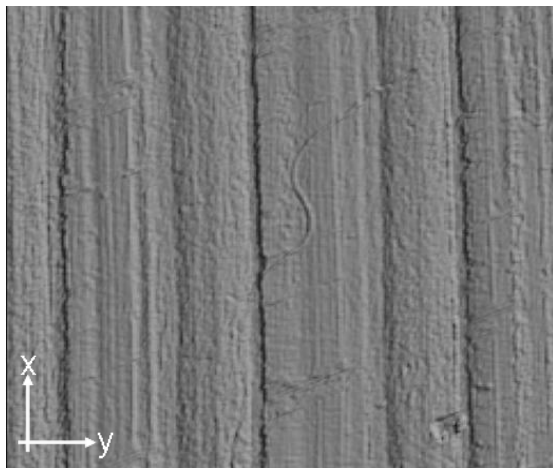
b.: z-Werte-Verteilung

Abbildung 7.22 a – g: Gemessene Topographie einer durch Fräsen (grob) erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung $1,5625 \mu\text{m}$).

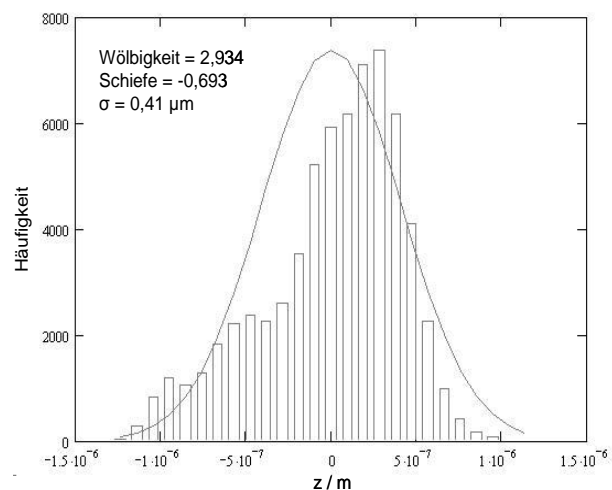
Die Linienprofile (siehe Abbildung 9.22 a.) zeigen eine ähnliche Struktur wie die Profile der fraktal erzeugten Oberflächen aus Abbildung 7.1 und Abbildung 7.2. Die Autokorrelation in y-Richtung zeigt einen linearen Abfall der mit einem Autokorrelationskoeffizienten $\beta_y = 10$ angenähert werden kann.

Die Autokorrelation in x-Richtung (Abbildung 9.22 b.) zeigt jedoch ein gänzlich anderes Verhalten. Nach einem anfänglich linearen Abfall der ebenfalls mit einer Autokorrelationslänge von 10 angenähert werden kann, geht die Kurve in einen wellenförmigen Verlauf über, der um einen Mittelwert von $\sim 0,4$ schwingt. Da dieses Verhalten von den hier besprochenen Autokorrelationsfunktionen gemäß Glg. (6.25) bzw. Glg. (6.26) nicht beschrieben werden kann, wird auf den Versuch diese Oberfläche zu simulieren verzichtet. Der Vollständigkeit halber wird hier noch erwähnt, dass sich für die fraktale Dimension in x-Richtung der Wert 2,23 und in y-Richtung der Werte 2,3 ergibt.

Ein gänzlich anderes Bild ergibt sich, wenn die Oberfläche durch einen Fräsvorgang entsteht, der nur in einer Richtung erfolgt. Hierdurch entsteht die in der Bildfolge aus Abbildung 7.23 a. – b. gezeigte Oberfläche. Die Draufsicht zeigt eine Oberflächenstruktur, die ähnlich wie bei der gedrehten Oberfläche (Außenbereich) innerhalb der einzelnen Riefen in x-Richtung nur geringe Mikrorauheiten erkennen lässt. Obwohl die z-Werte-Verteilung eine stark asymmetrische Form aufweist, errechnet sich die Wölbigkeit mit einem Wert von ~ 3 . Die Schiefe zeigt mit etwa $-0,7$ einen negativen Wert. Die bisher untersuchten Bearbeitungsverfahren ergaben immer eine Schiefe mit positivem Vorzeichen. Die Rauheit ergibt sich zu $\sigma = 0,41 \mu\text{m}$. Die Linienprofile (siehe Abbildung 9.23) spiegeln die anisotrope Struktur aus Abbildung 7.23 a. wieder. Während das Profil in x-Richtung nur geringe Modulationen zeigt, ist in y-Richtung sehr gut die Riefenstruktur zu erkennen. Die Autokorrelation in y-Richtung lässt sich sehr gut mit einem linearen Abfall beschreiben. Für den Autokorrelationskoeffizienten ergibt sich $\beta_y = 9$. Die Autokorrelation in x-Richtung zeigt, nach einem anfänglichen steilem Abfall, ein ebenfalls annähernd lineares Verhalten. Auf Grund der starken Anisotropie ergibt sich $\beta_x = 700$. Die fraktale Dimension ergibt aus der spektralen Leistungsdichte in x- und y-Richtung jeweils den Wert $D = 2,28$.



a.: Topographie



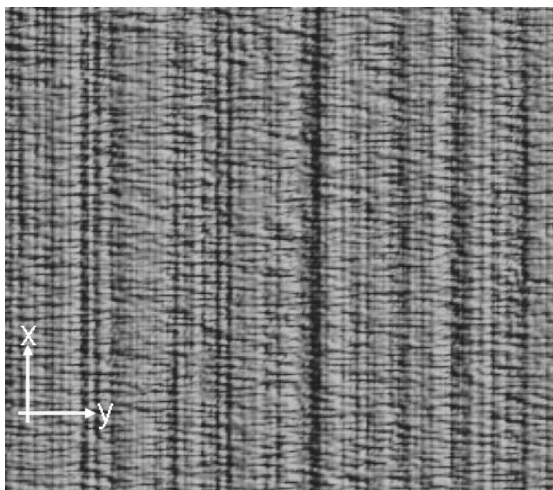
b.: z-Werte Verteilung

Abbildung 7.23 a – g: Gemessene Topographie einer durch Fräsen (fein) erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung $1,5625 \mu\text{m}$).

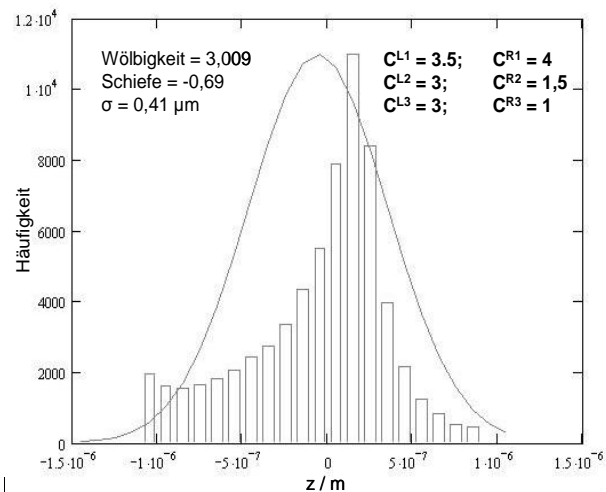
Eine Simulation der gefrästen Fläche aus Abbildung 7.23 ergibt ein ähnliches Bild, wie es bereits bei der simulierten gedrehten Fläche (Außenbereich) aus Abbildung 7.19 beschrieben wurde. Auch hier wird eine Riefenstruktur analog zur der gemessenen Fläche erzeugt. Die Draufsicht der Oberfläche in Abbildung 7.24 a. zeigt ebenfalls eine überlagerte Mikrorauheit innerhalb der einzelnen Riefen. Die z-Werte-Verteilung wird hingegen hinsichtlich der Kennwerte Wölbigkeit (3) und Schiefe ($-0,69$) sehr gut angenähert. Die Transformationsparameter hierzu lauten:

$$\begin{array}{lll} C^{L1} = 3,5; & C^{L2} = 3; & C^{L3} = 3; \\ C^{R1} = 4; & C^{R2} = 1,5; & C^{R3} = 1; \end{array}$$

Die Linienprofile zeigen in y-Richtung einen Verlauf, wie er auch bei der gemessenen Fläche aus Abbildung 9.23 a. gegeben ist. Das Profil in x-Richtung zeigt jedoch wie aus der Draufsicht (Abbildung 7.24 a.) zu erwarten, eine deutlich größerer Rauheit. Die Autokorrelation in y-Richtung ergibt wieder in sehr guter Näherung einen linearen Abfall mit der Korrelationslänge $\beta_y=9$. Die Autokorrelation in x-Richtung zeigt jedoch ein ähnliches Verhalten wie bei der gefrästen Oberfläche aus der Bildfolge von Abbildung 7.22. Auch in diesem Falle geht die Autokorrelationsfunktion nach einem starken Abfall hinsichtlich der ersten Nachbarkpunkte, in einen nahezu konstanten Bereich um den Wert 0,6 über. Dies lässt sich jedoch mit der sehr großen Korrelationslänge von $\beta_x=700$ erklären. Die fraktale Dimension ergibt sich in x-Richtung zu $D=2,28$, was dem Wert der gemessenen Fläche entspricht. Die fraktale Dimension in y-Richtung ergibt den Wert $D=2,25$.



a.: Topographie

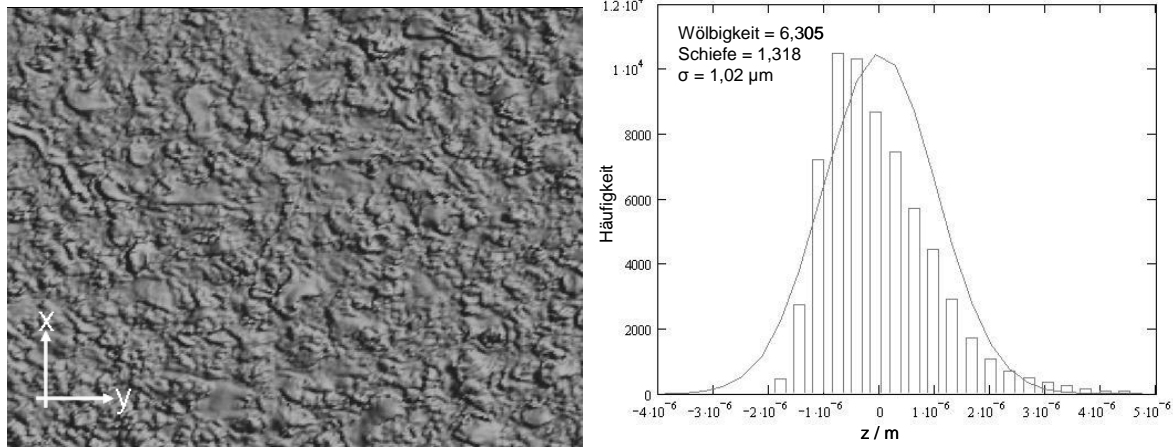


b.: z-Werte Verteilung

Abbildung 7.24 a – g: Simulierte Topographie einer durch Fräsen (fein) erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 μm).

Senkerodierte Oberflächen

Eine isotrope Oberflächenstruktur wird durch Senkerodieren erzielt. Abbildung 7.25 a.-g. zeigt die Kennwerte einer so erzeugten Oberfläche. Die Rauheit der Oberfläche beträgt $\sigma=1,0 \mu\text{m}$. Die Wölbigkeit der z-Werte Verteilung ergibt sich zu 6,305. Die Schiefe der Verteilung zeigt mit 1,31 einen im Vergleich zu den zuvor untersuchten Oberflächen einen relativ hohen Wert. Dies spiegelt sich auch in den Linienprofilen aus Abbildung 9.25 a. (siehe Anhang 15) wieder. Während der Großteil der z-Werte im negativen Bereich liegt (Abbildung 7.25 b.), zeigen sich hier deutlich weniger Ausschläge hin zu Extremwerten als im positiven Wertebereich. Die Autokorrelation in x- und y-Richtung kann in sehr guter Näherung über eine exponentiell abfallende Kurve beschrieben werden. Die Korrelationslängen sind, wie aus dem isotropen Erscheinungsbild der Oberfläche zu erwarten, mit $\beta_x = \beta_y = 8$ richtungsunabhängig. Gleiches gilt für die fraktale Dimension, die mit $D=2,29$ angegeben werden kann.



a.: Topographie

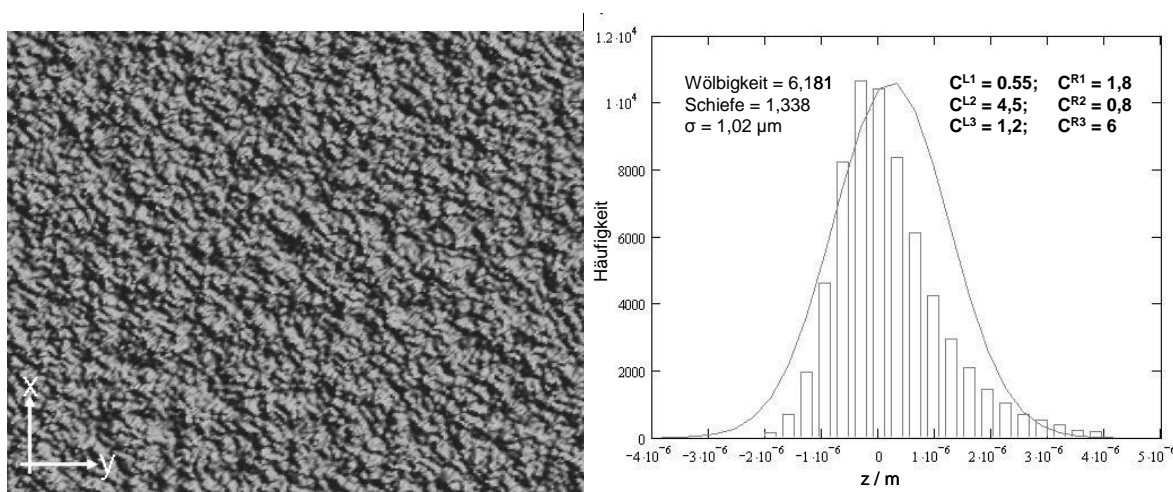
b.: z-Werte-Verteilung

Abbildung 7.25 a – b: Gemessene Topographie einer durch Senkerodieren (fein) erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung $1,5625 \mu\text{m}$).

Die isotrope Oberflächenstruktur der senkerodierten Oberfläche lässt sich, wie in der Bildfolge von Abbildung 7.26 bzw. Abbildung 9.26 gezeigt, sehr genau durch eine Simulation rekonstruieren. Die Transformationsparameter gemäß Glg. (6.39) können wie folgt angegeben werden.

$$\begin{aligned} C^{L1} &= 0,55; & C^{L2} &= 4,5; & C^{L3} &= 1,2; \\ C^{R1} &= 1,8; & C^{R2} &= 0,8; & C^{R3} &= 6; \end{aligned}$$

Mit einer Wölbigkeit von 6,1 und einer Schiefe von 1,3 wird die z-Wert-Verteilung der gemessenen senkerodierten Oberfläche aus Abbildung 7.25 b. bei gleicher Rauheit sehr gut reproduziert. Die Draufsicht der so erzeugten Oberfläche erscheint im Vergleich zu Abbildung 7.25 a. feinkörniger. Die Linienprofile zeigen jedoch das bereits bei der gemessenen Oberfläche beschriebene Verhalten. Die Autokorrelationen werden durch die Transformation der z-Werte-Verteilung nur wenig gegenüber der vorgegebenen exponentiellen Form geändert. Mit einer fraktalen Dimension von $D=2,3$ ergibt sich ein vergleichbarer Wert wie bei der gemessenen Topographie.



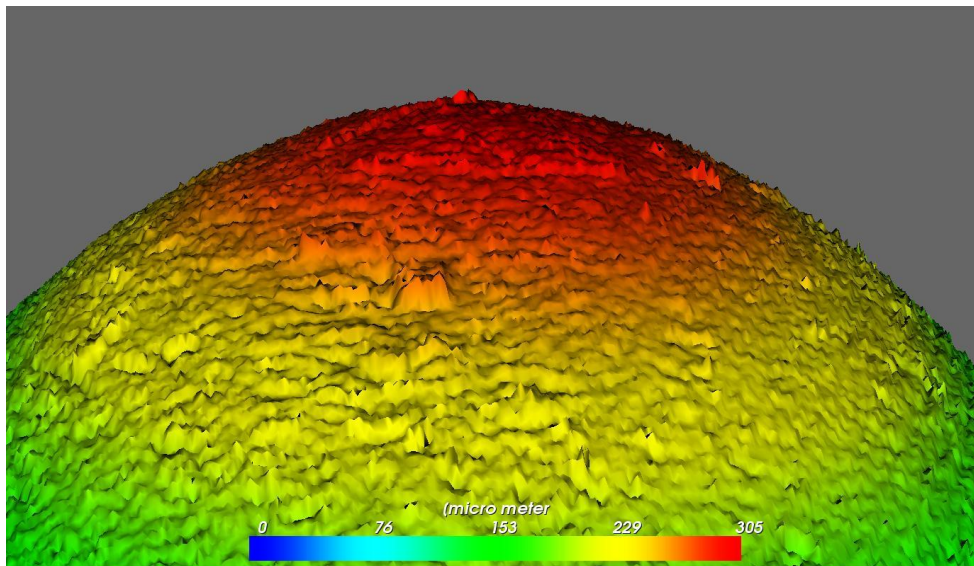
a.: Topographie

b.: z-Werte-Verteilung

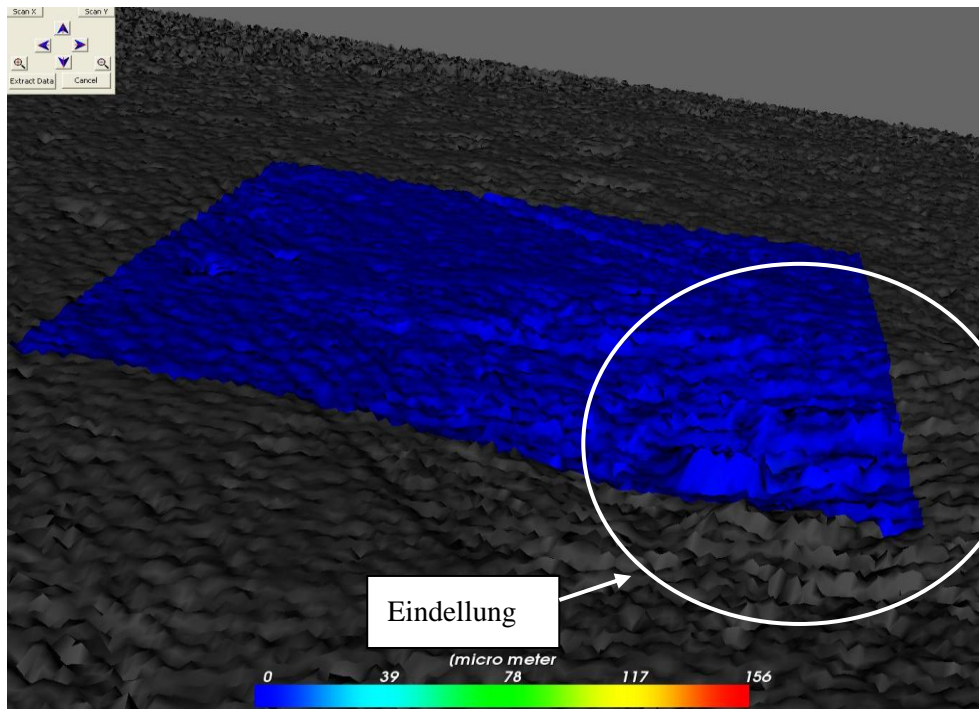
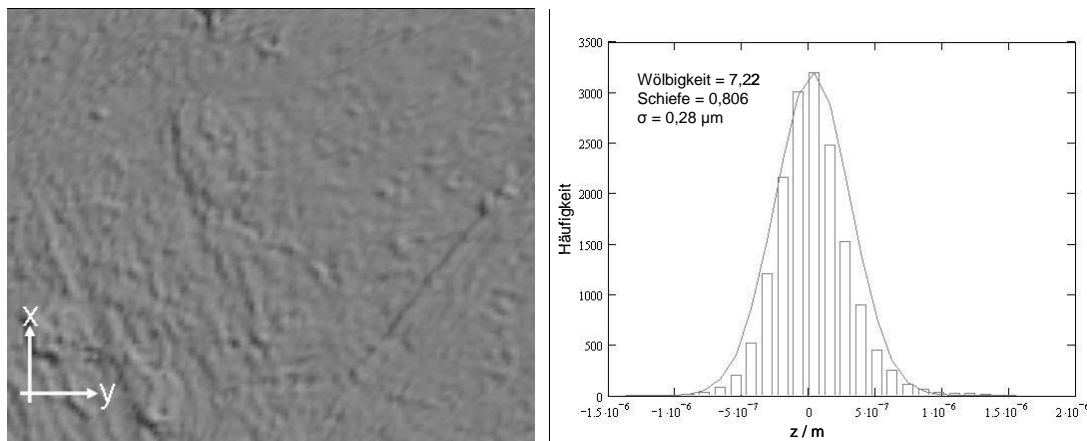
Abbildung 7.26 a – b: Simulierte Topographie einer durch Senkerodieren (fein) erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung $1,5625 \mu\text{m}$).

Au-Messprobe

Als letztes Beispiel soll hier noch das gemessene Oberflächenprofil der Au-Messprobe des in Kapitel 5.2 beschriebenen Widerstandsmessplatzes untersucht werden. Das ursprüngliche 3D-Messprofil (Abbildung 7.27 a.) wurde hinsichtlich der ersten 6 Frequenzen der Fouriertransformierten gefiltert. Um Randeffekte zu vermeiden, wurde nur der zentrale Bildausschnitt zur weiteren Analyse verwendet. Hierdurch ergibt sich eine Reduzierung der Datenpunkte auf 128x128 Punkte. Die physikalische Auflösung von 1,5625 μm in x- bzw. y-Richtung bleibt hierdurch jedoch unverändert. Abbildung 7.27 a.- d. zeigt eine Oberfläche, welche durch folgende Kennwerte beschrieben werden kann. Die Standardabweichung der z-Werte-Verteilung ergibt $\sigma=0,28 \mu\text{m}$. Dieser Wert ist etwas geringer als die gemessene Rauheit ($\sigma=0,46 \mu\text{m}$) des belasteten Zinn-Kontaktpunktes aus Abbildung 7.10. Die Wölbigkeit der z-Werte-Verteilung ist mit 7,22 deutlich geringer als beim Zinn-Kontakt ($\sim 31,2$). Ähnliches gilt für die Schiefe. Bei einer Schiefe von 0,8, ergeben sich Unterschiede hinsichtlich Vorzeichen und Betrag. (Schiefe Sn-Kontakt = -2,8). Die Linienprofile (siehe Anhang 15, Abbildung 9.27) lassen keine Abplattungen auf Grund einer plastisch deformierten Oberfläche erkennen. Dies kann auch an Hand Abbildung 7.27 a. verifiziert werden. Lediglich die Subtraktion einer Kugel mit Radius 1,5 mm lässt eine leichte Eindellung vermuten (Abbildung 7.27 b.). Diese Eindellung geht jedoch durch das hier verwendete Filterverfahren in den Linienprofilen verloren. Die Autokorrelation in x- und y-Richtung kann in guter Näherung mit einem exponentiellen Abfall gemäß Glg. (6.25) beschrieben werden. Die Korrelationslängen ergeben $\beta_x = \beta_y = 6$. Die fraktale Dimension ergibt richtungsunabhängig einen Wert von $D = 2,35$.



a.: 3D-Messung der Au-Sonde. /512 x 512 Pkt.; Auflösung = 1,5625 μm) z-Werte um Faktor 4 gegenüber x/y-Koordinaten überhöht

b.: Au-Probe nach Abzug einer Kugelfläche mit $r=1,5$ mm.

c.: Topographie

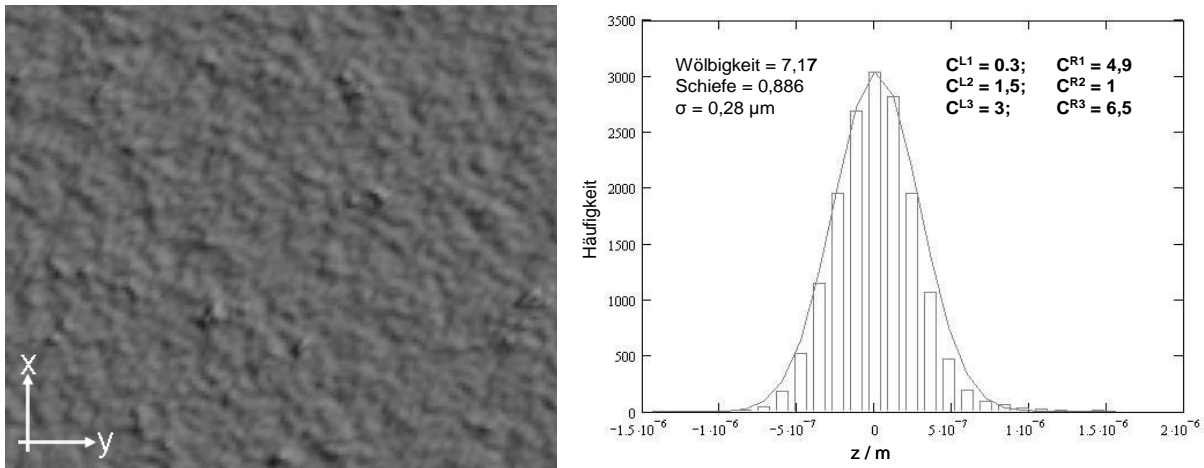
d.: z-Werte-Verteilung

Abbildung 7.27 c. – d.: Gemessene Topographie der Au-Sonde (128 x 128 Pkt. Auflösung 1,5625 μm).

Eine entsprechende Simulation der Messsonde ergibt die Bildfolge gemäß Abbildung 7.28 a-b.. Um die z-Werte Verteilung anzunähern, wurden folgende Transformationsparameter angewendet:

$$\begin{aligned} C^{L1} &= 0,3; & C^{L2} &= 1,5; & C^{L3} &= 3; \\ C^{R1} &= 4,9; & C^{R2} &= 1; & C^{R3} &= 6,5; \end{aligned}$$

Die im rechten Bildrand von Abbildung 7.27 a. erkennbaren lokalen, linienartigen Strukturen, die auf Grund äußerer mechanischer Einwirkung entstanden, können durch einen Simulationsprozess, der auf einer Folge von Zufallszahlen aufbaut, nicht nachgebildet werden. Durch die aus der gemessenen Au-Sonde ermittelten isotropen Korrelationslängen ergibt sich eine im Vergleich Abbildung 7.27 a. rauher erscheinende Oberfläche.



a.: Topographie

b.: z-Werte Verteilung

Abbildung 7.28 a – g: Simulierte Topographie der Au-Sonde (128 x 128 Pkt. Auflösung 1,5625 μm).

Dieser visuelle Eindruck wird durch die Gegenüberstellung der 3D-Darstellungen in Tabelle 7.6 nicht bestätigt. Die erzeugte z-Werte-Verteilung stimmt mit einer Wölbigkeit von 7,1 und einer Schiefe von 0,88 gut mit der Messwerteverteilung (Wölbigkeit = 7,2; Schiefe = 0,8) überein. Die Linienprofile zeigen auf Grund der Isotropie kein unterschiedliches Verhalten in x- bzw. y-Richtung. Durch die Transformation der z-Werte-Verteilung werden die Autokorrelationen hinsichtlich des vorgegebenen Verlaufes nicht verändert. Im Vergleich zur gemessenen Sonde ($D=2,35$) ergibt sich mit einem Wert von $D=2,3$ eine annähernd gleiche fraktale Dimension. Der Übersichtlichkeit halber sind in Tabelle 7.5 sämtliche Kennwerte der zuvor diskutierten Oberfläche aufgelistet. Falls nicht explizit erwähnt, dienen zur Parametrisierung der jeweiligen Simulationen, die in Kapitel 7.1 aufgeführten Werte. Zusammen mit den ebenfalls aufgelisteten Transformationsparametern kann Tabelle 7.5 als Anleitung (Kochbuch) zur Simulation der in der Steckverbinderindustrie gängigen Oberflächentypen dienen.

Zusammenfassung der Ergebnisse

Zur Beschreibung einer realen technischen Oberfläche genügen bei gegebener Auflösung sechs Parameter.

1. Die Standardabweichung der z-Werte-Verteilung σ (hier Eingabe in μm)
2. Wölbigkeit der z-Werte Verteilung
3. Schiefe der z-Werte-Verteilung
4. Die Korrelationslänge in x-Richtung β_x (hier Angabe in Punkte)
5. Die Korrelationslänge in y-Richtung β_y (hier Angabe in Punkte)
6. Form der Autokorrelationsfunktion (linear / exponentiell)

Die Anpassung von Wölbigkeit und Schiefe erfolgt analog zu Kapitel 6.1.5 gemäß Glg. (6.39).

Tabelle 7.5: Kennwerte technischer Oberflächen und deren erzeugende Parameter

	Abb.	$\sigma / \mu\text{m}$	β_x / Pkt	β_y / Pkt	Art	D_{avg}	Kurt.	Skew	C^{L1}	C^{L2}	C^{L3}	C^{R1}	C^{R1}	C^{R1}
Fraktal anisotrop	7.1	0,2	22	35	lin.	2,25	3,06	-0,07	-	-	-	-	-	-
Fraktal isotrop	7.2	0,2	25	25	lin.	2,25	3,08	-0,05	-	-	-	-	-	-
Fast fraktal	7.3	0,2	-	-	pol.	2,33	2,84	-0,04	-	-	-	-	-	-
Stat. isotrop	7.4	0,2	2	2	lin.	2,32	2,74	0,01	-	-	-	-	-	-
Gem. anisotrop	7.6	0,2	8	420	lin.	2,28	3,57	0,03	-	-	-	-	-	-
Stat. anisotrop	7.5	0,2	8	420	lin.	2,24	3,25	0,24	-	-	-	-	-	-
Kont. Pkt. unb. gemessen	7.7	0,51	2	2	lin.	2,35	49,12	-0,13	-	-	-	-	-	-
Kont. Pkt. unb. simuliert	7.9	0,51	2	2	lin.	2,25	43,62	-0,30	12	1	9,5	3	0,9	2,3
Kont. Pkt. bel. gemessen	7.10	0,46	3	3	lin.	2,34	31,22	-2,86	-	-	-	-	-	-
Kont. Pkt. bel. simuliert	7.11	0,46	2	2	lin.	2,25	34,79	-3,11	6	1,1	5	NA	NA	0
Schleifen gemessen	7.12	0,139	550	2	exp.	2,29	15,26	1,66	-	-	-	-	-	-
Schleifen simuliert	7.13	0,139	400 (550)	3 (2)	exp.	2,3	14,84	1,61	8	1	3	2,35	0,67	5,5
Drahterodieren fein, gemessen	7.14	0,38	2	3	exp.	2,39	4,21	0,4	-	-	-	-	-	-
Drahterodieren fein, simuliert	7.15	0,38	2	3	exp.	2,32	4,29	0,21	8	0,3	5,5	8	0,89	5
Drahterodieren grob, gem.	7.16	2,37	8	8	exp.	2,29	4,42	0,89	-	-	-	-	-	-
Drahterodieren grob, simuliert	7.17	2,37	8	8	exp.	2,3	3,43	0,82	0,55	4,5	0,8	1	1	7
Drehen gemessen	7.18	0,567	400	8	lin.	2,28	5,47	1,016	-	-	-	-	-	-
Drehen simuliert	7.19	0,567	400	8	lin.	2,25	5,05	1,23	0,55	4,5	1,2	1,45	1	6
Drehen innen	7.20	3,51	20	25	exp.	2,25	6,80	-0,38	-	-	-	-	-	-
Senkerodieren fein, gemessen	7.25	1,02	8	8	exp.	2,29	6,30	1,31	-	-	-	-	-	-
Senkerodieren fein, simuliert	7.26	1,02	8	8	exp.	2,3	6,18	1,33	0,55	4,5	1,2	1,8	0,8	6

	Abb.	σ / μm	β_x / Pkt	β_y / Pkt	Art	D_{avg}	Kurt.	Skew	C^{L1}	C^{L2}	C^{L3}	C^{R1}	C^{R1}	C^{R1}
Au-Sonde, gemessen	7.27	0,28	6	6	exp.	2,35	7,22	0,80	-	-	-	-	-	-
Au-Sonde, simuliert	7.28	0,28	6	6	exp.	2,3	7,17	0,88	0,3	1,5	3	4,9	1	6,5
Fräsen fein, gemessen	7.23	0,41	700	9	lin.	2,28	2,93	-0,69	-	-	-	-	-	-
Fräsen fein, simuliert	7.24	0,41	700	9	lin.	2,24	3,0	-0,69	3,5	3	3	4	1,5	1
Fräsen grob, gemessen	7.22	0,71	NA	10	lin.	2,26	7,89	0,80	-	-	-	-	-	-

Obwohl die fraktale Dimension D nicht geeignet erscheint, die Eigenschaften einer technischen Oberfläche zu charakterisieren, sei hier noch angemerkt, dass die hier ermittelten Werte mit den Angaben in der Literatur übereinstimmen. Für dreidimensionale Oberflächen wird in der Literatur [71][9] für die fraktale Dimension ein Bereich zwischen 2 und 3 angegeben ($1 < D < 2$ für Linienprofile). Kogut et al. [72] rechnen mit Werten für D zwischen 2,1 und 2,4. Dies ist in sehr guter Übereinstimmung mit den hier angegebenen Werten. Tabelle 7.6 zeigt eine Gegenüberstellung der 3D-Darstellungen gemessener realer Oberflächen mit den aus den entsprechenden Kennwerten und Transformationsparametern aus Tabelle 7.5 erzeugten simulierten Oberflächen. Bis auf die rotationssymmetrische Oberfläche (Drehen Mitte) und die doppelt anisotrope gefräste Oberfläche stimmen die simulierten Topographien hinsichtlich Kennwerten und visuellem Eindruck in guter Näherung überein. Die in dieser Tabelle dargestellten simulierten Topographien wurden ausschließlich mit den statistischen Verfahren analog zu Kapitel 6.1.3 erzeugt.

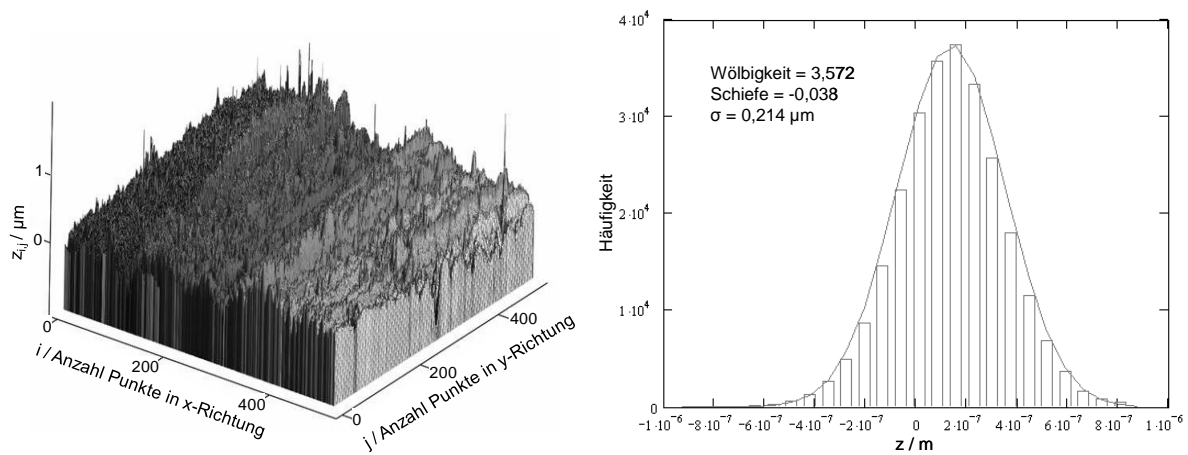
Tabelle 7.6: Vergleich zwischen gemessenen und simulierten dreidimensionalen Oberflächen.

Oberfläche	Gemessen	Simuliert
Zinn Kontakt unbelastet (256 x 256 Pkt.)		
Zinn Kontakt belastet (128 x 128 Pkt.)		
Schleifen (128 x 128 Pkt.)		
Drahterodieren fein (128 x 128 Pkt.)		
Drahterodieren grob (128 x 128 Pkt.)		
Drehen außen (128 x 128 Pkt.)		

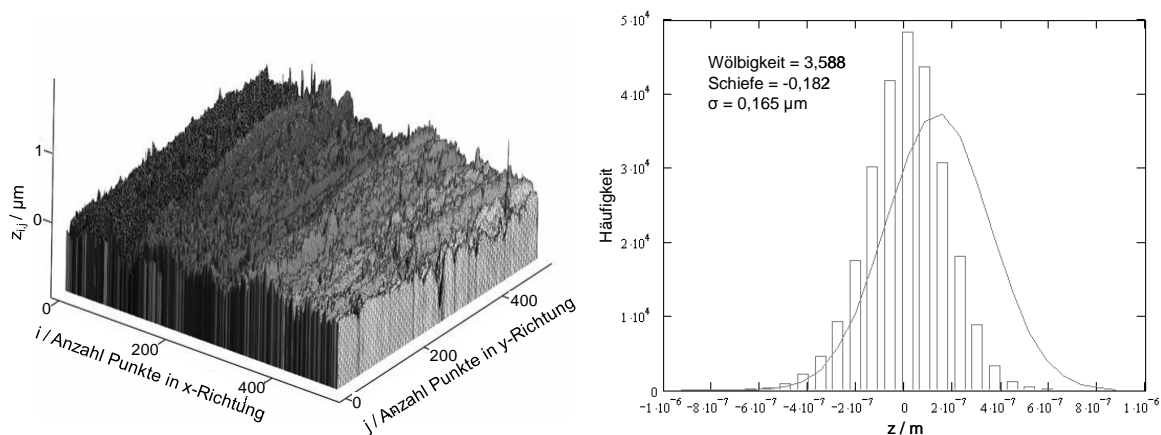
Drehen Mitte (128 x 128 Pkt.)		
Fräsen (128 x 128 Pkt.)		Simulation nicht durchführbar, da Autokorrelationsfunktion in x-Richtung durch die hier verwendeten Verfahren nicht abgebildet werden kann.
Fräsen fein (128 x 128 Pkt.)		
Senkerodieren fein (128 x 128 Pkt.)		
Gold-Sonde (128 x 128 Pkt.)		

Der Vollständigkeit halber wird an dieser Stelle die zweite in Kapitel 6.1.5 dargestellte Möglichkeit zur nachträglichen Änderung einer z-Werte-Verteilung aufgezeigt. In den vorhergegangenen Beispielen, wurden die vorgegebenen normalverteilten z-Werte so transformiert, dass Wölbigkeit und Schiefe einer realen gemessenen Verteilung entsprechen. In den folgenden beiden Beispielen, wird die z-Werte-Verteilung einer gemessenen Oberflächentopographie analog zu Glg. (6.38) so verändert, dass ein überproportionaler Abtrag der höchsten Oberflächenpunkte simuliert wird. Die Bildfolge von Ab-

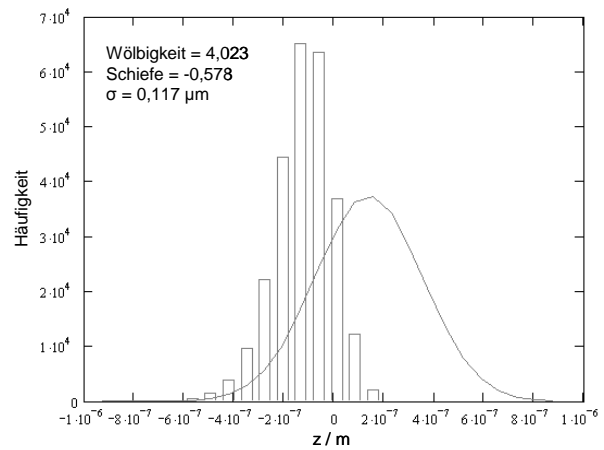
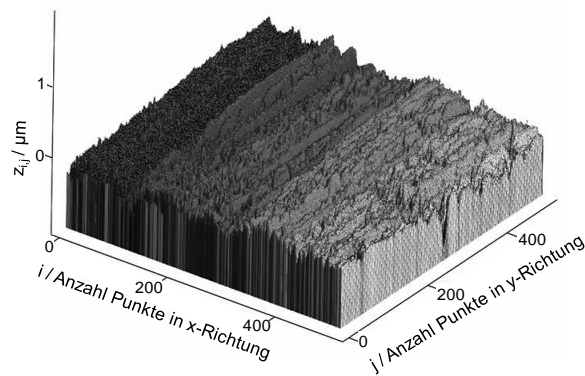
bildung 7.29 a. – e. zeigt den simulierten Verschleiß einer gemessenen anisotropen Oberfläche. Hierbei wird der Exponent in Glg. (6.38) mit $C_2=1.0$ konstant belassen. Der Multiplikationsfaktor wird ausgehend von einem Startwert $C_1=0,0$ in Inkrementen von 0,1 erhöht. An Hand der 3D-Darstellungen und der z-Werte-Verteilungen ist deutlich, dass bei steigendem Wert von C_1 ein immer stärkerer Abtrag (hohe z-Werte) erfolgt, was sich in einer entsprechenden Erhöhung der Häufigkeit geringerer z-Werte manifestiert. Zum Vergleich ist zusätzlich zu der Balkendarstellung der z-Werte-Verteilung die Hüllkurve der ursprünglichen Verteilung gezeigt. Die Erhöhung des Multiplikationsfaktors äußert sich in den Verteilungen sowohl in einer Erhöhung der Wölbigkeit, als auch der Schiefe. Die Rauheit verringert sich hingegen wie beabsichtigt. In Tabelle 7.7 sind die Transformationsparameter gemäß Glg. (6.38) und die daraus resultierenden Kennwerte der entsprechenden Verteilungen aufgelistet.



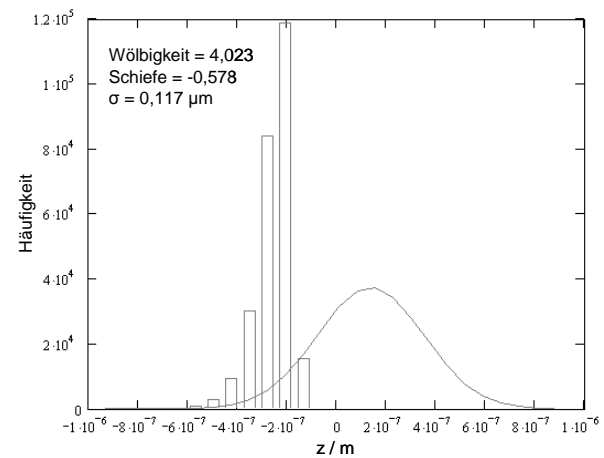
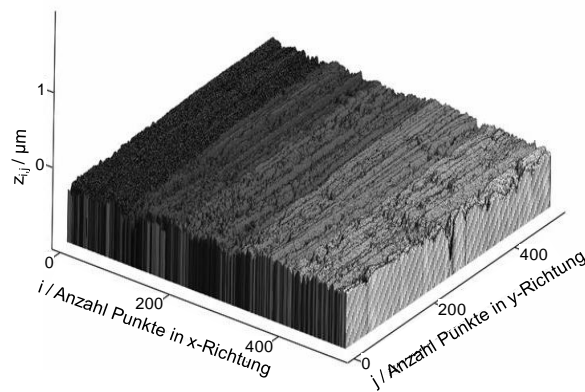
a.: Ursprüngliche gemessene Verteilung:



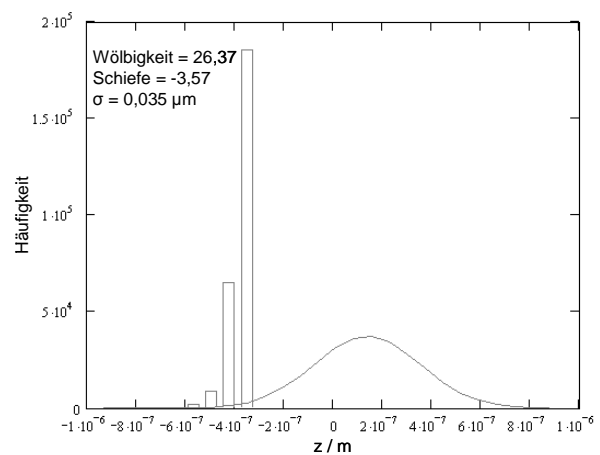
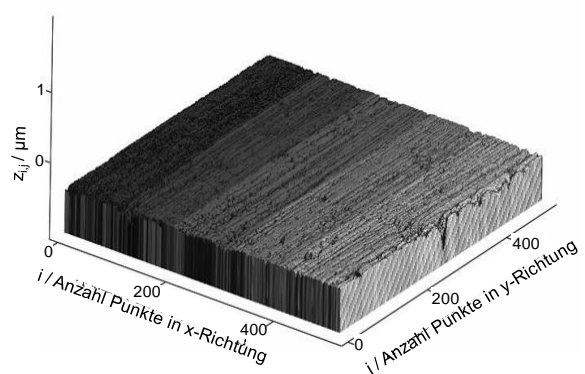
b.: $C_1 = 0.1$



c.: $C1 = 0.2$



d.: $C1 = 0.3$



e.: $C1 = 0.4$

Abbildung 7.29 a. – e.: Änderung der Oberflächentopographie durch simulierten abrasiven Verschleiß gem. Formel (6.38) mit $C2 = 1.0$. Links: 3D-Plot der Topographie 512 x 512 Pkt; Rechts Häufigkeitsverteilung (Balkendarstellung) im Vergleich zur ursprünglichen Glockenkurve.

Abbildung 7.30 zeigt die Änderung eines Linienprofils der Topographie aus Abbildung 7.29. Es ist deutlich zu erkennen, dass Minima der Profillinie am wenigsten verändert werden.

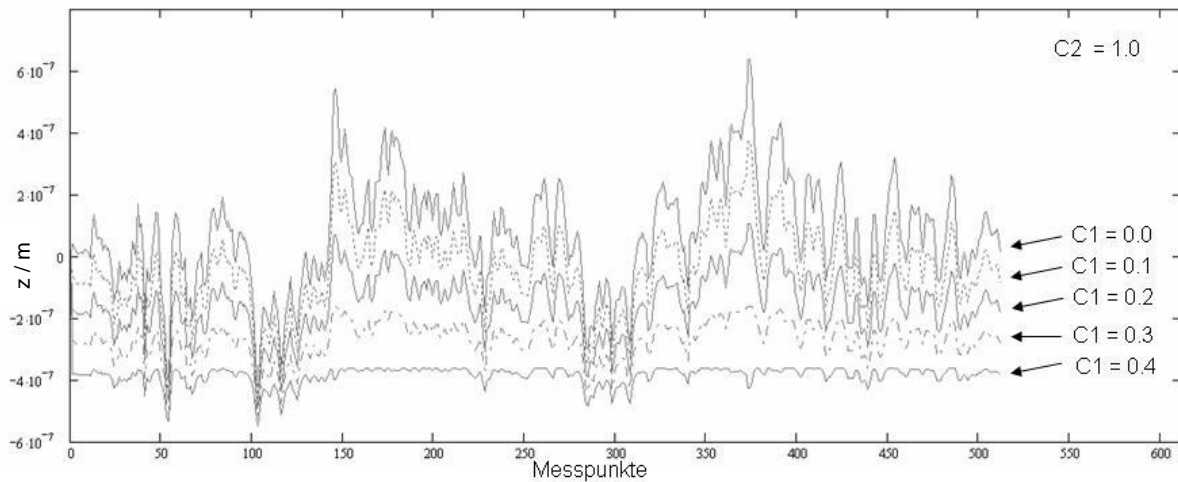


Abbildung 7.30: Linienprofil durch die Topographie aus Abbildung 7.29.

Eine Erhöhung des Exponenten $C2$ in Glg. (6.38) führt zu einem deutlich unterschiedlichen Transformationsverhalten der z -Werte-Verteilung. Wie in Tabelle 7.7 und Abbildung 7.31 ersichtlich, kommt es bei einem Multiplikationsfaktor von $C1 = 0,2$ um eine Erhöhung der Werte für Wölbigkeit und Schiefe um mehr als eine Größenordnung. Auffällig ist jedoch die errechnete Rauheit.

Tabelle 7.7: Änderung einer gegebenen Verteilung bei Transformation gemäß Glg. (6.38)

$C1$	$C2$	Wölbigkeit	Schiefe	Rauheit / μm
0,0	1,0	3,57	-0,038	0,21
0,1	1,0	3,58	-0,18	0,16
0,2	1,0	4,02	-0,57	0,11
0,3	1,0	6,74	-1,44	0,07
0,4	1,0	26,37	-3,57	0,03
0,2	3,0	206,48	-8,14	0,15

Die Oberfläche (Abbildung 7.31) erscheint vom optischen Eindruck her glatter als die transformierte Oberfläche aus Abbildung 7.29 d.. Die Rauheit ist jedoch mit $\sigma=0,15 \mu\text{m}$ deutlich größer als bei der Oberfläche aus Abbildung 7.29 d., die nur eine Rauheit von $\sigma=0,03 \mu\text{m}$ aufweist. Dieser Umstand lässt sich aus dem Vergleich der Linienprofile aus Abbildung 7.30 und Abbildung 7.32 erklären. Bei einer Wertetransformation mit einem Exponenten $C2=1$ erfolgt praktisch nur eine Abflachung der Oberfläche. Bei einem Exponenten von $C2=3$ hingegen kommt es neben der Abflachung der Topographie zu einem weiteren Effekt. Die ursprünglichen Minima der Oberfläche bleiben wie zuvor nahezu unverändert. Die Maxima der Oberflächentopographie werden, wie in Abbildung 7.32 sehr gut zu erkennen ist, in Minima etwa gleichen Betrags transformiert. Hierdurch ergibt sich der rechnerisch höhere Wert der Standardabweichung σ (Rauheit) der resultierenden z -Werte-Verteilung.

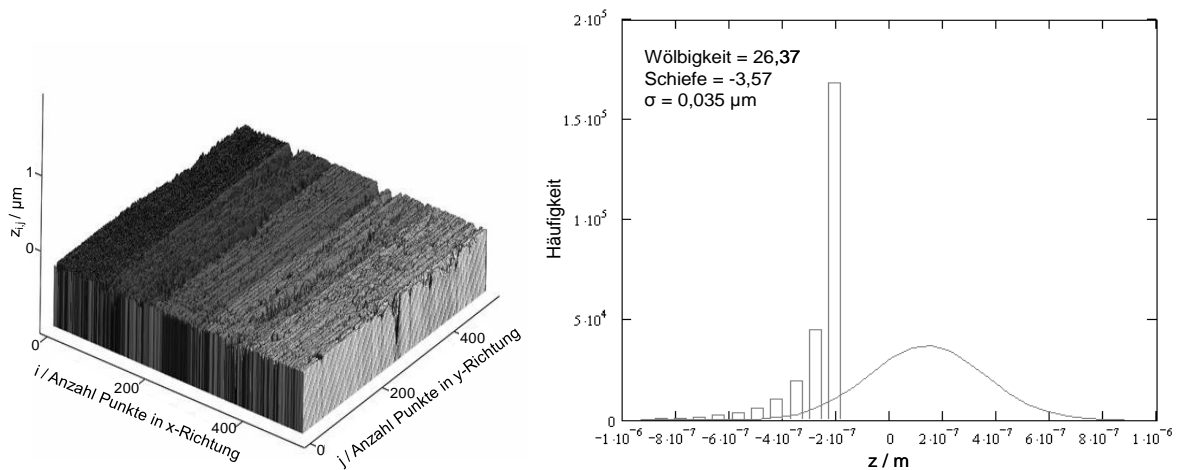


Abbildung 7.31: Änderung der Oberflächentopographie durch simulierten abrasiven Verschleiß gem. Formel (6.38) mit $C1 = 0.2$ und $C2 = 3.0$. Links: 3D-Plot der Topographie 512 x 512 Pkt; Rechts Häufigkeitsverteilung (Balkendarstellung) im Vergleich zur ursprünglichen Glockenkurve.

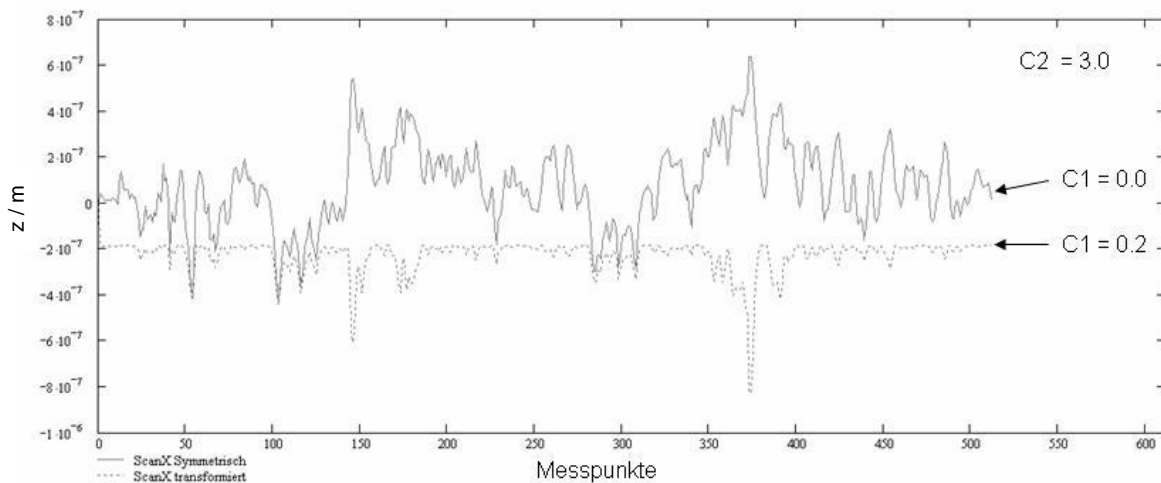


Abbildung 7.32: Scan durch die Topographie aus Abbildung 7.31.

Abschließend kann folgendes Fazit hinsichtlich der Simulationsalgorithmen rauer Oberflächen gezogen werden.

Fazit:

Die fraktalen Oberflächen gemäß Kapitel 6.1.2 zeigen zwar das in der Natur zu beobachtende selbst affine Verhalten bei steigender Auflösung. Da die Anzahl der Datenpunkte zu Beginn einer Simulationsrechnung vorgegeben wird, kommt dieser Umstand nicht zum Tragen. Weiterhin ist es mit den fraktalen Verfahren nicht möglich, gezielt Anisotropien zu erzeugen. Auch sind Änderungen der Oberflächeneigenschaften auf Grund unterschiedlicher Parameterwahl nicht in gleicher Weise vorhersagbar wie bei den anderen hier vorgestellten Verfahren.

Der hinsichtlich Rechengeschwindigkeit optimierte Simulationsalgorithmus analog zu Kapitel 6.1.4 erzeugt nur isotrope Oberflächen. Auch ist wie bei den fraktalen Modellen keine Vorgabe der Autokorrelationsfunktion möglich. Der Abfall der Autokorrelationsfunktion in x- und y-Richtung lässt sich nicht mit einem, bei realen Oberflächen messbaren, linearen bzw. exponentiellen Verlauf annähern.

Da die Simulation einer rauen Oberflächentopographie nur einen Bruchteil der Rechenzeit in Anspruch nimmt, die zur Simulation der mechanischen und elektrischen Eigenschaften eines Kontaktpunktes benötigt wird, ist der Geschwindigkeitsvorteil von keinem zusätzlichen Nutzen.

Die statistischen Verfahren (digitale Filter) analog zu Kapitel 6.2.1 erlauben die Simulation sowohl von isotropen als auch anisotropen Oberflächentopographien. Durch das Vorgeben der Rauheit, der Autokorrelationen in x- und y-Richtung und Form der Autokorrelationsfunktion ist es möglich, vier der sechs oben angegebenen Beschreibungsparameter einer technischen Oberfläche vorzugeben. In Verbindung mit einem nachträglichen Ändern der normalverteilten z-Werte-Verteilung, können die verbleibenden zwei Oberflächenkennwerte (Wölbigkeit und Schiefe) angeglichen werden. Das zusätzliche Addieren weiterer Topographien (siehe Abbildung 7.13) erlaubt eine sehr flexible Modellierung simulierter Oberflächen. Des Weiteren besteht mit diesem Verfahren noch die Möglichkeit, Strukturen unterschiedlicher Wellenlänge zu kombinieren.

Die Grenzen der hier vorgestellten Verfahren liegen darin, dass Anisotropien nur in einem kartesischen Koordinatensystem modelliert werden können. Rotationssymmetrische Strukturen, wie z.B. in Abbildung 7.20 dargestellt, können nicht modelliert werden.

7.2 Dehnungen und Spannungen beschichteter Kontaktkörper

Die Berechnung der Dehnungen und Spannungen verläuft generell nach dem in Abbildung 7.33 gezeigten Schema.

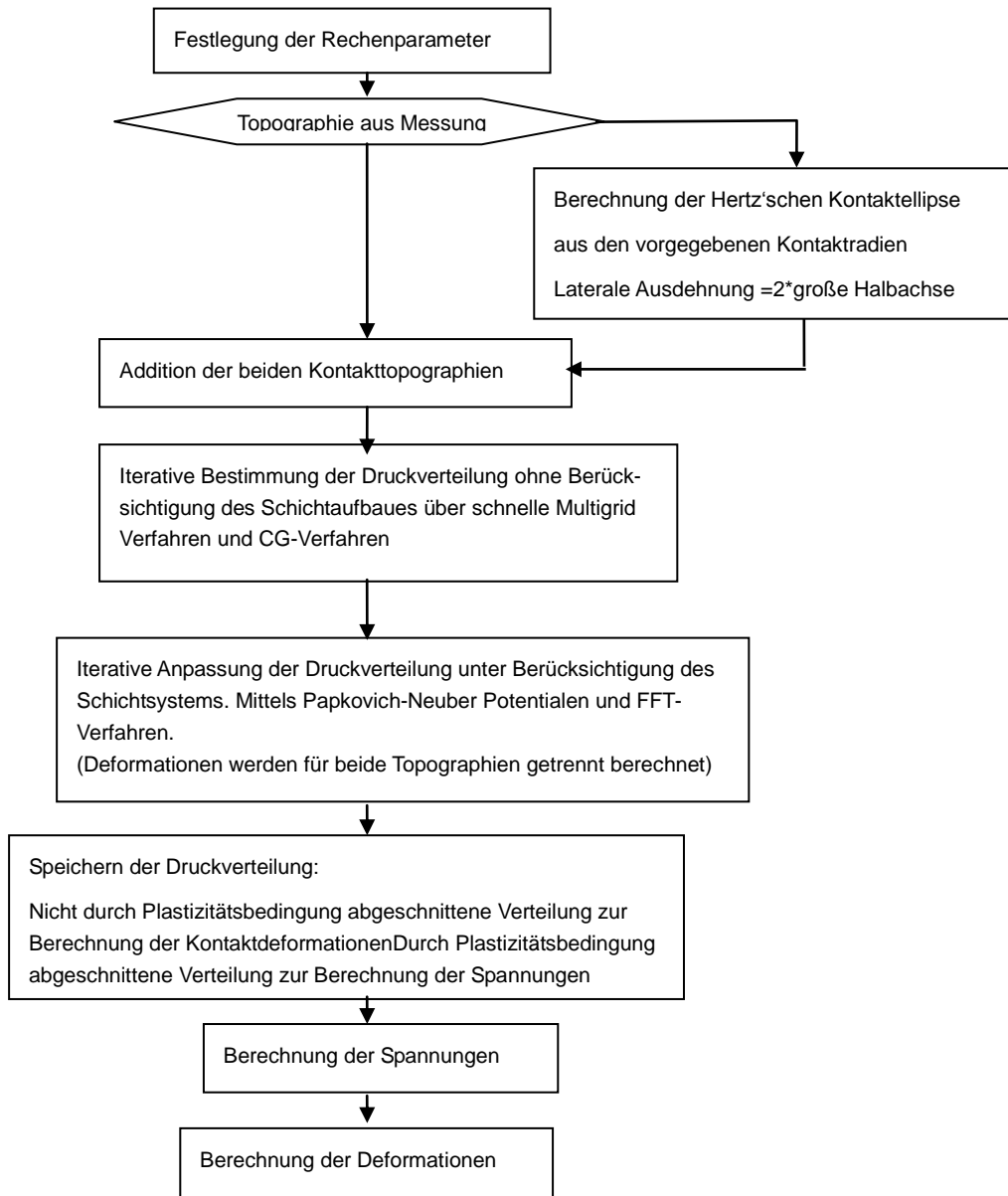


Abbildung 7.33: Vereinfachtes Flussdiagramm zur Berechnung der Kontaktspannungen und Deformationen.

Nach der Festlegung, ob ein Zwei- oder Dreifachsystem betrachtet wird, werden für jede Schicht die in Tabelle 7.8 aufgelisteten Parameter eingegeben.

Tabelle 7.8.: Parametrisierung einer Kontaktschicht

Parameter	Einheit
E Modul	GPa
Querkontraktionszahl	
Spezifischer Widerstand	$10^{-8}\Omega\text{m}$
Schichtdicke	μm

Für das Grundmaterial werden im Falle simulierter Oberflächen noch die jeweiligen Kontaktradien R_a und R_b vorgegeben. Die Scherkraft wird generell in x-Richtung vorgegeben (siehe auch Kapitel 6.2.7).

$$T = \mu F_N \quad (7.6)$$

Im Falle simulierter Oberflächen werden zuerst die Kennwerte des klassischen Hertz'schen Kontaktes gemäß Anhang 1 berechnet. Hierzu werden die mechanischen Kennwerte der Deckschicht und die oben aufgeführten Kontaktradien verwendet. Basierend auf der berechneten Hertz'schen Kontaktellipse (siehe Abbildung 7.34), wird die laterale Ausdehnung des zu erwartenden Kontaktbereichs bestimmt.

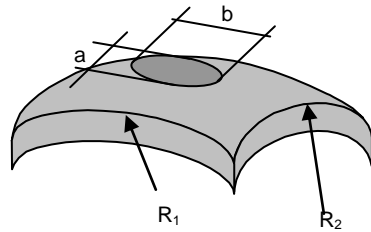


Abbildung 7.34: Schematische Darstellung der Hertz'schen Kontaktellipse

Es gilt:

$$L = 2 \max(a, b) \quad (7.7)$$

Hier sei angemerkt, dass bei Simulationsergebnissen mit unterschiedlichen Kontaktnormalkräften immer die gleichen Topographien betrachtet werden müssen. Daher sollte in einem ersten Simulationslauf mit einer Kontaktnormalkraft gerechnet werden, die etwa in der Mitte des betrachteten Bereichs liegt. Anschließend kann die dort ermittelte Flächenausdehnung L für die weiteren Simulationsläufe vorgegeben werden. Es ist zwar prinzipiell möglich, beliebige rechteckige Rechengitter zu verwenden solange Bedingung (6.158) erfüllt ist. Im Folgenden werden jedoch nur Rechengitter von quadratischer Form betrachtet.

$$N_x = N_y \quad (7.8)$$

$$\Delta_x = \Delta_y = \frac{2\chi L}{N_x} \quad (7.9)$$

Der Term χ entspricht dem in Abbildung 6.23 illustrierten Bereichserweiterungsfaktor. Die x- und y-Werte werden in Datenvektoren folgender Form gespeichert:

$$\begin{aligned} x_i &= -\chi L + \Delta_x i; & 0 \leq i \leq \chi N_x - 1 \\ y_j &= -\chi L + \Delta_y j; & 0 \leq j \leq \chi N_y - 1 \end{aligned} \quad (7.10)$$

Im Rahmen dieser Arbeit und in der daraus resultierenden Software gilt:

$$\chi = 2 \quad (7.11)$$

Hierdurch ergibt sich eine Fläche, deren Ausdehnung dem vierfachen des Hertz'schen Kontaktbereichs entspricht. Der Faktor 4 resultiert aus zwei Überlegungen.

1. Die Hertz'schen Kontaktellipse nimmt als homogene Fläche die Kontaktkräfte auf und basiert auf einem elastischen Belastungsfall. Auf Grund der inhomogenen a-Spot-Verteilung und der plastischen Deformationen ergibt sich dadurch ein scheinbarer Kontaktbereich mit einer größeren Ausdehnung als die Hertz'sche Kontaktellipse.
2. Um Aliasing-Effekte gering zu halten (siehe Kapitel 6.2.6) wird das Rechengebiet um den Faktor $\chi=2$ vergrößert.

Im Falle gemessener Oberflächen (Abbildung 7.35) gelten ähnliche Überlegungen. Bei der Auswahl des Rechenbereichs, sollte darauf geachtet werden, dass der einzuladende Flächenbereich (siehe auch Anhang 16 / Software) etwa dem Doppelten der zu erwartenden scheinbaren Kontaktfläche entspricht (siehe auch Abbildung 7.36). Die Frequenzvariablen errechnen sich in zyklischer Anordnung gem. Glg. (6.156). Hierbei ist jedoch für N_x der um χ erweiterte Bereich einzusetzen. Somit gilt für die Variablen im Frequenzraum folgende Indizierung:

$$\omega_{x_i} = \begin{cases} \frac{2\pi}{L} i; & \text{für } 0 \leq i \leq \chi N_x - 1 \\ \frac{2\pi}{L} (2\chi N_x - i - 1); & \text{für } \chi N_x \leq i \leq 2\chi N_x - 1 \end{cases} \quad (7.12)$$

$$\omega_{y_j} = \begin{cases} \frac{2\pi}{L} j; & \text{für } 0 \leq j \leq \chi N_y - 1 \\ \frac{2\pi}{L} (2\chi N_y - j - 1); & \text{für } \chi N_y \leq j \leq 2\chi N_y - 1 \end{cases} \quad (7.13)$$

$$\alpha_{i,j} = \sqrt{(\omega_{x_i})^2 + (\omega_{y_j})^2}; \quad \forall i, j \quad (7.14)$$

Als Startverteilung zur iterativen Berechnung der Druckverteilung an der Oberfläche wird eine elliptische Druckverteilung vorgegeben, die sich aus dem zuvor berechneten Hertz'schen Kontaktproblem ergibt.

$$P_{Start_{i,j}} = \begin{cases} P_{Hertz_{Max}} \sqrt{1 - \left(\frac{x_i}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_j}{b}\right)^2} & ; \quad \text{für } 0 \leq 1 - \left(\frac{x_i}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_j}{b}\right)^2 \quad \text{und } i, j < N_x \\ 0; & \text{für } N_x \leq i, j < \chi N_x \quad \text{"Zero Padding"} \end{cases} \quad (7.15)$$

Hier sei noch einmal herausgestellt, dass die obige Druckverteilung durch „Zero-Padding“ auf den Bereich χN_x erweitert wird.

In der nachfolgend dargestellten Abbildungsfolge (Abbildung 7.35 bis Abbildung 7.42) wird die Berechnungsabfolge illustriert. Auf die Darstellung der Achsen wird der besseren Lesbarkeit wegen verzichtet. Um die Druckverteilung im Kontaktbereich zu ermitteln, werden die beiden Kontaktopographien zunächst addiert (Abbildung 7.37 a.). Basierend auf der vorgegebenen Kontaktnormalkraft erfolgt anschließend die iterative Bestimmung der Druckverteilung mittels des CG-Verfahrens (Kapitel 6.2.4.3). Hierbei wird der Schichtaufbau noch nicht betrachtet. Zur Berechnung der Deformationen dient das geschwindigkeitsoptimierte MLMS-Verfahren (Kapitel 6.2.4.1). Die so ermittelte Druckverteilung dient dann als Startverteilung für einen weiteren Iterationsprozess. Anstelle des MLMS-

Verfahrens werden die Deformationen jedoch über den in Kapitel 6.2.7 beschriebenen Lösungsweg mittels Papkovich-Neuber-Potentiale berechnet. Die deformierte addierte Topographie zeigt die in Abbildung 7.37 b. zu erkennende Abplattung, die sich durch das scheinbare Anpressen an eine undeformierbare Referenzebene ergibt (siehe auch Abbildung 6.20). Da in dem zweiten Iterationszyklus die Deformationen für beide Kontaktpartner getrennt berechnet werden, kann die addierte Topographie durch Subtraktion in die deformierten Teilgeometrien von Kontaktfeder und -Stift zerlegt werden (Abbildung 7.38).

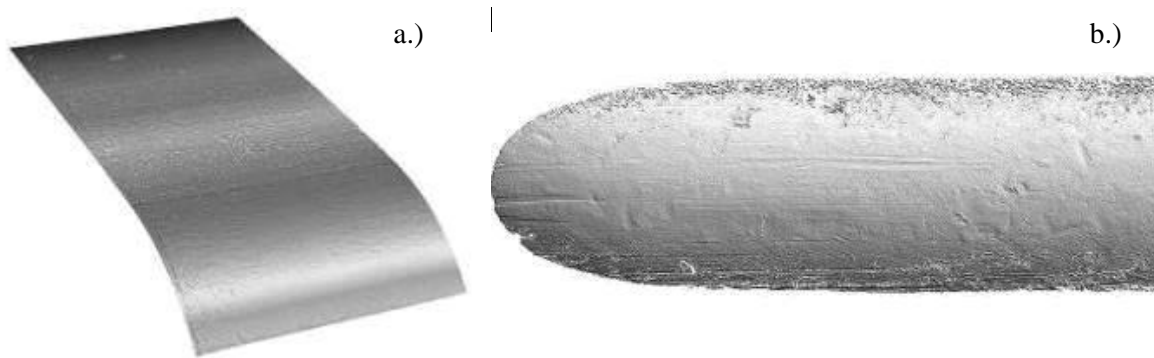


Abbildung 7.35: Gemessene Kontakttopographie a.) Kontaktfeder b.) Kontaktstift

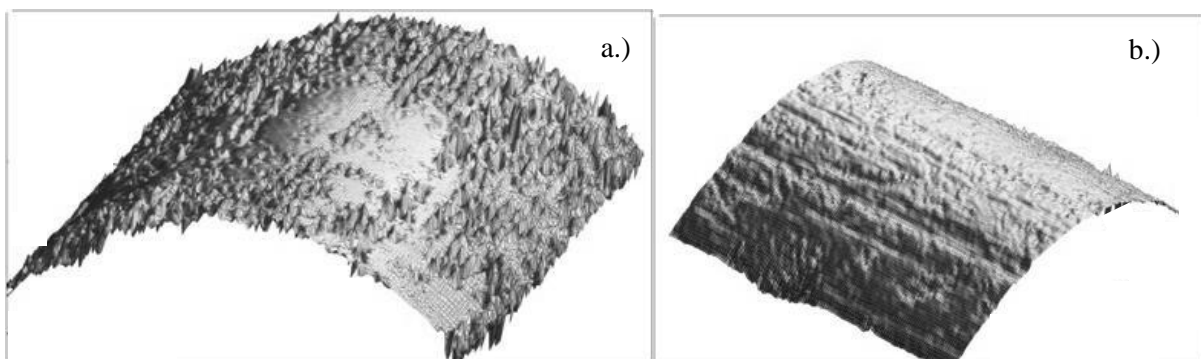


Abbildung 7.36: Rechenbereich a.) Kontaktfeder b.) Kontaktstift

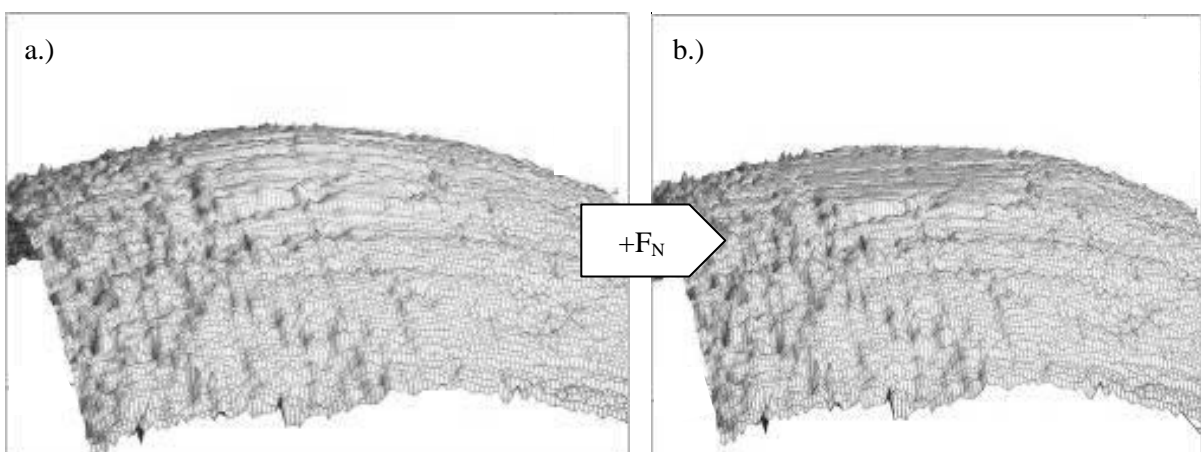


Abbildung 7.37: Additive Topographie a.) unbelastet b.) belastet

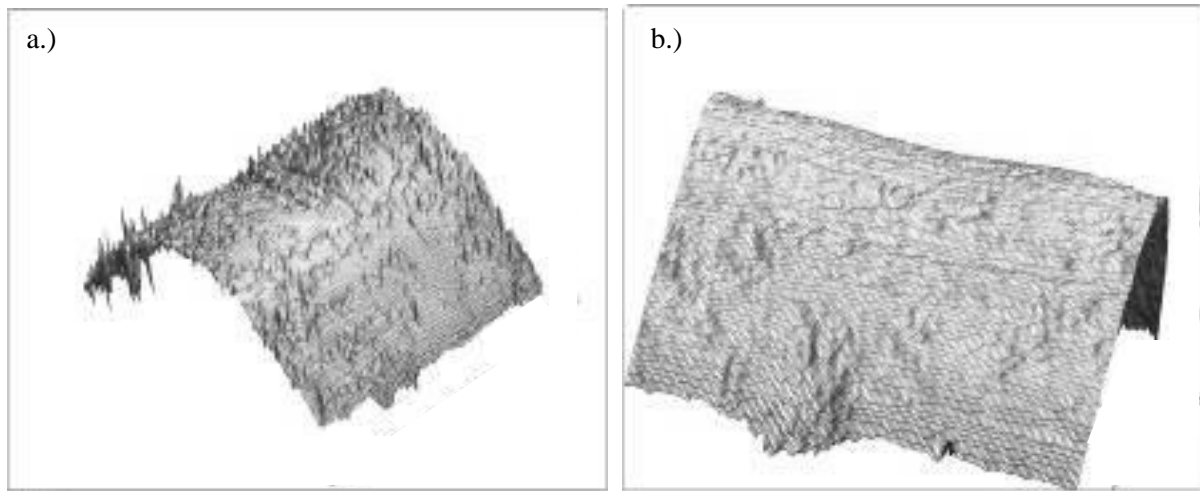


Abbildung 7.38: Belasteter Kontaktpunkt a.) Kontaktfeder b.) Kontaktstift

Die gesuchte a-Spot-Verteilung ergibt sich durch einfache Analyse der Druckverteilung an der Oberfläche ($z=0$). Abbildung 7.39 zeigt die resultierende a-Spot-Verteilung der in Abbildung 7.38 gezeigten Kontaktpaarung. Die laterale Verteilung der a-Spots ist wie aus dem Hertz'schen Modell zu erwarten annähernd ellipsenförmig. Die in Abbildung 7.36 erkennbare Riefenstruktur äußert sich in linienförmigen Kontaktbereichen. Während an den Rändern des Kontaktbereiches ausschließlich einzelne a-Spots auftreten, sind im zentralen Kontaktbereich auch ineinander übergehende a-Spots erkennbar. Eine virtuelle Kontaktierung der beiden deformierten Geometrie erfolgt durch zwei Schritte. Durch eine Vorzeichenumkehr der z -Werte eines Kontaktpartners erfolgt eine Spiegelung der Geometrie bzgl. der Referenzebene. Danach erfolgt eine Verschiebung der beiden Geometrien in z -Richtung in der Art, dass die Punkte mit der höchsten punktuellen Belastung den z -Wert 0 erhalten. Dieses Vorgehen ist für den zweidimensionalen Fall in Abbildung 7.40 dargestellt.

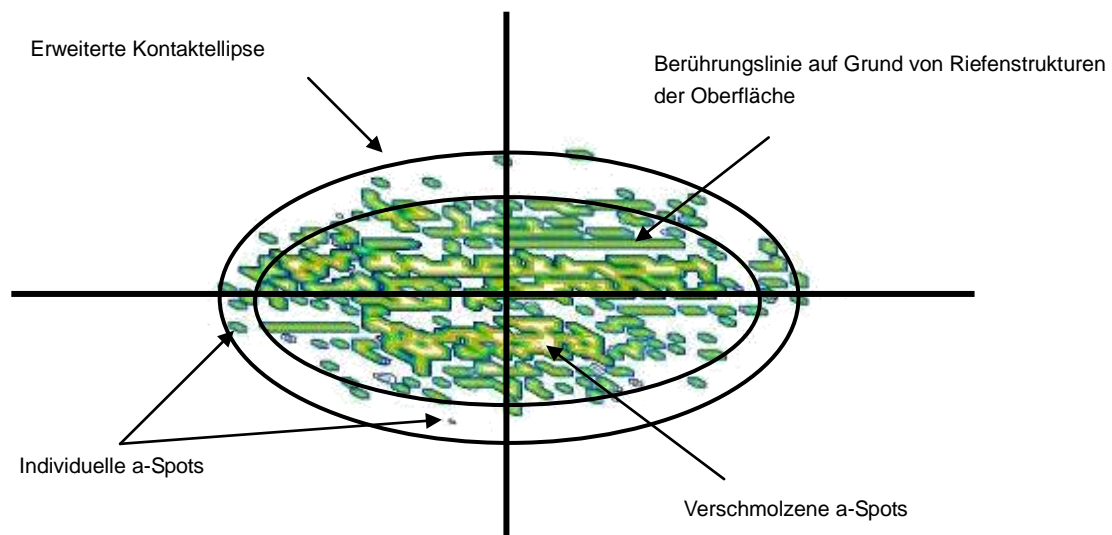


Abbildung 7.39: Verteilung der a-Spots der in Abbildung 7.38 gezeigten Kontaktpartner

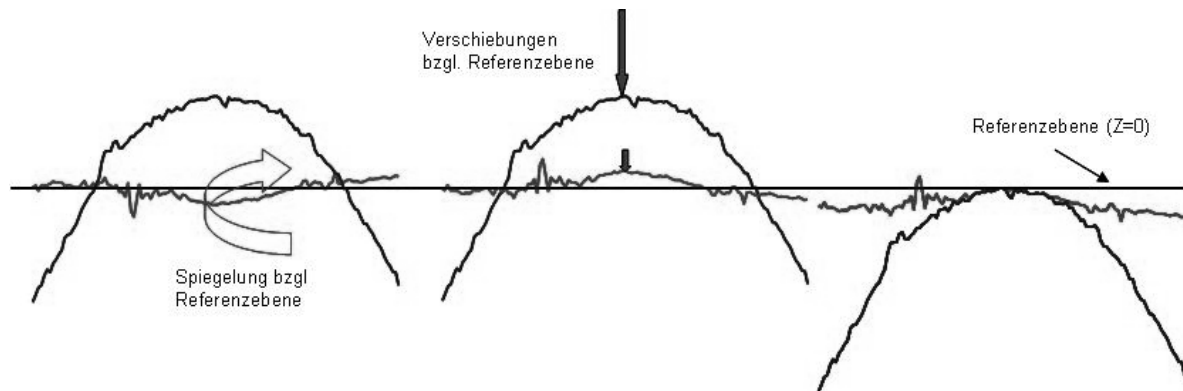


Abbildung 7.40: Erzeugung des Kontaktpunktes aus den deformierten Topographien (2D-Darstellung)

Abbildung 7.41 zeigt eine Reihe paralleler Linienprofile des oben besprochenen Kontaktes zweier rauer Oberflächen. Die Linienprofile wurden durch Auslesen der Datenmatrizen der deformierten Oberflächen innerhalb des in Abbildung 7.42 umrandeten Bereichs erzeugt. Es ist sehr gut zu erkennen, dass es zu keinen Durchdringungen der kontaktierenden Oberflächen kommt. Eine detaillierte Betrachtung der Deformationen, a-Spot-Anzahl und mechanischen Spannungen wird in Kapitel 8 gegeben. Um das plastische Verhalten der beiden Kontaktpartner zu erfassen, wird wie folgt vorgegangen. Zur Berechnung der Deformationen und Spannungen werden zwei unterschiedliche Druckverteilungen verwendet. Die Komponenten des Spannungstensors ergeben sich aus der abgeschnittenen Druckverteilung (Kapitel 6.2.4.2), deren Integral über die komplette Kontaktfläche die vorgegebene Normalkraft ergibt.

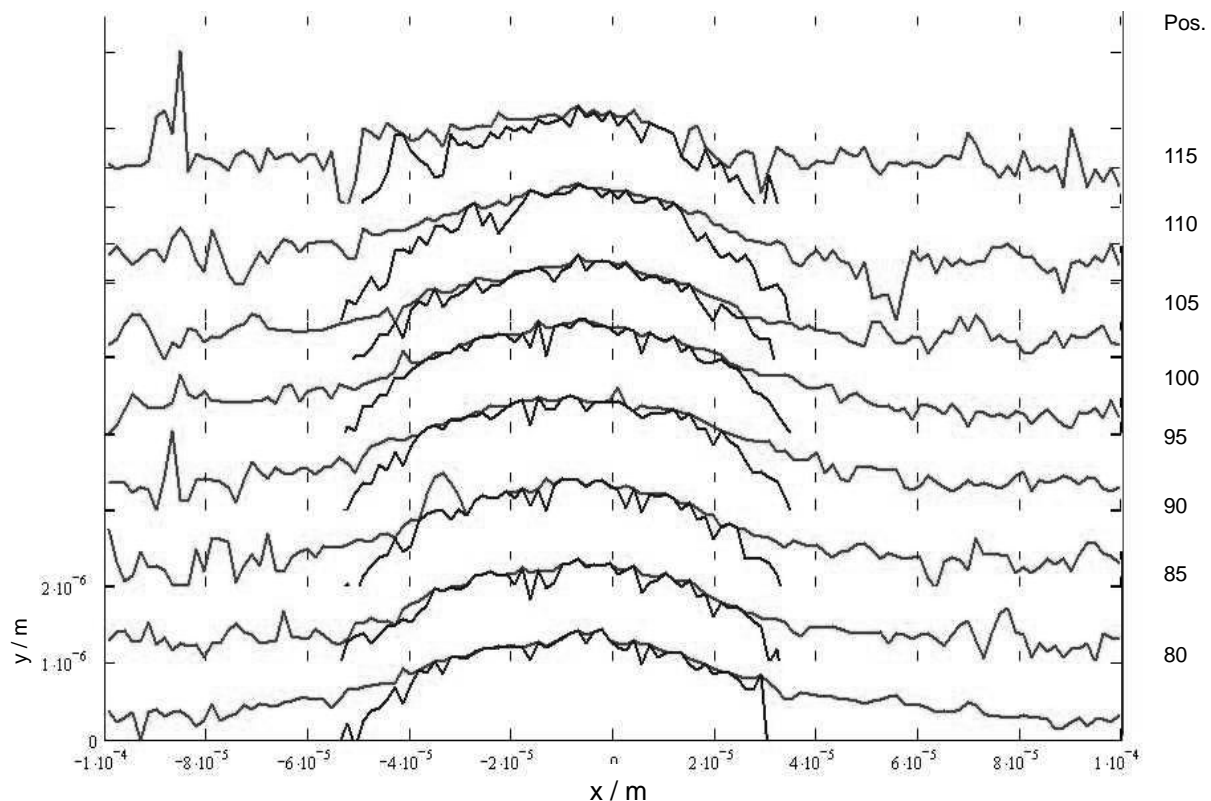


Abbildung 7.41: Linienprofile durch einen simulierten Kontaktpunkt zweier rauer Oberflächen. (die mit Pos. gekennzeichnete Achse entspricht dem Indexwert (Anzahl Messpunkte) aus Abbildung 7.42)

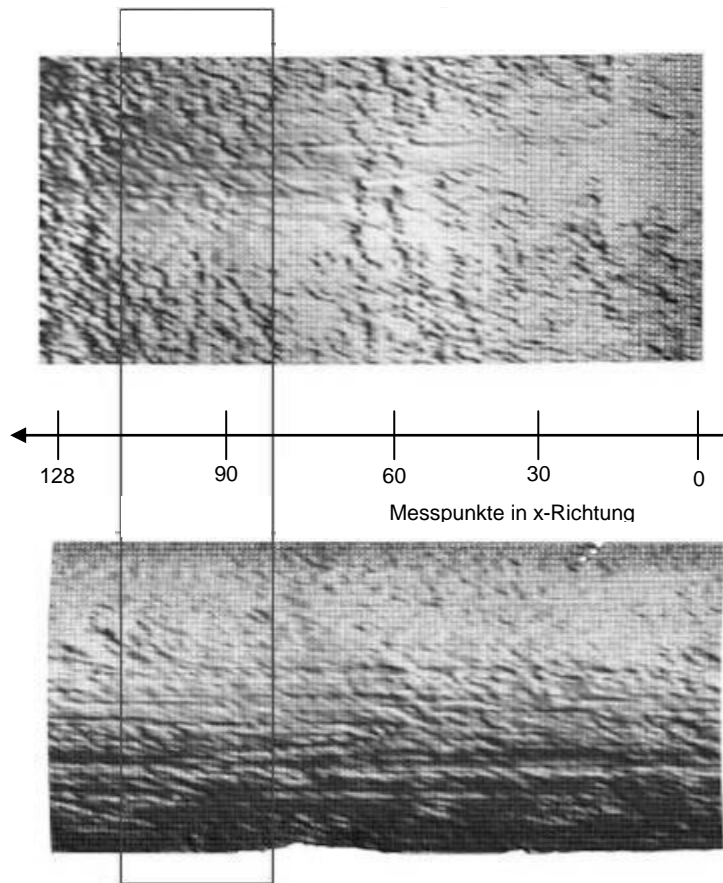


Abbildung 7.42: Scan-Fenster durch den Kontaktbereich zweier rauer Oberflächen. (Achsenbeschriftung entspricht Anzahl Bildpunkte; Auflösung 128 x 128)

Die Deformationen errechnen sich aus der Druckverteilung, die nicht durch eine in Kapitel 6.2.4.2 diskutierten Härtekurven beschränkt ist. Das jeweilige Härteverhalten der untersuchten Oberflächenmaterialien kann zu Beginn des Rechenlaufs ausgewählt werden. Standardmäßig wird mit dem in Abbildung 7.43 skizzierten elastisch / plastischen Härteverhalten gerechnet.

$$H^{eff}(p) = \begin{cases} p; & \text{wenn } p < Y_{eff} \\ \frac{Y_{eff} + p}{2}; & \text{wenn } Y_{eff} \leq p < 2Y_{eff} \\ Y_{eff} + \frac{p}{4}; & \text{wenn } p \geq 2Y_{eff} \end{cases} \quad (7.16)$$

Eingesetzt in Glg. (6.132) ergibt die zur Berechnung der Spannungskomponenten verwendete Druckverteilung. Y_{eff} ergibt sich analog Glg. (6.111) zu:

$$Y_{eff} = Yield_Faktor \cdot Y \quad (7.17)$$

Falls nicht gesondert erwähnt, wird einem Yield_Faktor = 3, gerechnet.

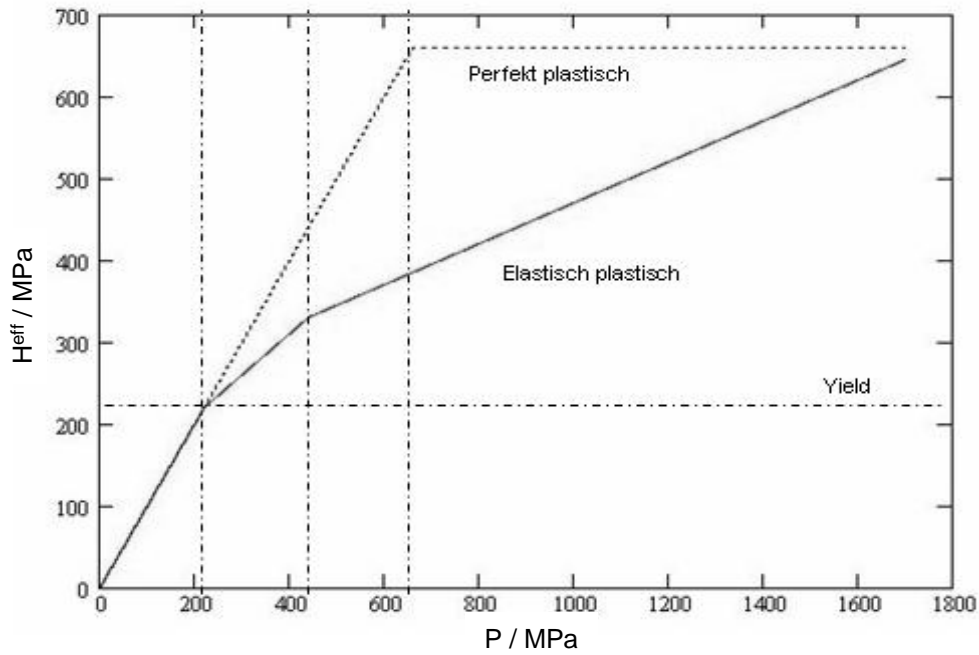


Abbildung 7.43: Annäherung des Härteverhaltens (Yield = 220 MPa; yieldFaktor = 1)

Abbildung 7.44 zeigt prinzipiell die verbleibende Deformation eines plastisch belasteten Kontaktpunktes. Die Größe des Auffederns ist durch die Differenz der beiden Druckbelastungen gegeben.

$$u_{i,j}^{rest} = u(p_{i,j}) - u(p_{i,j}^{plast}) \quad (7.18)$$

Hierbei steht $p_{i,j}$ für die unbeschränkte (elastische) Druckverteilung und $p_{i,j}^{plast}$ repräsentiert die gemäß der Härtekurve reduzierte Druckverteilung. Im rein elastischen Fall gilt:

$$p_{i,j} = p_{i,j}^{plast} \quad (7.19)$$

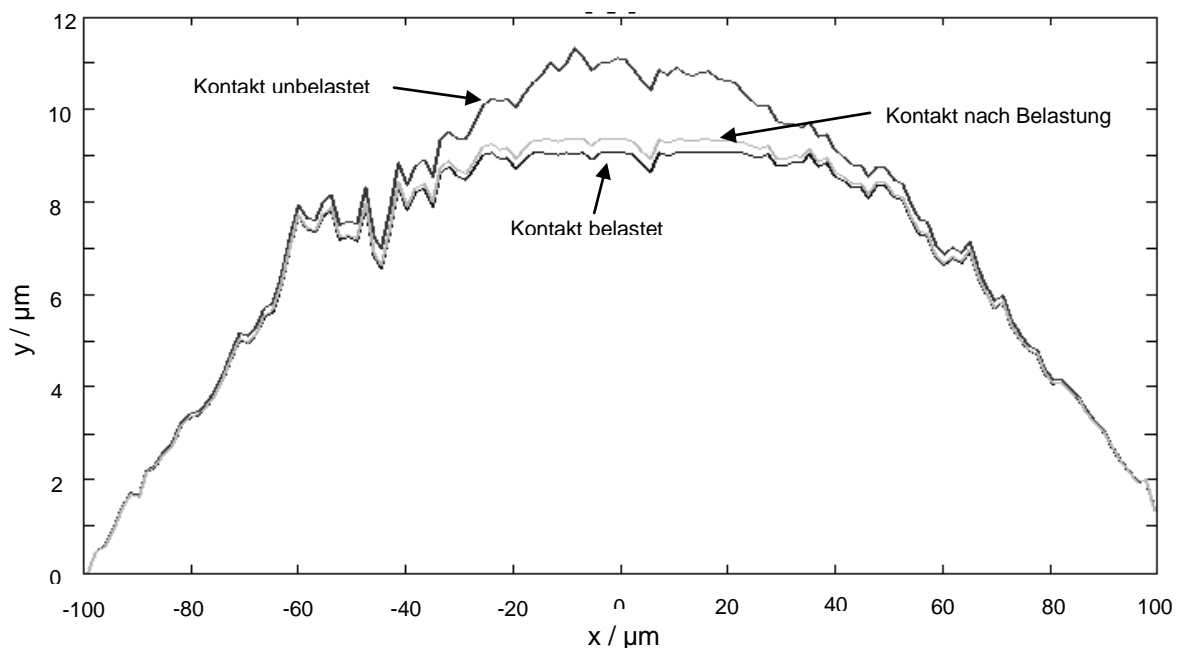


Abbildung 7.44: Auffedern einer plastisch belasteten Topographie.

Falls nicht explizit herausgestellt, dient als Abbruchkriterium bei der iterativen Bestimmung der Druckverteilung nach Glg. (6.135) $\varepsilon_0 = 0,001N$.

Für den Kontakt unbeschichteter, rauer und nicht konformer Oberflächen kann sowohl die direkte Matrixmultiplikation (Kapitel 6.2.2) als auch ein reiner MultiGrid-Algorithmus verwendet werden. Für den Fall beschichteter Körper findet das auf den Papkovich-Neuber-Potentialen basierende DC-FFT-Verfahren Anwendung.

7.2.1 Vergleich mit bestehenden Modellen und Test auf Plausibilität der Algorithmen

Um die Theorie bzw. die in die Software implementierten Algorithmen zu testen, wird wie folgt vorgegangen. Zuerst erfolgt der Vergleich zur klassischen Hertz'schen Theorie. Durchgerechnet wird der Spezialfall zweier kugelförmiger Kontakte, deren Aufbau aus jeweils drei gleichen homogenen Schichten besteht. Des Weiteren soll nur der rein elastische Fall betrachtet werden. Eine Oberflächen-topographie wird ebenfalls nicht berücksichtigt. Zur Rechnung werden die in Tabelle 7.9 gezeigten Parameter verwendet. Neben der klassischen Hertz'schen Theorie erfolgt die Simulation gemäß der CG-Methode (Kapitel 6.2.4.3). Die Berechnung der Kontaktdeformation wird wahlweise über die direkte Matrixmultiplikation (Kapitel 6.2.3), über das MultiGrid-Verfahren (Kapitel 6.2.4) und das in Kapitel 6.2.7 beschriebene Verfahren gem. Glg. (6.191) durchgeführt. Letzteres wird in Anlehnung an die Literatur [87] im Folgenden als DC-FFT-Verfahren abgekürzt.

Tabelle 7.9: Rechenparameter Hertz Kontakt; Kontakt 1 und 2 gleich

Bezeichnung	Wert	Einheit
Material	Zinn	
E Modul	47	GPa
Bruchspannung	100	MPa
Querkontraktion	0,32	
Dicke Deckschicht	2	μm
Dicke Zwischenschicht	1	μm
Tiefe Grundmaterial	3	μm
Kontakttradius symmetrisch	0,5	mm
Kontaktnormalkraft	0,01 – 4	N
Reibkoeffizient μ	0	
N_x/N_y	16	

Tabelle 7.10 zeigt die errechnete Kompression eines Kontaktes als Funktion der Kontaktnormalkraft und der Rechenmethode. Als Kontaktmaterial wurde Zinn gewählt, da auf Grund des geringen E-Moduls, im Vergleich zu den weiteren Kontaktmaterialien die höchste Kompression und höchste Abhängigkeit von der Kontaktnormalkraft zu erwarten ist. Während das mit der direkten Matrixmultiplikation erzielten Ergebnis im Mittel etwa 1,1% unter den Werten der Hertz'schen Theorie liegt, ergibt das MultiGrid-Verfahren tendenziell Werte, die etwa 1,3% höher ausfallen. Das DC-FFT-Verfahren

ergibt mit einer mittleren Abweichung von etwa 0,37% die beste Übereinstimmung. Abbildung 7.45 zeigt den doppeltlogarithmischen Plot der errechneten Kompression als Funktion der Kontaktnormalkraft. Um die hier verwendeten Algorithmen für den Fall rauer Oberfläche zu testen wurde ein Zweischichtmodell mit einer simulierten rauen Oberfläche verwendet. Die Simulation der Oberflächen erfolgt gemäß Kapitel 6.1.3 nach der Methode von Hu und Tonder [47]. Hierbei werden die in Tabelle 7.11 aufgeführten Parameter verwendet. Die grau hervorgehobenen Felder zeigen die unterschiedlich gewählten Kontaktparameter.

Tabelle 7.10: Hertz Kontakt: Vergleich der errechneten Kompression

F_N / N	Hertz	Matrixmultiplikation		Multi Grid		DC FFT	
	$u_z / \mu m$	$u_z / \mu m$	Δ in %	$u_z / \mu m$	Δ in %	$u_z [\mu m]$	Δ in %
0,01	0,0345	0,0341	-1,16	0,035	1,45	0,0344	-0,29
0,05	0,1009	0,0997	-1,19	0,1022	1,29	0,1005	-0,40
0,1	0,1601	0,1583	-1,12	0,1623	1,37	0,1595	-0,37
0,25	0,2949	0,2916	-1,12	0,2989	1,36	0,2938	-0,37
0,5	0,4681	0,463	-1,09	0,4745	1,37	0,4663	-0,38
0,75	0,6134	0,6067	-1,09	0,6218	1,37	0,6111	-0,37
1	0,7431	0,7349	-1,10	0,7533	1,37	0,7403	-0,38
1,25	0,8623	0,8528	-1,10	0,8741	1,37	0,8591	-0,37
1,5	0,9737	0,9631	-1,09	0,9871	1,38	0,9701	-0,37
2	1,1796	1,1667	-1,09	1,1958	1,37	1,1752	-0,37
3	1,5457	1,5289	-1,09	1,567	1,38	1,5401	-0,36
4	1,8725	1,8522	-1,08	1,8984	1,38	1,8658	-0,36

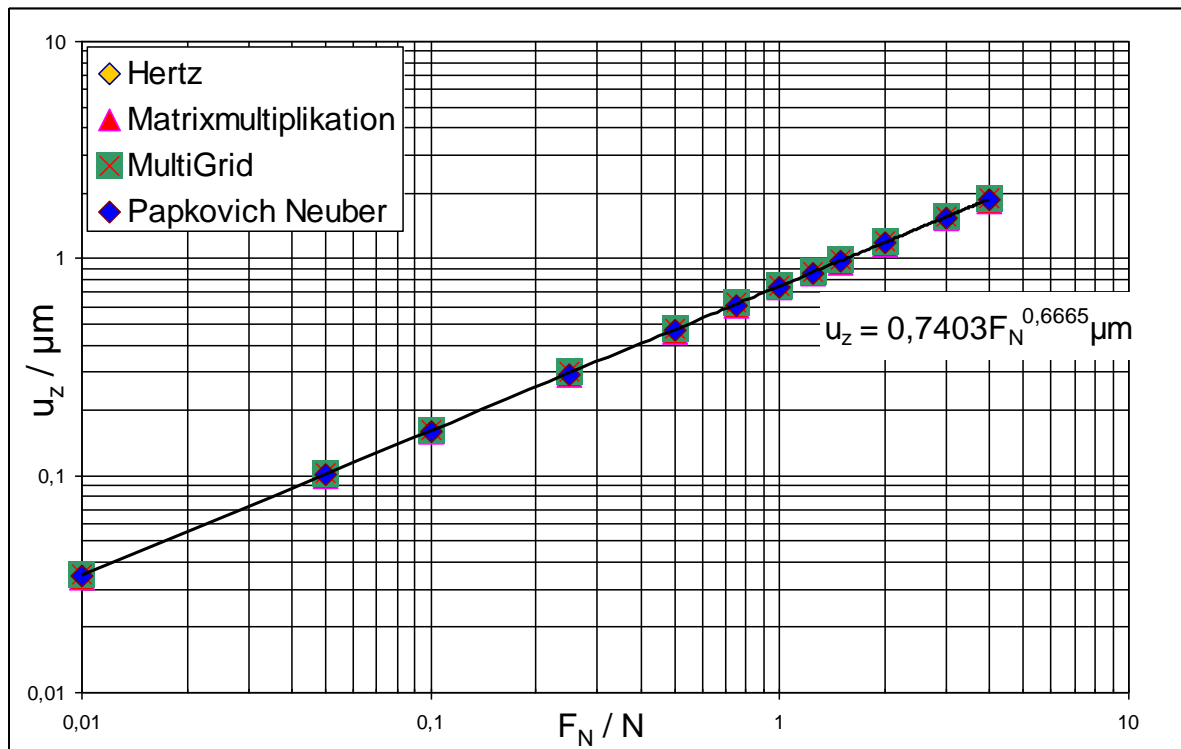


Abbildung 7.45: Vergleich der berechneten Kompression eines Hertz'schen Kontaktes gem. Tabelle 7.9

Tabelle 7.11: Rechenparameter → Test rauer Oberflächen.

	Kontakt 1	Kontakt 2	Einheit
Material	Au	Au	
E-Module	78	78	GPa
Bruchspannung	200	200	MPa
YieldFaktor	3	3	
Querkontraktion	0,32	0,32	
Dicke Deckschicht	2	2	μm
Dicke Zwischenschicht	-	-	
Dicke Grundmaterial	6	6	μm
Radius Symmetrisch	0,2	0,5	mm
Simulationsmethode Topo.	statistisch	statistisch	
Autokorrelationsform	linear	linear	
ACF X	5	5	Punkte
ACF Y	20	20	Punkte
Seed	1	2	
σ	0,2	0,2	μm
Seed Faktor	1	2	
F_N	1		N
μ	0		
N_x/N_y	128		

Abbildung 7.46 zeigt eine 3D-Darstellung der beiden Kontaktoberflächen. Das Härteverhalten der Kontaktmaterialien wird gemäß (7.16) angenähert. Als Kontaktbelastung wird eine reine Normalkraft der Größe 1 N vorgegeben. Die Druckerteilung wird mittels der CG-Methode iterativ ermittelt. Die Deformationen werden wieder wahlweise durch die bereits zuvor verwendeten Verfahren durchgeführt. Bei dem DC-FFT-Verfahren werden zur Berechnung der Kontaktdeformationen die Koeffizienten in Glg. (6.191), wahlweise durch das in Kapitel 6.2.7 beschriebene numerisch Verfahren bzw. analytisch nach Liu [87], bestimmt. Beide Vorgehensweisen führen zu einem identischen Ergebnis und werden deshalb in Tabelle 7.12 nicht getrennt aufgelistet.

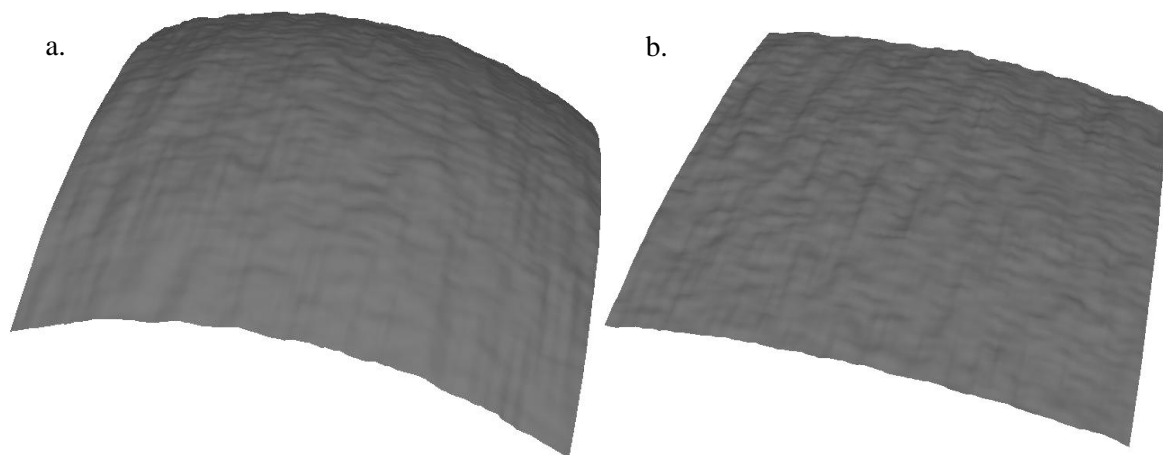


Abbildung 7.46: Simulierte Oberflächen gem. Tabelle 7.11; a. Kontakt 1 und b. Kontakt 2

Betrachtet man die in Tabelle 7.12 aufgeführten charakteristischen Kontaktparameter, so ist auffällig, dass sich gegenüber dem Hertz'schen Kontaktproblem eine deutlich größere Kontaktfläche ausbildet. Dies begründet sich aus dem Umstand, dass bei der Simulation das elastisch/plastische Verhalten mit Glg. (7.16) angenähert wird. Die simulierten maximalen punktuellen Druckbelastungen liegen auf Grund der Oberflächenrauheit deutlich über den von der Hertz-Theorie vorhergesagten Werten. Durch die plastische Deformation der Oberflächenerhebungen ergibt sich auch eine mehr als doppelt so große maximale „scheinbare“ Kompression der Kontaktpartner. Betrachtet man das Verhältnis der Anzahl an Kontaktpunkten, deren Druckbelastung zu einer plastischen Deformation führt, zu den elastisch beanspruchten Berührungspunkten, so ergibt sich unabhängig von der Simulationsmethode, ein Prozentsatz von etwa 95%. Wie im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch gezeigt wird, ist dieser Prozentsatz unabhängig von der untersuchten Oberfläche und der Normalkraft immer größer 90%.

Tabelle 7.12: Vergleich berechneter charakteristischer Kontaktparameter in Abhängigkeit von der Berechnungsmethode. Prozentuale Werte sind bzgl. der direkten Matrixmultiplikation angegeben.

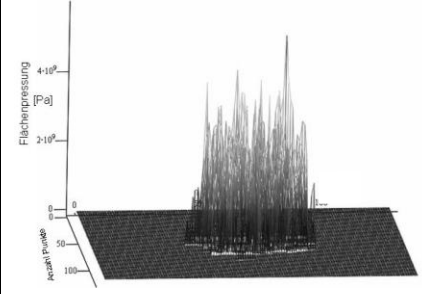
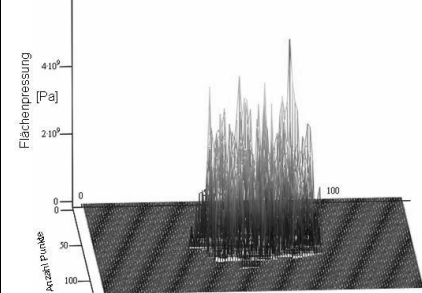
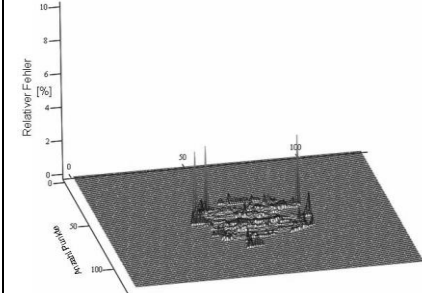
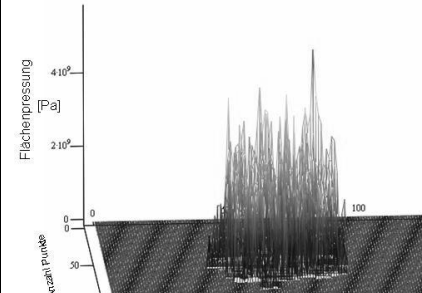
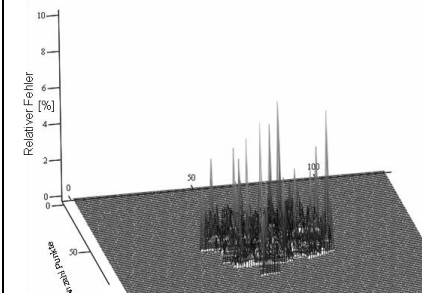
Merkmal	Hertz	Matrixmultiplikation	Multi Grid		DC FFT (n/a)		Einheit
				Rel. Abw.		Rel. Abw.	
Anzahl a-Spots	-	821	823	0,24%	863	5,11%	
Kontaktfläche	573	585	588	0,24%	615	5,11%	μm^2
Max. Punktbelast.	2615	5878	5897	0,34%	5891	-3,15%	MPa
Mittl. Punktbelast.	-	1709	1703	-0,38%	1625	-4,94%	MPa
Ratio elast/plast	-	0,95	0,95	0,00%	0,95	0,00%	
Max. Deform. K1	0,63	1,22	1,224	0,32%	1,194	-2,13%	μm

Ein Vergleich zwischen den unterschiedlichen Simulationsmethoden zeigt, dass die direkte Matrixmultiplikation und das MultiGrid-Verfahren nahezu identische Ergebnisse erzielen. Das DC-FFT-Verfahren zeigt mit ~5% die größten Abweichungen bei der Anzahl der Berührungspunkte und dadurch auch bei der resultierenden Kontaktfläche, die sich als Summe über alle individuellen a-Spots ergibt. Die individuelle a-Spot Fläche errechnet sich wie folgt.

$$A_{a\text{-Spot}} = \Delta_x \Delta_y \quad (7.20)$$

Ein ähnlicher Unterschied von ~5% ergibt sich auch bei der mittleren Kontaktbelastung. Die maximale Deformation zeigt bei dem DC-FFT-Verfahren einen um etwa 2% geringeren Wert gegenüber der direkten Matrixmultiplikation bzw. dem MultiGrid-Verfahren. Tabelle 7.13 und Tabelle 7.14 zeigen eine graphische Gegenüberstellung der Flächenpressungsverteilung bzw. Kontaktdeformation in z-Richtung.

Tabelle 7.13: Vergleich der Druckverteilung auf der Kontaktoberfläche (x/y-Auflösung 128 x 128 Pkt.; Maximalwerte z-Achse siehe Tabelle 7.12)

	Flächenpressung / Pa	Absolutwert relative Abweichung in %
Direkte Matrixmultiplikation		
MultiGrid-Verfahren		
DC-FFT-Verfahren		

Im Falle der Flächenpressung zeigt der Vergleich zwischen der direkten Matrixmultiplikation und dem MultiGrid-Verfahren nur punktuelle Abweichungen von maximal 4% hauptsächlich an den Rändern des Kontaktbereiches. Das DC-FFT-Verfahren zeigt im Vergleich zur Gesamtzahl an Berührungspunkten ebenfalls nur in einigen wenigen Punkten eine größer Abweichung von maximal 10%. Mehr als 92% der Werte zeigen eine Abweichung gegenüber der direkten Matrixmultiplikation von weniger als 2%. Ein ähnliches Bild ergeben die in Tabelle 7.14 gezeigten Verteilungen der punktuellen Deformationen in z-Richtung. Die durch das MultiGrid-Verfahren berechnete Deformationsverteilung zeigt, wie zu erwarten, nur marginale Unterschiede im Bereich von kleiner $\pm 0,5\%$. In einem vergleichbar geringen Bereich liegen die relativen Abweichungen im Falle des DC-FFT-Verfahrens. Auffällig ist jedoch die homogene Abweichung außerhalb des Kontaktbereiches. Diese Abweichung kann durch den in Kapitel 6.2.6 beschriebenen „Aliasing-Effekt“ erklärt werden. Abschließend wird an dieser Stelle für den Fall eines Zweischichtsystems die numerische und analytische Lösung des linearen Gleichungssystems (6.185) bis (6.193) verglichen. Tabelle 7.15 zeigt die hierzu verwendeten Rechenparameter. Die Gegenüberstellung der charakteristischen Kennwerte zeigt, dass bis auf die Kontaktkompression alle Kennwerte weniger als 1% von einander abweichen. Die maximale Kontaktdeformation zeigt mit $\sim 5\%$ eine relative große Abweichung. Es sei jedoch bemerkt, dass es sich hierbei um die Deformation eines Oberflächenpeaks handelt und nicht um die Kompression des ge-

samen Kontaktkörper. Aus der Abbildung 7.47 ist jedoch sehr gut zu erkennen, dass sowohl die numerische als auch die analytische Lösung übereinstimmende Deformationsverteilungen ergeben.

Tabelle 7.14: Vergleich der Kontaktdeformation (x/y-Auflösung 128 x 128 Pkt.; Maximalwerte z-Achse siehe Tabelle 7.12)

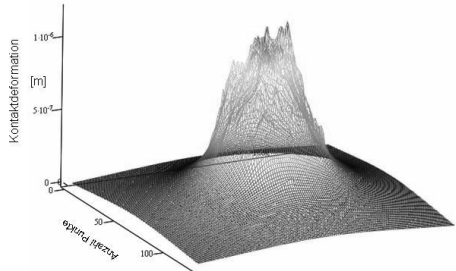
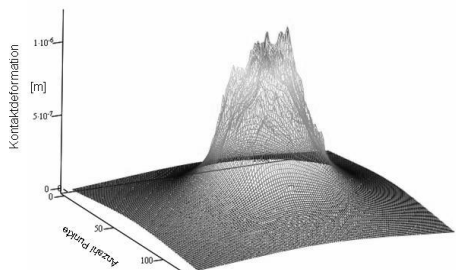
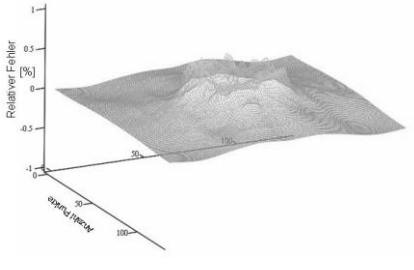
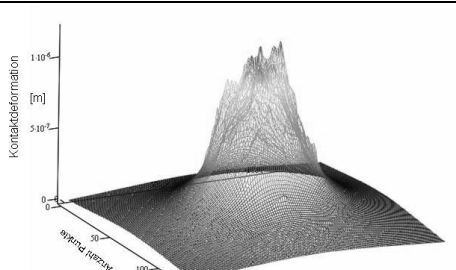
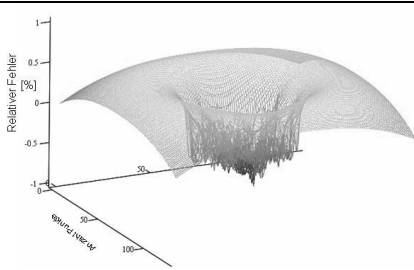
	Kontaktdeformation / m	Relativer Abweichung in %
Direkte Matrixmultiplikation		
MultiGrid-Verfahren		
DC-FFT-Verfahren		

Tabelle 7.15: Rechenparameter → Test numerisch/analytisch eines Zweischichtsystems

	Kontakt 1		Kontakt 2		
	Deckschicht	Grundmat.	Deckschicht	Grundmat.	Einheit
Material	Au	Cu	Au	Cu	
E-Module	81	118	78	118	GPa
Bruchspannung	200	250	200	200	MPa
YieldFaktor	3	3	3	3	
Querkontraktion	0,32	0,32	0,32	0,32	
Schichtdicke	2	6	2	6	µm
Radius Symmetrisch	0,2		0,5		mm
Simulationsmethode	geschwindigkeitsoptimiert		geschwindigkeitsoptimiert		
Glättfaktor	0,2		0,2		Punkte
Seed	1		2		Punkte
σ	0,2		0,2		µm
Seed Faktor	1		2		
F _N	1				N
µ	0				
N _x /N _y	128				

Tabelle 7.16: Vergleich zwischen numerischer und analytischer Lösung der Papkovitch-Neuber-Koeffizienten

Merkmal	numerisch	analytisch	Rel. Abweichung
Anzahl a-Spots	740	734	-0,8%
Kontaktfläche	400	397	-0,75%
Max. Punktbelast.	8017	8009	-0,09%
Mittl. Punktbelast.	2497	2515	0,72%
Ratio elast/plast	0,95	0,95	0,00%
Max. Deform. K1	1,36	1,29	-5,1%

Abbildung 7.48 zeigt graphisch die Verteilung der Druckverteilung an der Oberfläche. Außer im oberen Randbereich von Abbildung 7.48 a. und b. ergibt sich die gleiche Verteilung an Berührungspunkten. Hierbei wird davon ausgegangen, dass die Bereiche mit Druckwerten ungleich Null aktuelle Berührungspunkte darstellen.

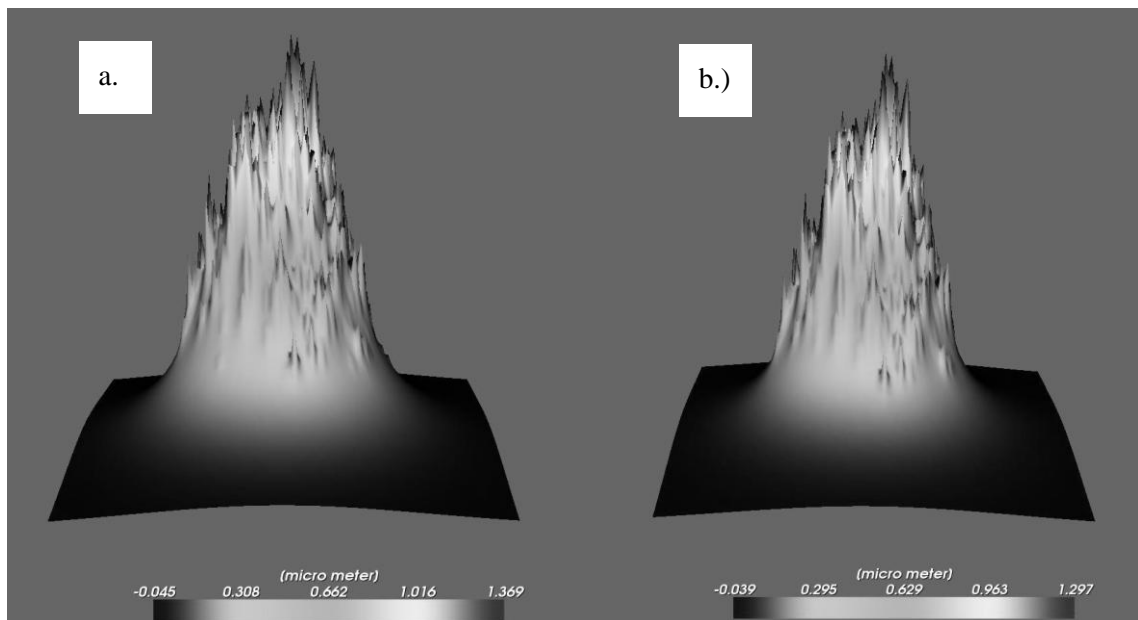


Abbildung 7.47: Vergleich der Deformation in z-Richtung; a.: numerisch; b.: analytisch

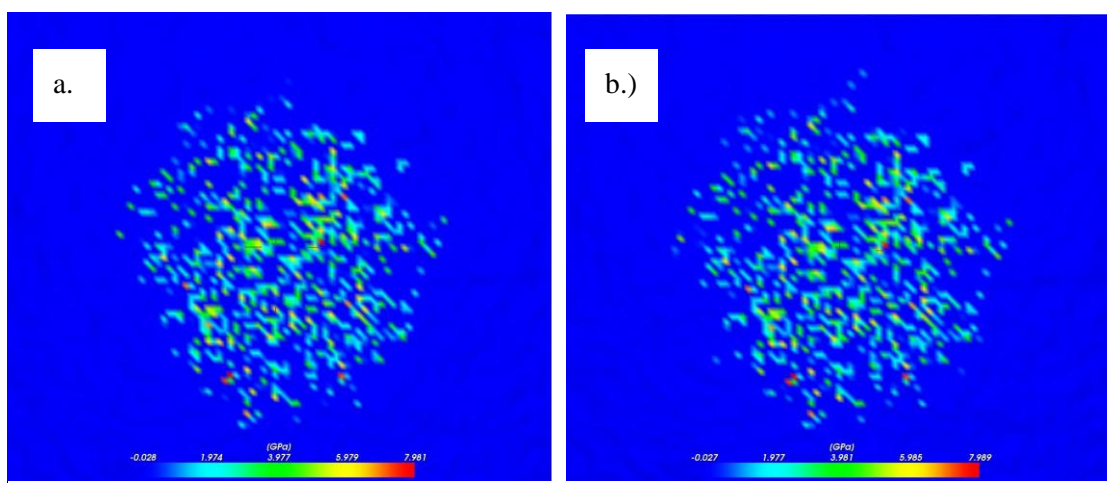


Abbildung 7.48: Vergleich der errechneten a-Spot-Verteilung gemäß a. numerischer und b. analytisch berechneter Papkovitch-Neuber-Koeffizienten. (Gezeigt ist die Druckverteilung an der Oberfläche)

Ein weiterer Test, ob das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren plausible Ergebnisse erzielt, wird durch Tabelle 7.18 gegeben. Betrachtet wird der Kontakt zweier identischer homogener kugelförmiger Kontakte. Die Parametrisierung der Rechnung erfolgt gemäß Tabelle 7.17. Als Härtekennlinie wird Glg. (7.16) verwendet.

Tabelle 7.17: Kennwerte eines simulierten Hertz'schen Kontaktes

	Kontakt 1	Kontakt 2
Kontaktradius	$r_{11} = r_{12} = 1 \text{ mm}$	$r_{21} = r_{22} = 1 \text{ mm}$
Dicke Deckschicht	$2 \text{ }\mu\text{m}$	$2 \text{ }\mu\text{m}$
Dicke Zwischenschicht	$2 \text{ }\mu\text{m}$	$2 \text{ }\mu\text{m}$
Dicke Grundmaterial	$2 \text{ }\mu\text{m}$	$1 \text{ }\mu\text{m}$
E-Modul	78 GPa	
Bruchspannung	200 MPa	
Querkontraktion	0,32	
Härtekennlinie	Perfekt plastisch	
Yield_Faktor	2,8	
Rechenverfahren Deformation	DC-FFT numerisch	
Kontaktnormalkraft	1 N	
N_x/N_y	64	
N_z	128	

Der in Tabelle 7.18 angegebenen von-Mises-Stress errechnet sich analog zu Glg. (7.21) gemäß:

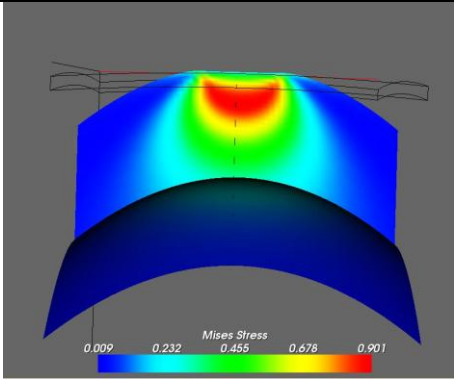
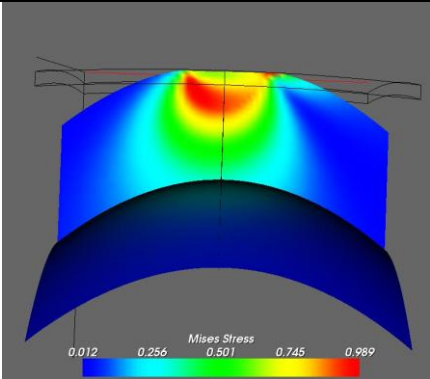
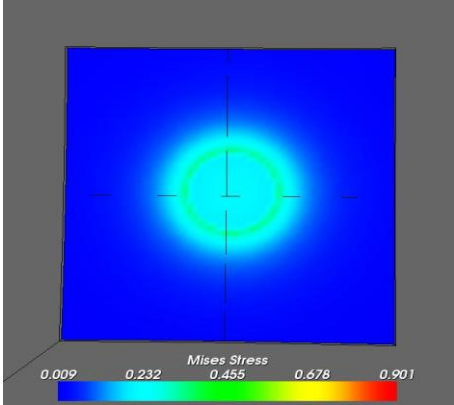
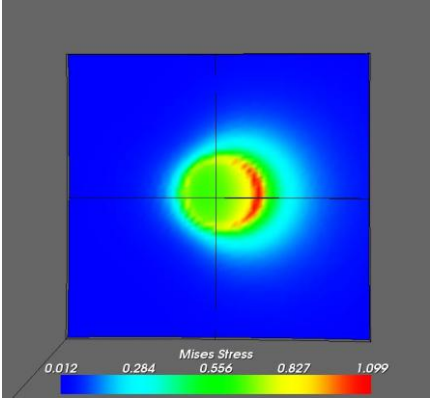
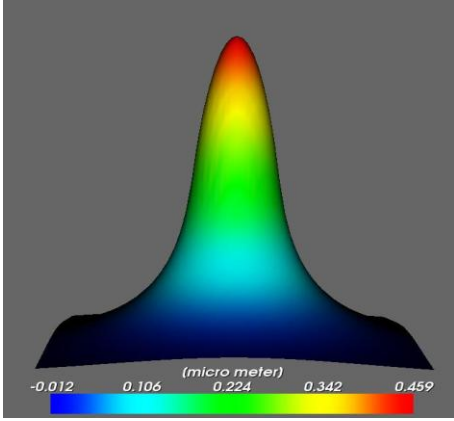
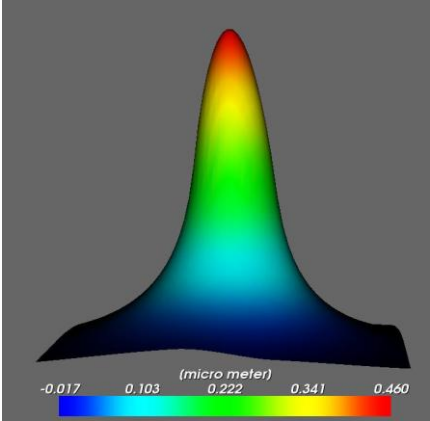
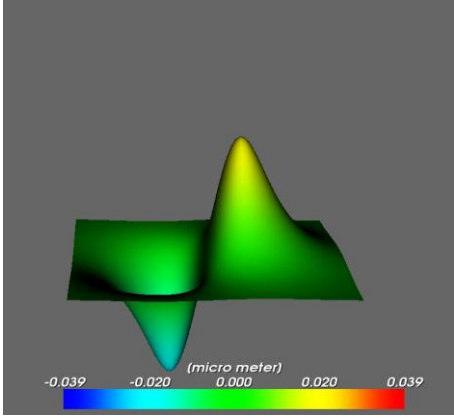
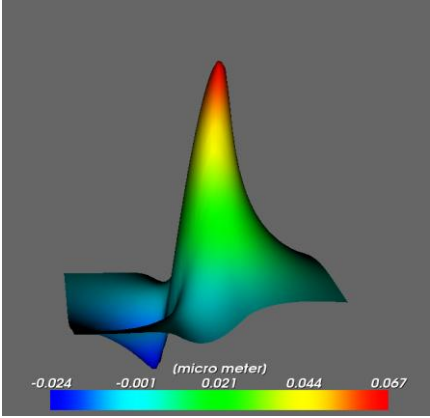
$$\sigma_{Mises} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]}}{H^{eff}} \quad (7.21)$$

H^{eff} ergibt sich aus der jeweilig verwendeten Härtekurve (Kapitel 6.2.4.2). Die Richtung der Scherkraft erfolgt in x-Richtung gemäß (7.6) mit einem Reibkoeffizienten von $\mu=0.3$.

Betrachtet man die x/z-Ebenendarstellung des von-Mises-Stresses in Tabelle 7.18, so können drei Punkte herausgestellt werden.

1. Der Verlauf der von-Mises-Spannungen verläuft stetig über die (virtuellen) Schichtgrenzen, wodurch eine fehlerfreie Implementierung der Kontinuitätsbedingungen gemäß Glg. (6.180) gegeben ist.
2. Die Verteilung der von-Mises-Spannungen stimmt mit den Darstellungen in der Literatur [16][87] überein. Bei reiner Normalbelastung liegt der Bereich mit dem höchsten von Mises Stress im Innern des Kontaktmaterials. Eine Erhöhung der Normalkraft führt zu der Ausbildung einer plastischen Zone unterhalb der Kontaktoberfläche. Diese Zone ist jedoch allseitig von einer elastisch beanspruchten Zone umgeben. Bei einer weiter steigenden Normalkraft wandert die plastische Zone zur Oberfläche hin und erreicht an den Rändern des Kontaktbereiches die Oberfläche.
3. Bei Vorhandensein einer tangentialen Belastung erreicht die Zone maximaler von-Mises-Belastung die Oberfläche am Randbereich in Richtung der wirkenden Scherkraft.

Tabelle 7.18: Spannungen und Deformationen beim Kontakt zweier identischer kugelförmiger homogener Kontakte.

	$\mu=0$	$\mu=0,3$
Von-Mises-Stress (x/z-Schnittebene)		
Von-Mises-Stress Kontakt-Oberfläche		
Deformation z-Richtung Kontaktfläche		
Deformation x-Richtung Kontaktfläche		

Die von-Mises-Belastung auf der Kontaktoberfläche ist ebenfalls sehr gut aus der Draufsicht auf die Kontaktoberfläche zu sehen. Bei Vorhandensein einer reinen Normalkraft zeigt sich die höchste mechanische Belastung im Randbereich der Kontaktfläche. Eine zusätzliche Scherkraft erhöht das gesamte Belastungsniveau und bildet in Richtung der Scherkraft einen halbmondförmigen Bereich höchster Belastung aus. Dieser Umstand äußert sich nur marginal in der Höhe der Deformation in z-Richtung. Die x-Komponente des Deformationsvektors, zeigt jedoch wie zu Erwarten eine starke Asymmetrie in x-Richtung.

7.3 Simulation des Engewiderstandes

Die Berechnung des Engewiderstandes kann generell erst nach Kenntnis der a-Spot-Verteilung durchgeführt werden. Dies bedeutet, dass zuerst die Berechnung der Deformationen des Kontaktschichtsystems, durchgeführt werden muss. Um bei der iterativen Simulation der elektrischen Kontaktcharakteristika sowohl für Zwei- als auch für Dreifachschichtsysteme die gleichen Algorithmen verwenden zu können, wird wie folgt verfahren. Bei einem Zweischichtsystem wird die Dicke der (nicht vorhandenen) Zwischenschicht auf 1 μm festgelegt. Der spezifische Widerstand wird gleich dem Grundmaterial gesetzt. Hierdurch geht die Zwischenschicht praktisch in das Grundmaterial über. Tabelle 7.19 zeigt die Parameter zur Steuerung des in Abschnitt 6.3.2 vorgestellten iterativen Algorithmus. Falls nicht explizit anders erwähnt, werden diese Parameter standardmäßig in den nachfolgenden besprochenen Simulationen verwendet. Während der Relaxationsfaktor ω_R und der maximal zulässige Fehler bereits in Abschnitt 6.3.2 dargestellt wurde, haben die weiteren in Tabelle 7.19 aufgeführten Parameter folgende Bedeutung:

Tabelle 7.19: Parameter zur iterativen Bestimmung des Engewiderstandes

ω_R	1,3	
ϵ^{itera}	0,001	
Coarse-Faktor	2^n ; $n=4$	
$\Delta\epsilon$	1,5	
Z_{Zoom}	3	
Threshold	100	MPa

Mit Coarse-Faktor wird der Faktor bezeichnet, um den die Anzahl Maschenpunkte in z-Richtung im größten Gitter verringert wird. Hierbei muss der Wert in der Form

$$\text{CoarseFaktor} = 2^n \quad (7.22)$$

vorliegen. Die Größe $\Delta\epsilon$ wird nach jedem Übergang von einem groben auf ein feineres Rechengitter auf ϵ^{itera} angewendet.

$$\epsilon^{\text{itera}} \leftarrow \Delta\epsilon \cdot \epsilon^{\text{itera}} \quad (7.23)$$

Dies bedeutet zum Beispiel, dass bei einem Coarse Faktor von 16 und damit 3 Übergängen von einem groben hin zu einem feineren Gitter, in der abschließenden Iterationsfolge der maximal zulässige Fehler um den Faktor $\Delta\epsilon^3$ höher als zu Beginn ist. Mit den Werten aus Tabelle 7.19 wird der maximale zulässige Fehler von 0,001 auf 0,003375 angehoben. Durch dieses Vorgehen reduziert sich die maximale Anzahl an Iterationsschritten noch einmal drastisch. Dies ergibt sich aus dem Umstand, dass bei einer großen Genauigkeit der Gauß-Seidel-Iteration im groben Gitter, die wegen der geringeren Anzahl an Maschenpunkten im Vergleich zum feineren Gitter sehr schnell konvergiert, die Iteration im feineren Gitter ebenfalls schneller verläuft. Die Bedeutung des Parameters Z_{Zoom} kann aus Abbildung 7.49 entnommen werden. Ausgehend vom Maximalwert der durch die Datenmatrix $K1$ ($\max(K1)$, siehe auch Kapitel 6.3.2) repräsentierten Topographie von Kontakt 1, ergibt sich die Gesamtausdehnung des Rechengebietes in z-Richtung zu:

$$H = 2 \cdot Z_{\text{Zoom}} \cdot \max(K1) \quad (7.24)$$

7.3.1 Vergleich mit bestehenden Modellen und Test auf Plausibilität der Algorithmen

Da es in der Literatur keine geeignete Modelle gibt, welche die a-Spot-Verteilung und gleichzeitig die Schichtabfolge der Steckverbinderkontakte in Betracht ziehen, wird hier zuerst der Vergleich des reinen Hertz'schen Kontaktes bzw. der Holm'schen Kontakttheorie betrachtet. Der Hertz'sche Kontakt wird hier über einen Kontakt zweier Gold-Kugelkontakte abgebildet (siehe Tabelle 7.20). Bei der iterativen Bestimmung des Engewiderstandes wird mit einem homogenen Dreischichtsystem gerechnet. Die entsprechenden Rechenparameter sind in Tabelle 7.19 aufgelistet.

Tabelle 7.20: Kennwerte eines simulierten Hertz'schen Kontaktes

	Kontakt 1	Kontakt 2
Kontaktradius	$r_{11} = r_{12} = 1 \text{ mm}$	$r_{21} = r_{22} = 1 \text{ mm}$
Dicke Deckschicht	$2 \text{ }\mu\text{m}$	$2 \text{ }\mu\text{m}$
Dicke Zwischenschicht	$1 \text{ }\mu\text{m}$	$1 \text{ }\mu\text{m}$
Dicke Grundmaterial	$2 \text{ }\mu\text{m}$	$1 \text{ }\mu\text{m}$
E-Modul	78 GPa	
Bruchspannung	200 MPa	
Querkontraktion	0,32	
Spezifischer Widerstand	$2,2 \cdot 10^{-8} \text{ }\Omega\text{m}$	
Härtekennlinie	Elastisch	
Rechenverfahren Deformation	Multi Grid	
Kontakt Normalkraft	1 N	
N_x/N_y	128	
N_z	256	

Bei der Gegenüberstellung sei angemerkt, dass auch die Holm'sche Formel ebenfalls nur als Näherung zu sehen ist. Die errechneten Unterschiede sollten daher auch nur als „Unterschied“ und nicht als Fehler interpretiert werden. Wie in Tabelle 7.21 ersichtlich, ergeben die Simulationsergebnisse für den Hertz'schen Kontaktfall in guter Näherung die gleichen Ergebnisse wie der Holm'sche Formalismus. Bei steigender x/y-Auflösung steigt die Übereinstimmung der errechneten Kontaktfläche gegenüber der Hertz'schen Theorie (siehe auch Tabelle 7.10). Dies ergibt sich durch den entsprechend geringeren Diskretisierungsfehler. Die gleiche Tendenz ist auch im Vergleich zwischen der Holm'schen Theorie und dem hier angewendeten Simulationsverfahren zu erkennen.

Tabelle 7.21: Vergleich von Engewiderstand und Kontaktfläche mit den Formalismen von Holm und Hertz

X/Y Auflösung	$R_{\text{Eng}} / \text{m}\Omega$		Kontaktfläche / μm^2	
	absolut	Rel. Differenz		
16	0,47	11,3%	1367	3,4%
32	0,56	5,6%	1288	-2,4%
64	0,57	7,5%	1347	1,9%
128	0,55	3,7%	1323	0,1%
256	0,51	-3,7%	1316	-0,3%
Holm / Hertz	0,53		1321	

Zur weiteren Abschätzung der Plausibilität des in dieser Arbeit entwickelten Algorithmus dient die folgende Bildsequenz. Am Beispiel des in Tabelle 7.20 spezifizierten Hertz Kontaktes wird die Potential- und Stromdichteverteilung im Innern des Kontaktpaares dargestellt. Abbildung 7.50 zeigt eine Schnittebenenendarstellung des Hertz'schen Kontaktes.

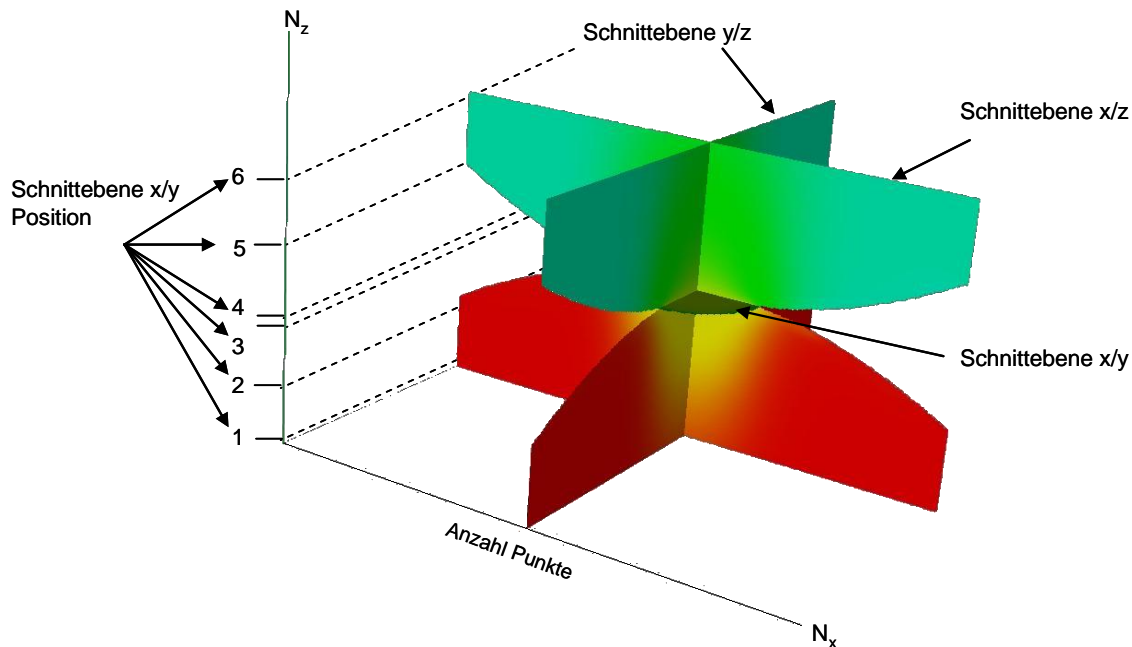


Abbildung 7.50: Schnittebenenendarstellung durch einen Hertz'schen Kontakt. Kontaktradien symmetrisch 1 mm. x/y-Auflösung 128 Pkt. z-Auflösung 256 Pkt.; Kontaktnormalkraft 1 N.

Betrachtet man zum Beispiel eine x/z-Schnittebene, welche mittig durch den Kontakt gelegt wird, und stellt den Potentialwert zusätzlich zu einer Farbkodierung noch als Höhenwert dar, so ergibt sich das in Abbildung 7.51 gezeigte Bild. Sehr gut ist zu erkennen, dass im Bereich der Kontaktstelle der höchste Potentialabfall zu erkennen ist. Weiterhin ergeben sich keine erkennbaren Sprünge des Potentialverlaufs über die jeweiligen „virtuellen“ Schichtgrenzen. Dies muss sich wegen des homogenen spezifischen Widerstands auch so ergeben.

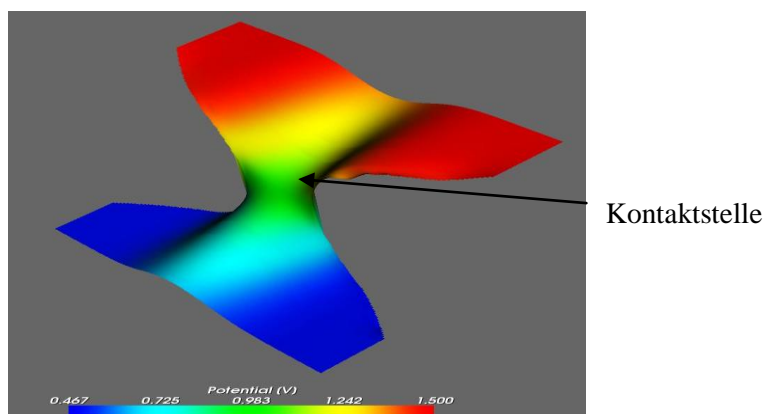


Abbildung 7.51: Dreidimensionale Darstellung der Potentialverteilung in einem Hertz'schen Kontakt. Gezeigt ist eine x/z-Schnittebene mittig durch den Kontakt zweier symmetrischer Kugelkontakte.

In Abbildung 7.52 wird die Potentialverteilung der x/y-Ebene an Hand der in Abbildung 7.50 markierten Positionen gezeigt. Deutlich ist zu erkennen, dass das Potential zur Mitte hin einen Berg bzw. eine

Senke für die Ladungsträger ausbildet. Abbildung 7.53 zeigt in Analogie zu Abbildung 7.52 die daraus resultierende Stromdichteverteilung.

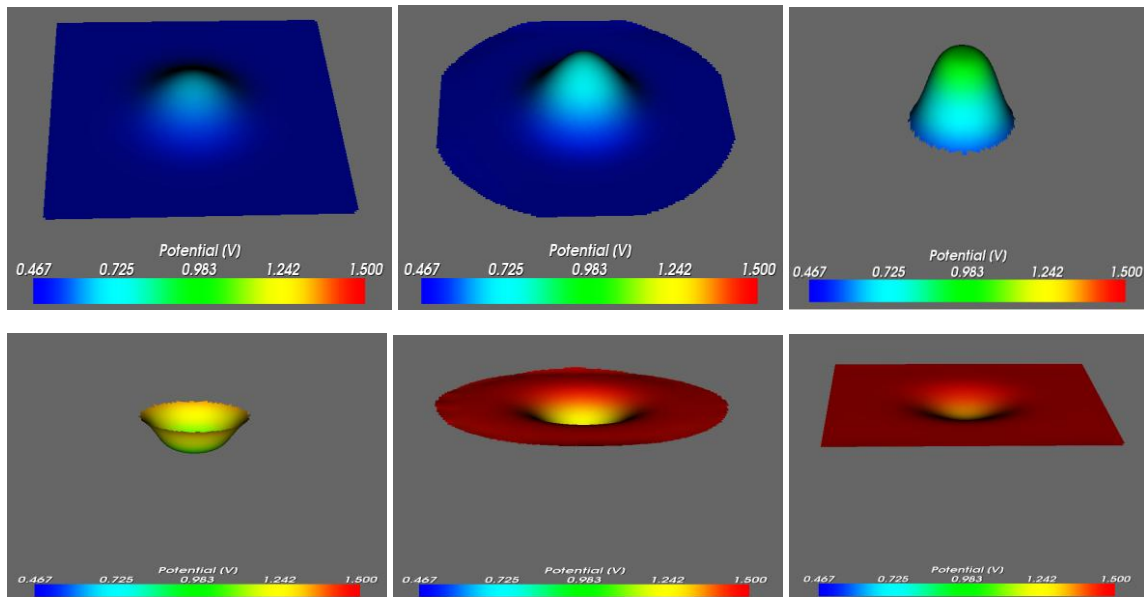


Abbildung 7.52: Potentialverteilung x/y-Schnittebene analog Abbildung 7.50. Schnittebenenposition beginnend mit Pos. 1 von links oben nach rechts unten.

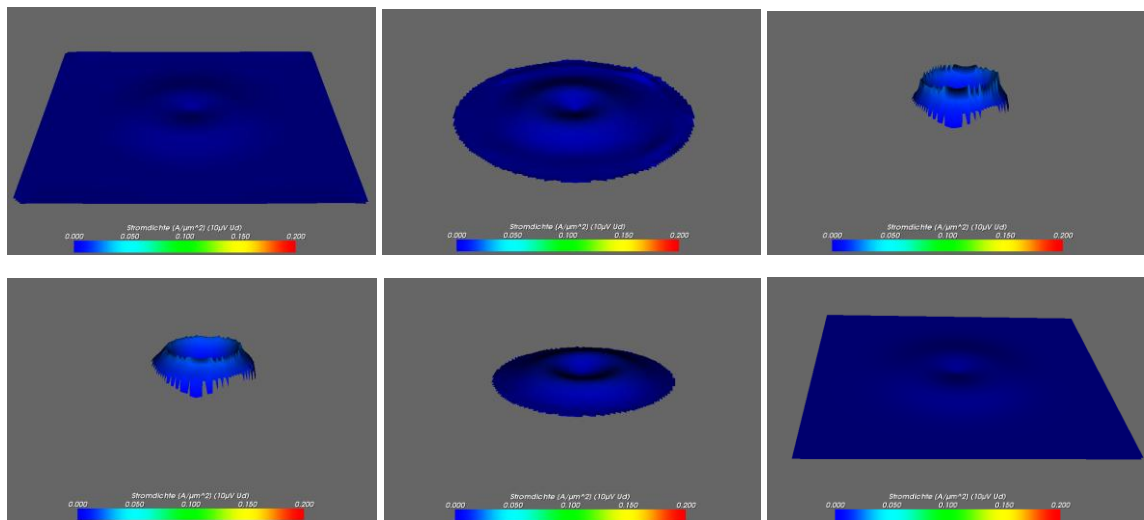


Abbildung 7.53: Stromdichteverteilung x/y-Schnittebene analog Abbildung 7.50. Schnittebenenposition beginnend mit Pos. 1 von links oben nach rechts unten.

Die Stromdichteverteilung zeigt die gleiche Rotationssymmetrie wie die Potentialverteilung. Es bildet sich jedoch im Gegensatz zur Potentialverteilung ein ringförmiger Bereich heraus. Die maximale Stromdichte stellt sich nicht im Zentrum der Kontaktfläche, sondern an deren Rändern ein. Noch deutlicher ist dieser Effekt an Hand Abbildung 7.54 a. und b. zu sehen. Abbildung 7.54 a. zeigt die x/z-Schnittebenen die mittig durch den Hertz'schen Kontakt gelegt ist.

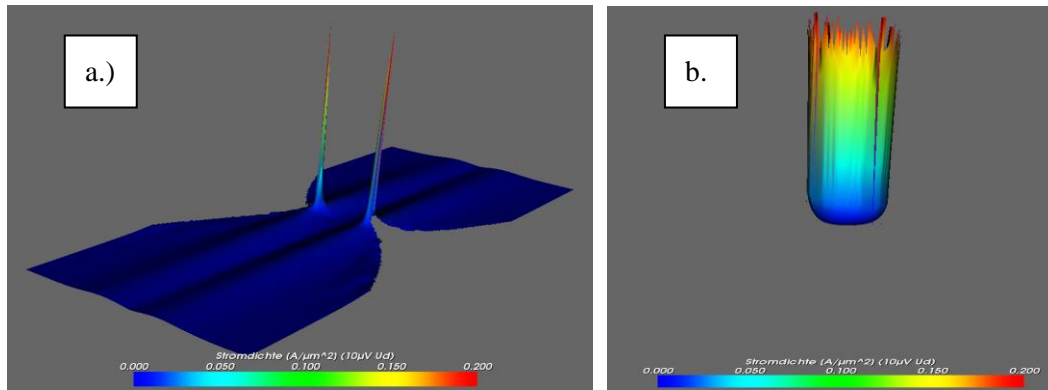


Abbildung 7.54: Dreidimensionale Darstellung der Stromdichteverteilung in einem Hertz'schen Kontakt. Gezeigt ist a.: die x/z-Schnittebene mittig durch den Kontakt zweier symmetrischer Kugelkontakte und b.: die x/y-Schnittebenen direkt durch die Kontaktfläche

Zum Einen ist zu erkennen, dass die Stromdichte wieder stetig über die „virtuellen“ Schichtgrenzen verläuft. Die beiden Peaks an den Rändern der Einschnürung verdeutlichen die Erhöhung der Stromdichte um den Faktor 10. Abbildung 7.54 b. zeigt diesen Effekt an Hand der x/y-Schnittebene, die direkt durch die Kontaktfläche verläuft. Die Erhöhung der Stromdichte an den Rändern liegt in der gleichen Größenordnung, wie sie auch von Minowa [103] mittels FEM-Analyse für einen quadratischen a-Spot ermittelt wurde. Die Erhöhung der Stromdichte an den Rändern des Kontaktbereichs ist auch aus dem Bereich des Widerstandsschweißens [96] bekannt.

8 Ergebnisse der Simulationsrechnungen

Die in diesem Kapitel aufgeführten Ergebnisse dienen in erster Linie dazu, die Anwendbarkeit der in dieser Arbeit entwickelten Modelle auf die Praxis zu demonstrieren. Auf Grund der Fülle an Einflussfaktoren auf das mechanische und elektrische Verhalten elektrischer Kontakte kann hier nur auf einige Beispiele eingegangen werden.

8.1 Kennlinien und Einflussgrößen des Engewiderstandes

Im Folgenden werden zuerst die Simulationsergebnisse mit realen Messreihen verglichen. Hierzu werden gemessene digitalisierte Oberflächen verwendet. In einem weiteren Simulationslauf werden aus den Kennwerten der gemessenen Oberflächen virtuelle Oberflächen analog zu Kapitel 6.1 erzeugt. Nach einem erneuten Vergleich des simulierten Engewiderstandes mit den gemessenen Werten werden die simulierten Oberflächen hinsichtlich Kontaktradius und Rauheit variiert. Abschließend wird die mechanische Belastung innerhalb der Kontakte bei unterschiedlichen Oberflächenbeschichtungen analysiert. Sämtliche in den folgenden Tabellen aufgeführten mechanischen und elektrischen Parameter wie z.B. Bruchspannung, E-Modul oder spezifischer Widerstand wurden aus unterschiedlichen Quellen, wie Datenblättern, Lehrbüchern oder Internet-Recherchen entnommen und sind nicht weiter verifiziert. Sie dienen somit nur zur ersten Grundorientierung.

8.1.1 Vergleich der Simulation mit gemessenen Kontaktkraft-Widerstands-Kennlinien

Als Basis dienen Messreihen, die im Grundlagenlabor der Firma Tyco Electronics am Standort Harrisburg USA durchgeführt wurden. Hierbei handelt es sich um den Kontakt einer kugelförmigen Elektrode mit einer ebenen Kontaktfläche. Der Radius der Kugelelektrode beträgt 2,5 mm. Die Beschichtungsabfolge beider Kontaktpartner ist in Tabelle 8.1 wiedergegeben.

Tabelle 8.1: Beschichtungsabfolge der Kontaktpaarung Harrisburg.

	Flachkontakt	Kugelkontakt
Deckschicht	0,38 μm Au	0,38 μm Au
Zwischenbeschichtung	1,27 μm Ni	1,27 μm Ni
Grundmaterial	(6 μm) CuSn6	(6 μm) CuSn6

Analysiert werden jeweils 18 Messreihen unterschiedlicher Normalkraftbereiche. Der erste Datensatz überdeckt einen Normalkraftbereich von 1 cN bis 50 cN. Der zweite Datensatz wird mit einem anderen Kraftaufnehmer gemessen und reicht von 60 cN bis 250 cN. Die Oberflächen werden vor der Messung im Ultraschallbad mit 2-Propanol gereinigt. Die Messung erfolgt unmittelbar nach der Trocknung der Testmuster. Hierdurch wird der Einfluss von Deckschichten so gering wie möglich gehalten. Eine Relativbewegung der Kontakte vor der Messung fand nicht statt. Die Oberflächendaten

werden mit einem optischen Profilometer der Firma Veeco gemessen. Die Auflösung der Originaldaten in x/y-Richtung beträgt $0,8\text{ }\mu\text{m}$. Um den Rechenaufwand und Speicherbedarf möglichst gering zu halten, wird wie folgt vorgegangen.

Zuerst wird der hypothetische Hertz'sche Kontaktdurchmesser bei einer Normalkraft von $2,5\text{ N}$ berechnet. Bei der untersuchten Kontaktpaarung ergibt sich ein Wert von $2a \approx 95\text{ }\mu\text{m}$. Um Aliasing-Effekte gering zu halten und möglichst keine randnahen a-Spots zu erhalten, wird eine Fläche mit der doppelten Ausdehnung in x- und y-Richtung eingelesen. Aus der Bedingung (6.158), dass die Anzahl der Maschenpunkte in x/y-Richtung eine Potenz von 2 darstellen muss, ergeben sich folgende Überlegungen. Bei einer Auflösung von $0,8\text{ }\mu\text{m}$ ergibt sich ein Gitter mit 256 Punkten in x/y-Richtung, was einer Flächenausdehnung von etwa $204\text{ }\mu\text{m}$ entspricht. Um den Speicherbedarf und die Rechenzeit in einem vertretbaren Rahmen zu halten, wird nur jeder zweite Datenpunkt eingelesen, was einer Auflösung von $1,6\text{ }\mu\text{m}$ bei 128×128 Punkten entspricht. Wie in Abbildung 8.1 an Hand des hervorgehobenen Bereichs sehr gut zu erkennen ist, entspricht die zuvor gemachte Größenabschätzung sehr gut den tatsächlichen Gegebenheiten.

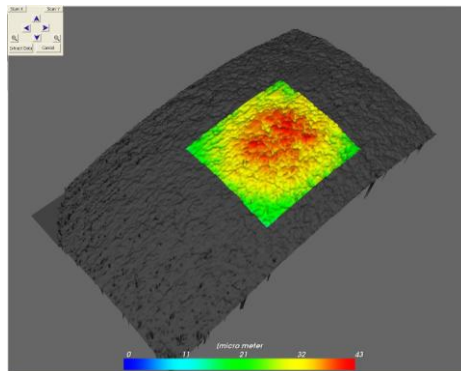


Abbildung 8.1: Digitalisierte Oberfläche der Kugelelektrode. Hervorgehobener Bereich 128×128 Punkte. x/y-Auflösung $1,6\text{ }\mu\text{m}$; Vertikale Auflösung $<0,1\text{ nm}^{24}$

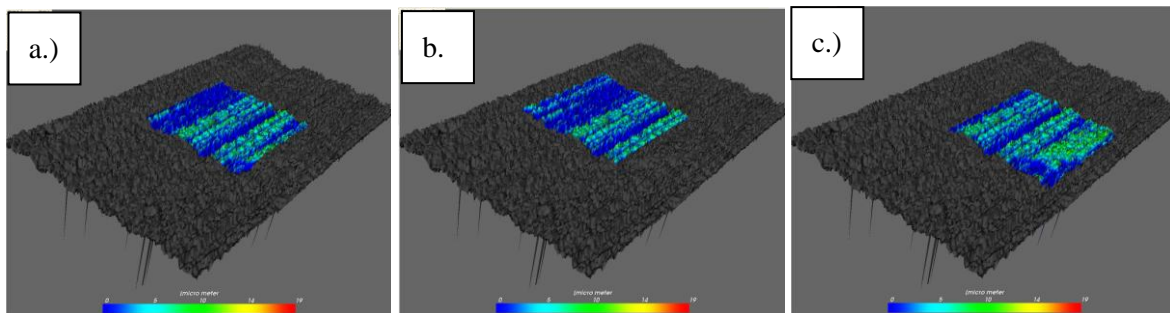


Abbildung 8.2 a. – c.: Digitalisierte Oberfläche des Flachkontaktes. Hervorgehobener Bereiche 128×128 Punkte. x/y-Auflösung $1,6\text{ }\mu\text{m}$; Vertikale Auflösung $<0,1\text{ nm}$.

Um abschätzen zu können, ob unterschiedliche Kontaktierungspunkte unterschiedliche Kennlinien ergeben, werden drei verschiedene Ausschnitte aus dem Datenfile des flachen Kontaktstückes eingelesen (siehe Abbildung 8.2 a. – c.). Zur Simulation des Engewiderstandes werden die gelisteten me-

²⁴ Herstellerangabe Veeco

chanischen und elektrischen Kennwerte verwendet. Die Annäherung der Härtekennlinie erfolgt gemäß Glg. (7.16).

Die iterative Bestimmung der Druckverteilung geschieht über die CG-Methode unter Verwendung des DC-FFT-Verfahrens. Ein Vergleich des simulierten Engewiderstandes mit den Messwerten des Kontaktübergangswiderstandes ist in Abbildung 8.3 gegeben. Wie in der Legende ausgewiesen, korrespondieren die gestrichelten Linien mit den Maximal- bzw. Minimalwerten des experimentell bestimmten Kontaktübergangswiderstandes. Die Symbole markieren die simulierten Engewiderstände hinsichtlich der in Abbildung 8.1 und Abbildung 8.2 a. – c. dargestellten Kontaktflächen.

Tabelle 8.2: Mechanische und elektrische Kenngrößen der Kontaktmaterialien

	Au	Ni	CuSn6	
E	78	199	118	GPa
ν	0,32	0,32	0,32	
Y	200	660	560	MPa
ρ	2,2	6,9	12,28	

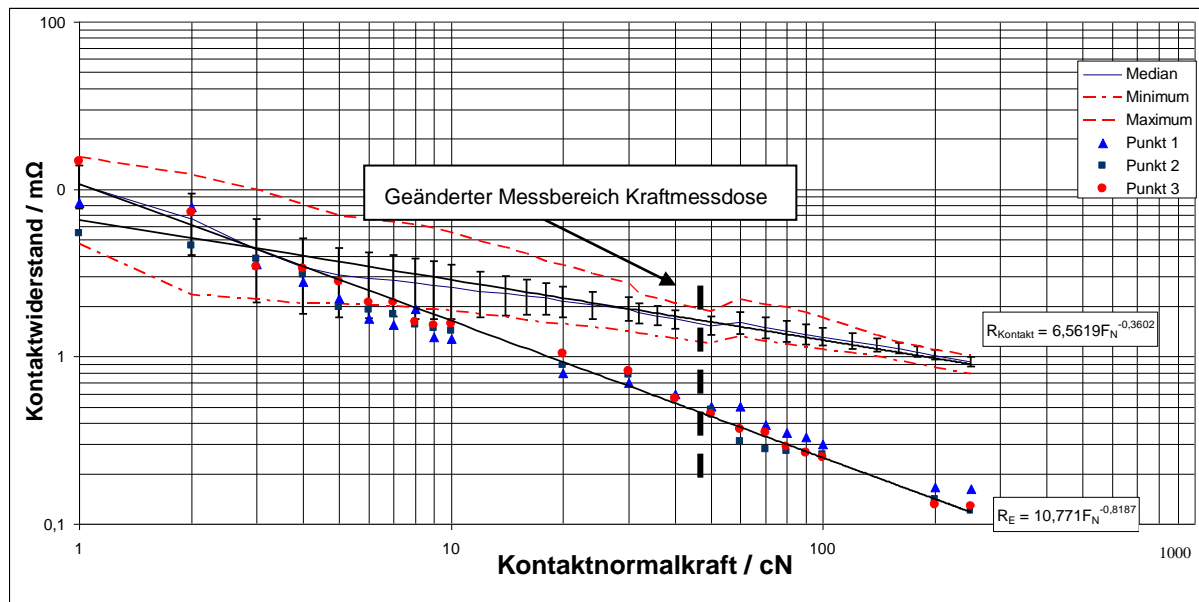


Abbildung 8.3: Vergleich des errechneten Engewiderstandes (Punkt 1 bis 3) mit dem gemessenen Kontaktübergangswiderstand (siehe auch Abbildung 5.8).

Auf Grund der doppelt logarithmischen Darstellung ergibt eine Regression der Datenpunkte in der Form $R = \text{Const} \cdot F_N^n$ eine Gerade mit der Steigung n . Für den Median des gemessenen Kontaktwiderstandes ergibt sich folgende potentielle Abhängigkeit:

$$R_{\text{Kontakt}} = 6,56 \cdot \left(\frac{F_N}{\text{cN}} \right)^{-0,36} \text{ m}\Omega \quad (8.1)$$

Dies würde auf ein annähernd elastisches Verhalten der Kontaktoberfläche schließen lassen. Im Gegensatz dazu lassen sich die simulierten Werte nach folgender Näherung darstellen.

$$R_{Eng} = 10,77 \cdot \left(\frac{F_N}{cN} \right)^{-0.81} m\Omega \quad (8.2)$$

Der Unterschied in den beiden obigen Gleichungen kann durch den Messaufbau mit dem zu berücksichtigenden Bulkwiderstand erklärt werden. Mit der Beziehung

$$R_{Eng} = R_{Kontakt} - R_{Offset} \quad (8.3)$$

können die simulierten Werte mit den gemessenen Werten in Beziehung gesetzt werden. Mit Gleichung (8.3) errechnet sich der Bulk-Widerstand der Annordnung zu:

$$R_{Offset} = 0,9 m\Omega \quad (8.4)$$

Der Offset setzt sich aus dem Widerstand des Grundmaterials und der Kontaktierungspunkte der Messelektroden zusammen. Mit $R_{Offset} = 0,9 m\Omega$ ergibt sich das in Abbildung 8.4 gezeigte Bild. Die simulierten Widerstandswerte fallen nun über den gesamten analysierten Normalkraftbereich innerhalb der Grenzen der Messwerte. Die in Abbildung 8.3 und Abbildung 8.4 gezeigten Fehlerbalken kennzeichnen die Standardabweichungen der Messwerte. Der Umstand, dass die Fehlerbalken im Normalkraftbereich zwischen 4 cN und 10 cN unterhalb der gemessenen Minimalwerte liegen, begründet sich aus der Tatsache, dass die Messwerte keiner Normalverteilung gehorchen (siehe Abbildung 8.5). Eine ähnliche Verteilungsform jedoch mit einer Gesamtzahl von mehreren Hundert Einzelmessungen wird in [148] gezeigt.

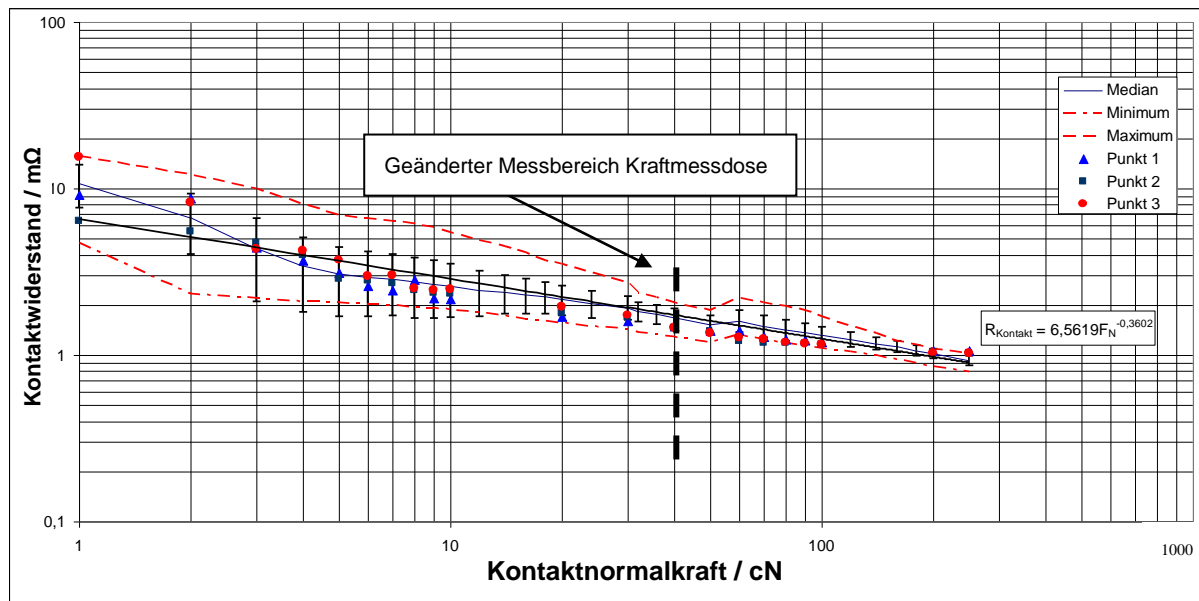


Abbildung 8.4: Vergleich des errechneten (Punkt 1 bis 3) mit dem gemessenen Kontaktübergangswiderstand.

Der Bahnwiderstand (Grundmaterial plus Messapparatur) wird als konstanter Offset von 0,9 mOhm angenommen.

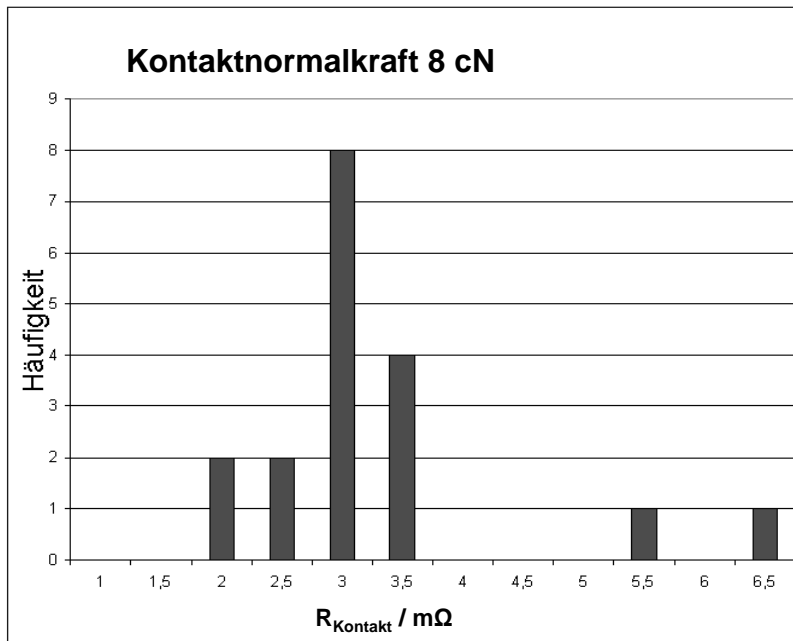


Abbildung 8.5: Verteilung der 18 Kontaktwiderstandsmesswerte bei einer Kontaktnormalkraft von 8 cN.

Offensichtlich ist das Zunehmen der Wertestreuungen bei abnehmender Kontaktnormalkraft. Während die Zunahme der Streuungen bei den experimentell ermittelten Werten mit einem stärkeren Einfluss von Fremdschichten und Messungenauigkeiten erklärt werden kann, ist dies bei den Simulationsergebnissen eher auf die geringe Zahl an a-Spots und der damit einhergehenden „Instabilität“ des Iterationsalgorithmus zurückzuführen.

8.1.2 Abhängigkeit des Kontaktwiderstandes von der Oberflächenrauheit

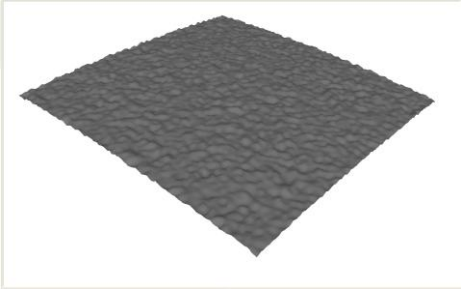
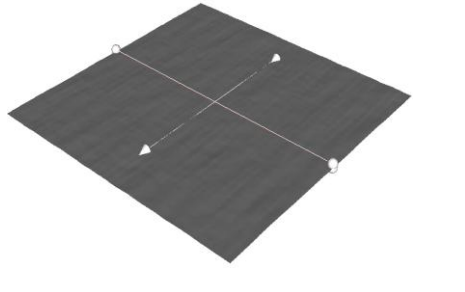
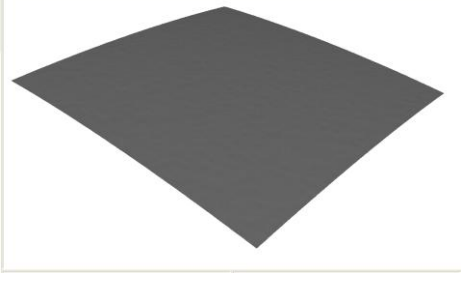
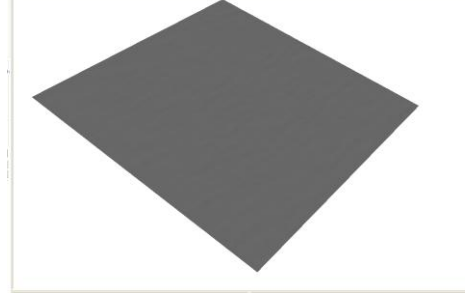
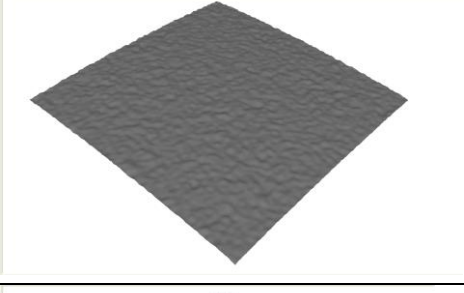
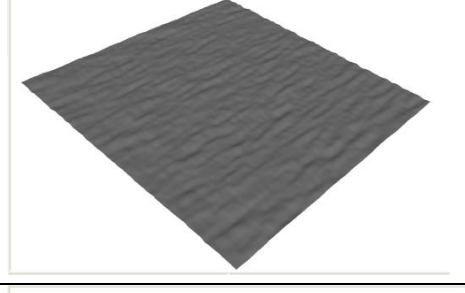
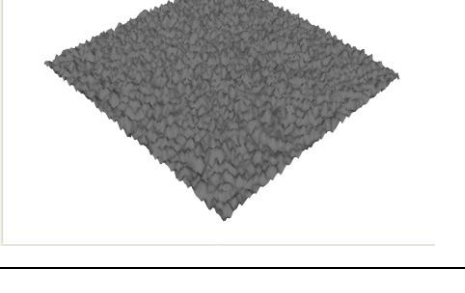
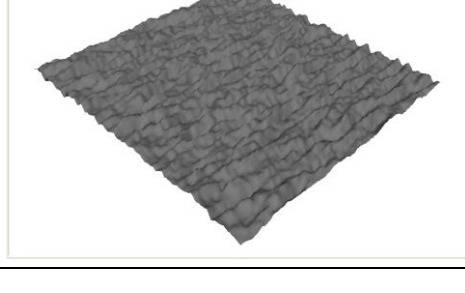
Eng mit dem Engwiderstand verknüpft ist die Anzahl der a-Spots und deren Verteilung innerhalb der Kontaktfläche. Um dem Einfluss von Oberflächenrauheit und Kontaktradius abschätzen zu können, werden die digitalisierten Oberflächen aus Abbildung 8.1 und Abbildung 8.2 mittels des in Kapitel 6.1.3 beschriebenen statistischen Verfahrens simuliert. Hierzu werden die in Tabelle 1.1 aufgeführten Kennwerte verwendet.

Tabelle 8.3: Parameter zur Oberflächensimulation mittels „FIR“-Filter

Parameter	Kugelelektrode	Flachkontakt	Einheit
σ Messung	0,24	0,3	μm
σ variabel	0,02 / 0,2 / 1	0,02 / 0,2 / 1	μm
Wölbigkeit	3	3	
Schiefe	0	0	
Autokorrelationsform	Exponentiell	Exponentiell	
β_x	10	2	Punkte
β_y	2	2	Punkte
R_1	2,5	1000	mm
R_2	2,5	1000	mm
Seed	1	2	
N_x/N_y	128 / 128	128 / 128	

Nach einem Test, ob die simulierten Oberflächen die gleiche Kraft-Widerstandskennlinie ergeben, werden die Oberflächen erst hinsichtlich der Rauheit verändert. Die so erzeugten Oberflächen sind in Tabelle 8.4 abgebildet.

Tabelle 8.4: Simulierte Oberflächen mit Parametern aus Tabelle 8.3, aber unterschiedlicher Rauheit.

Rauheit	Kugelelektrode	Flachkontakt
Aus Messung		
0,02 μm		
0,2 μm		
1 μm		

Ein Vergleich des simulierten Kontaktüberganges, basierend auf den Oberflächen mit einer aus den Profilometerdaten identischen Rauheit, ergibt vergleichbare Werte für den errechneten Kontaktübergangswiderstand. Die Simulationsreihen mit den geänderten Rauheiten ergibt das in Abbildung 8.6 gezeigte Kennlinienbild.

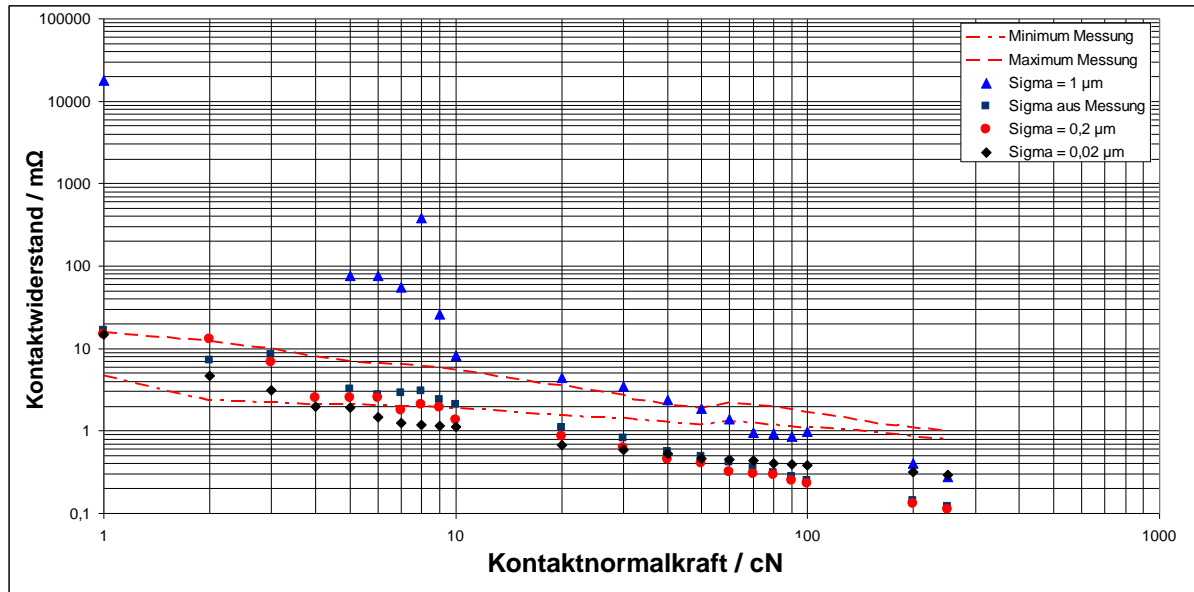


Abbildung 8.6: Abhängigkeit des Kontaktübergangswiderstandes von der Oberflächenrauheit.

Bei einer Rauheit von $\sigma=0,2\text{ }\mu\text{m}$, die sich nur geringfügig von der Rauheit der experimentell verwendeten Proben unterscheidet, ergeben sich fast identische Ergebnisse. Der Wert $\sigma=0,2\text{ }\mu\text{m}$ wurde deshalb gewählt, weil er charakteristisch für die in der Steckverbinderindustrie verwendeten Oberflächen ist (siehe auch Kapitel 7.1.1). Eine um den Faktor 10 verringerte Rauheit zeigt im Bereich $<10\text{ cN}$ tendenziell geringere Widerstandswerte. Die mit einer Rauheit von $\sigma=1\text{ }\mu\text{m}$ durchgerechneten Werte zeigen jedoch im Bereich $<50\text{ cN}$ Abweichungen, von etwa dem 10 fachen der Widerstandswerte der „glatten“ Oberflächen.

8.1.3 Abhängigkeit des Kontaktwiderstandes von der a-Spot-Anzahl

Um abzuschätzen, ob durch die unterschiedlichen Rauheitskennwerte die Anzahl und Verteilung der a-Spots beeinflusst wird, kann Abbildung 8.7 herangezogen werden. Hier ist die Anzahl der a-Spots in Abhängigkeit von der Kontaktnormalkraft aufgetragen. Aus der doppeltlogarithmischen Darstellung ist sehr gut zu erkennen, dass die Abhängigkeit der a-Spotanzahl in sehr guter Näherung durch ein Gesetz folgender Form beschrieben wird.

$$N = \text{Const} \cdot F_N^n \quad (8.5)$$

In Tabelle 8.5 sind die entsprechenden Parameter für die untersuchten Oberflächenrauheiten aufgelistet. Die in der Tabelle aufgelisteten Exponenten zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit der Kesselring'schen Formel (6.207) aus Kapitel 6.3. Auch in Abbildung 8.7 wird die erhöhte Abweichung der Werte gegenüber dem Potenzgesetz bei Kontaktnormalkräften $<10\text{ cN}$ offensichtlich. Lediglich die sehr glatte Oberfläche mit $\sigma=0,02\text{ }\mu\text{m}$ folgt auch bei sehr niedrigen Kontaktkräften sehr eng dem Potenzgesetz.

Tabelle 8.5: Potentielle Abhängigkeit der a-Spot Anzahl von der Kontaktnormalkraft

$\sigma / \mu\text{m}$	Const / cN^{-n} (Glg.8.5; Abb. 8.7)	Exponent n
0,02	17,63	0,89
0,2	4,11	0,94
Wie aus Messung (0.24 / 0.3)	3,78	0,92
1,0	1,625	0,93

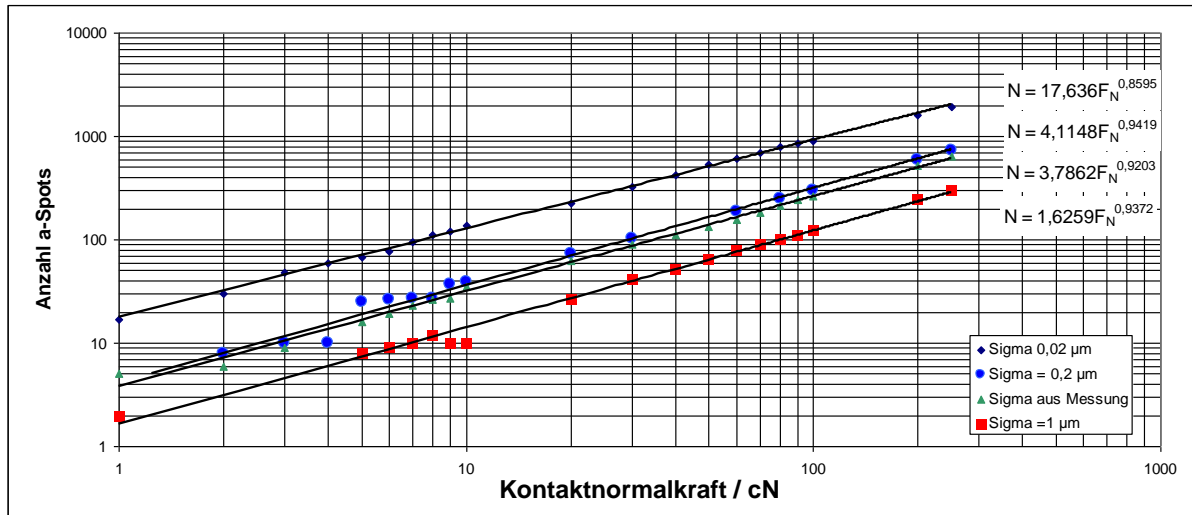


Abbildung 8.7: Anzahl a-Spots in Abhängigkeit von der Normalkraft; Oberflächen gemäß Tabelle 8.4; die Einheiten der Konstanten [cN^{-n}] sind der Übersichtlichkeit halber nicht mit angegeben.

Generell kann jedoch festgestellt werden, dass die Anzahl der a-Spots mit zunehmender Rauheit der Oberfläche abnimmt. Der Grund für die Abnahme der a-Spot Anzahl ist in der Tatsache zu suchen, dass bei einer raueren Oberfläche die einzelnen Berührungspunkte stärker deformiert werden müssen, bevor weitere Oberflächenerhebungen in Kontakt treten. Durch die stärkere Deformationen werden, auf Grund des Härteverhaltens der Oberflächen, höhere Drucklevel pro a-Spot erreicht, wodurch weniger a-Spots zur Aufnahme der Kontaktnormalkraft notwendig sind. Dieser Umstand wird sehr gut in Abbildung 8.8 a. und b. wiedergegeben.

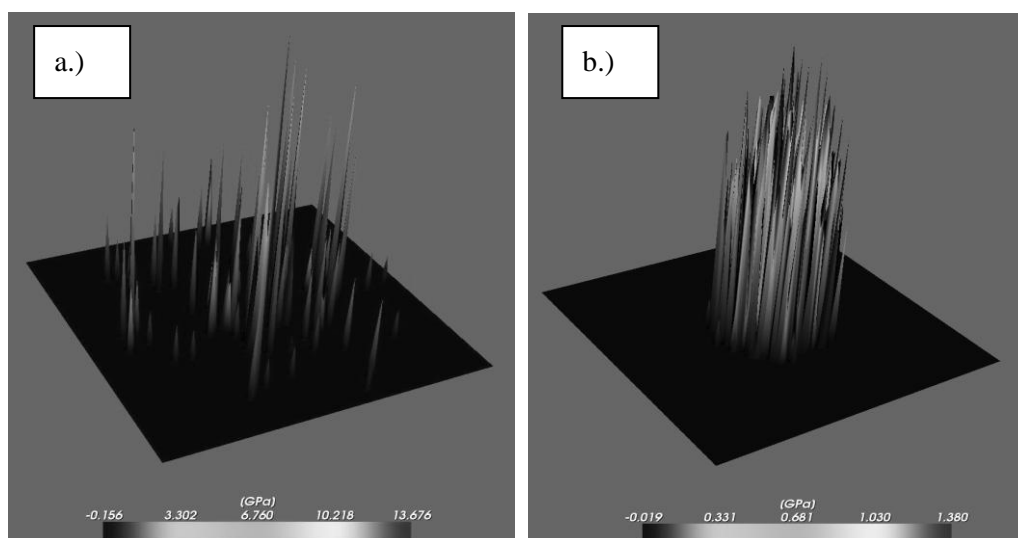


Abbildung 8.8: Druckverteilung auf der Kontaktoberfläche. a.) $\sigma=1,0 \mu\text{m}$; b.) $\sigma=0,02 \mu\text{m}$; Kontaktnormalkraft 1 N; Oberflächen gemäß Tabelle 8.4.

Durch die Abnahme der a-Spot Zahl erklärt sich auch die Tatsache, dass Oberflächen mit höherer Rauheit rechnerisch auch einen höheren Engewiderstand zeigen. Eine weitere generelle Aussage kann aus den in Abbildung 8.9 gezeigten Kennlinien gewonnen werden. Hier sind zum einen der iterativ berechnete Engewiderstand und zum anderen der Engewiderstand, der sich aus der Parallelschaltung der individuellen a-Spots ergibt, als Funktion der Kontaktnormalkraft dargestellt. Die verwendeten Oberflächentopographien ergeben sich aus den in Tabelle 8.4 gelisteten Parametern. Die Rauheit entspricht den gemessenen Werten analog Abbildung 8.1 und Abbildung 8.2. Beide Kennlinien zeigen einen Verlauf gemäß Glg. (8.5). Der Exponent beträgt bei beiden Kennlinien etwa den Wert $N=0,9$.

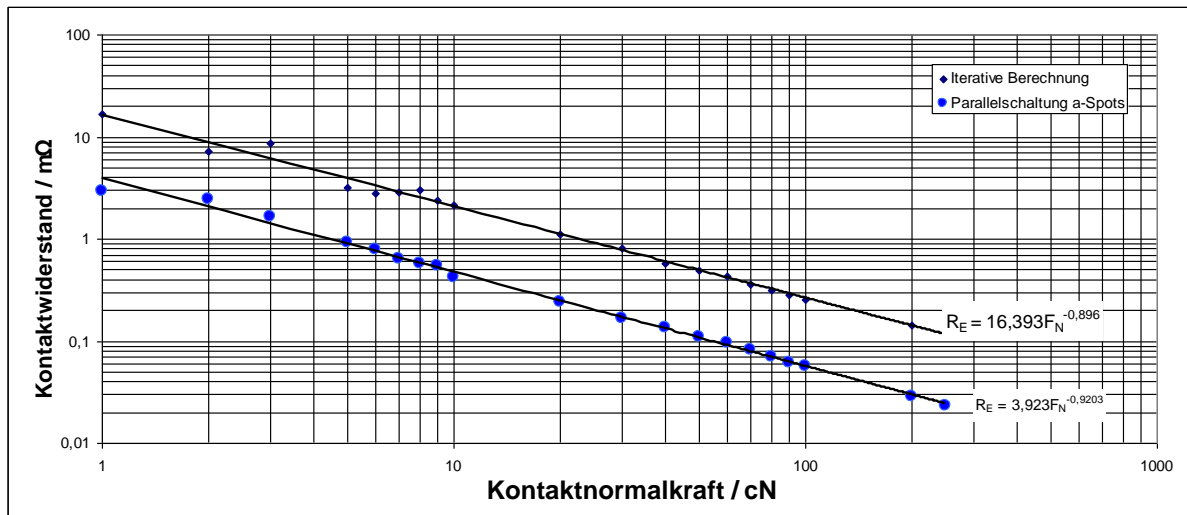


Abbildung 8.9: Unterschied zwischen iterativ berechnetem (entspr. gemessenen) Engewiderstand und dem Engewiderstand aus Parallelschaltung der a-Spots.

Der aus der Parallelschaltung der a-Spots errechnete Engewiderstand liegt jedoch generell unter den iterativ (gemessenen) Werten. Dies steht im Einklang zu dem Kapitel 6.3.1 dargestellten Formeln. Bei einer reinen Parallelschaltung werden die Wechselwirkungen benachbarter a-Spots nicht berücksichtigt. Die gegenseitige Wechselwirkung ergibt sich jedoch automatisch durch den in dieser Arbeit entwickelten Algorithmus. Die in Kapitel 6.3.1 aufgeführten Formeln werden hierbei nicht angewendet. Aus der Parallelität der beiden Kennlinien in der doppelt logarithmischen Darstellung ergibt sich in sehr guter Näherung:

$$R_E = 4,17 \cdot R_{parallel} \quad (8.6)$$

Der konstante Faktor von 4,17 kann jedoch nicht für Oberflächen beliebiger Struktur verwendet werden. Im Falle der hier untersuchten sehr glatten Oberfläche mit $\sigma = 0,02 \mu\text{m}$ ergibt sich, wie aus Abbildung 8.9 ersichtlich, näherungsweise ein Wert von 16,3. Bei glatteren Oberflächen liegen die a-Spots (siehe Abbildung 8.8) dichter zusammen, wodurch sich eine stärkere Beeinflussung der Strompfade ergibt.

Tabelle 8.6 zeigt graphisch die a-Spot-Verteilung und die Potentialwerte an Hand der x/z-Schnittebene durch die Kontaktmitte. Die Oberflächen werden auch hier gemäß den Parametern aus Tabelle 8.3 generiert. Die Rauheit wird entsprechend den Werten der digitalisierten Oberflächen aus Abbildung 8.1 und Abbildung 8.2 gewählt. Die Beschichtungsabfolge entspricht den Angaben aus Tabelle 8.1. Wie in der linken Spalte von Tabelle 8.6 durch die halbdurchsichtigen Flächen angedeutet ist, ergeben sich annähernd kreisförmig a-Spot-Cluster, deren Ausdehnung mit größer werdender Kontaktnormal-

kraft zunimmt. Die annähernd kreisförmige Verteilung der a-Spots ergibt sich, wie aus der Hertz'schen Theorie zu erwarten ist, aus dem Kontakt der kugelförmigen Elektrode mit dem „flachen“ Gegenstück. An Hand der rechten Spalte von Tabelle 8.6 ist weiterhin gut zu erkennen, dass mit wachsender Anzahl an a-Spots es zu einer gegenseitigen Beeinflussung kommt, was in Form einer Vergrößerung des Potentialabfalls im Innern der Kontaktkörper zum Ausdruck kommt. Abbildung 8.10 zeigt beispielhaft die Stromdichteverteilung bei einer Kontaktnormalkraft von 2 N.

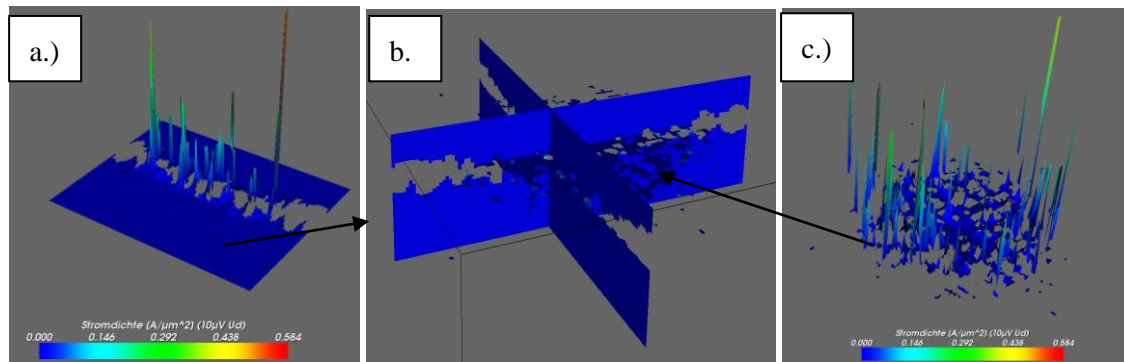
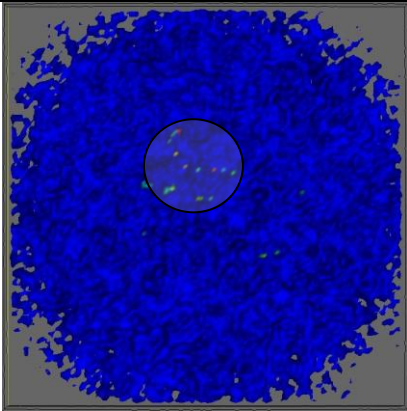
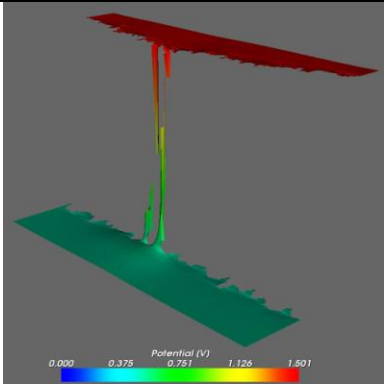
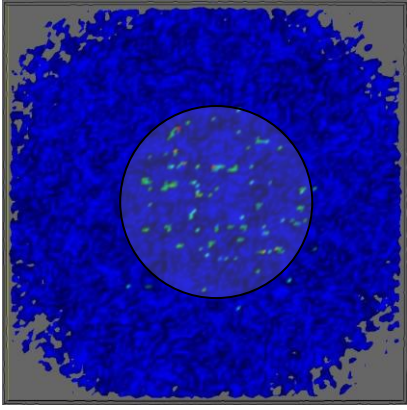
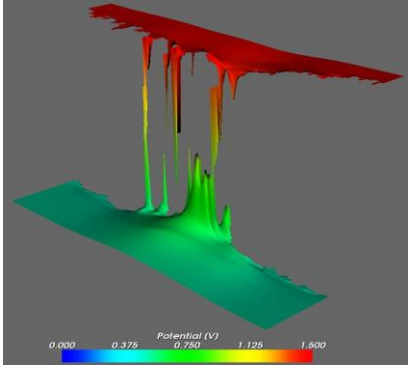
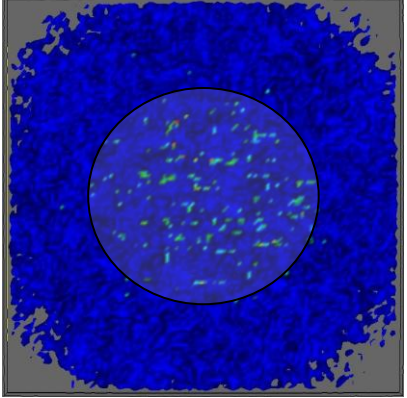
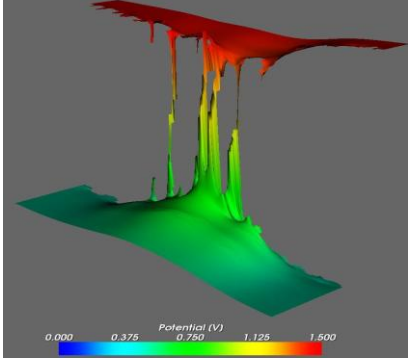
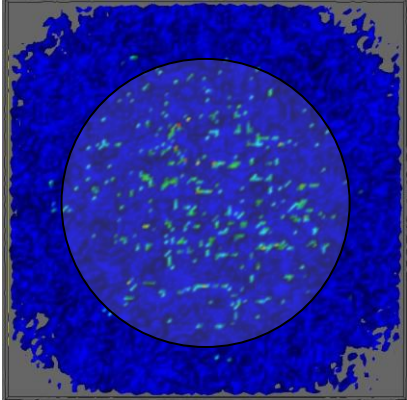
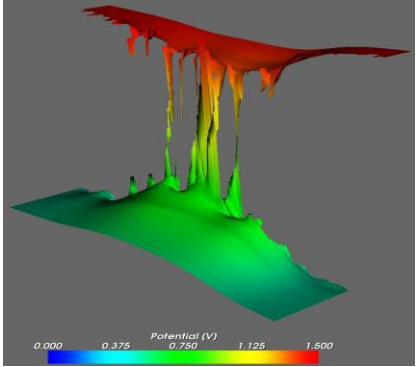


Abbildung 8.10 a. – c.: Stromdichterverteilung bei einer Kontaktnormalkraft 2 N

In Abbildung 8.10 b. zeigt exemplarisch die drei Schnittebenen bzgl. x/z-, y/z und x/y-Richtung. Abbildung 8.10 a. zeigt die 3D-Darstellung der Stromdichte bzgl. der x/z-Schnittebene. Deutlich ist zu erkennen, dass die Stromdichte in den a-Spots regelrecht Extremwerte gegenüber der Stromdichte im Grundmaterial darstellt. Betrachtet man die Stromdichteverteilung an Hand der x/y-Schnittebene, die wie in Abbildung 8.10 b. gezeigt direkt durch die Kontaktfläche gelegt ist, so ergibt sich das in Abbildung 8.10 c. zu sehende Bild. Auch hier ist wieder deutlich zu erkennen, dass die Stromdichte an den Rändern höher als im Inneren des Kontaktbereiches ist, was im Einklang mit den in [96] gemachten Aussage steht.

Tabelle 8.6: Darstellung der a-Spot Verteilung und der Potentialverteilung bei unterschiedlichen Kontaktnormalkräften

F_N / cN	a-Spot Verteilung	x/z-Schnittebene Potentialverteilung
0,1 N = 35		
0,5 N = 135		
1 N = 265		
2 N = 517		

8.1.4 Abhängigkeit des Kontaktwiderstandes vom Kontaktradius

Während sich die Oberflächenrauheit normalerweise direkt aus den Fertigungsprozessen ergibt, wird die makroskopische Form der Kontaktoberflächen (Kontaktkrümmungsradien) durch den Entwickler bestimmt. Hierbei stellt sich immer wieder die Frage nach dem optimalen Kontaktradius. Es spielt die Überlegung eine Rolle, dass zur Sicherstellung eines stabilen elektrischen Kontaktes, eine durch die Hertz'sche Theorie gegebene maximale Flächenpressung sichergestellt sein muss. Es wurde jedoch bereits in [105] dargestellt, dass die Hertz'sche Flächenpressung als Design-Parameter für Steckverbinderkontakte nicht geeignet ist. Im Folgenden soll an Hand der bisher diskutierten Kontaktpaarung der Einfluss des Kontaktradius betrachtet werden. Der Simulation liegen wieder das Gold über Nickel System mit der in Tabelle 8.1, Tabelle 8.2 und Tabelle 8.3 gegebenen Parametrisierung zu Grunde. Als Rauheits-Kennwerte dienen die Werte der digitalisierten Oberflächen gemäß Abbildung 8.1 und Abbildung 8.2. Der Radius der Kugelelektrode wird jeweils mit $R = 1,5 \text{ mm}$, $R = 2,5 \text{ mm}$ und $R = 3,5 \text{ mm}$ angenommen. Die iterative Bestimmung der Druckverteilung geschieht über die CG-Methode unter Verwendung des DC-FFT-Verfahrens. Abbildung 8.11 zeigt die Abhängigkeit des errechneten Engewiderstandes von der Kontaktnormalkraft. Aus Abbildung 8.11 kann jedoch keine signifikante Abhängigkeit der Widerstandswerte vom Kontaktradius abgeleitet werden. Noch deutlicher wird dies bei Betrachtung der in Abbildung 8.12 gezeigten Kennlinien. Hier wird die Anzahl der a-Spots in Abhängigkeit von der Kontaktnormalkraft und des Radius der Kugelelektrode geplottet. Die Regressionen der jeweiligen Kennlinien sind nahezu identisch.

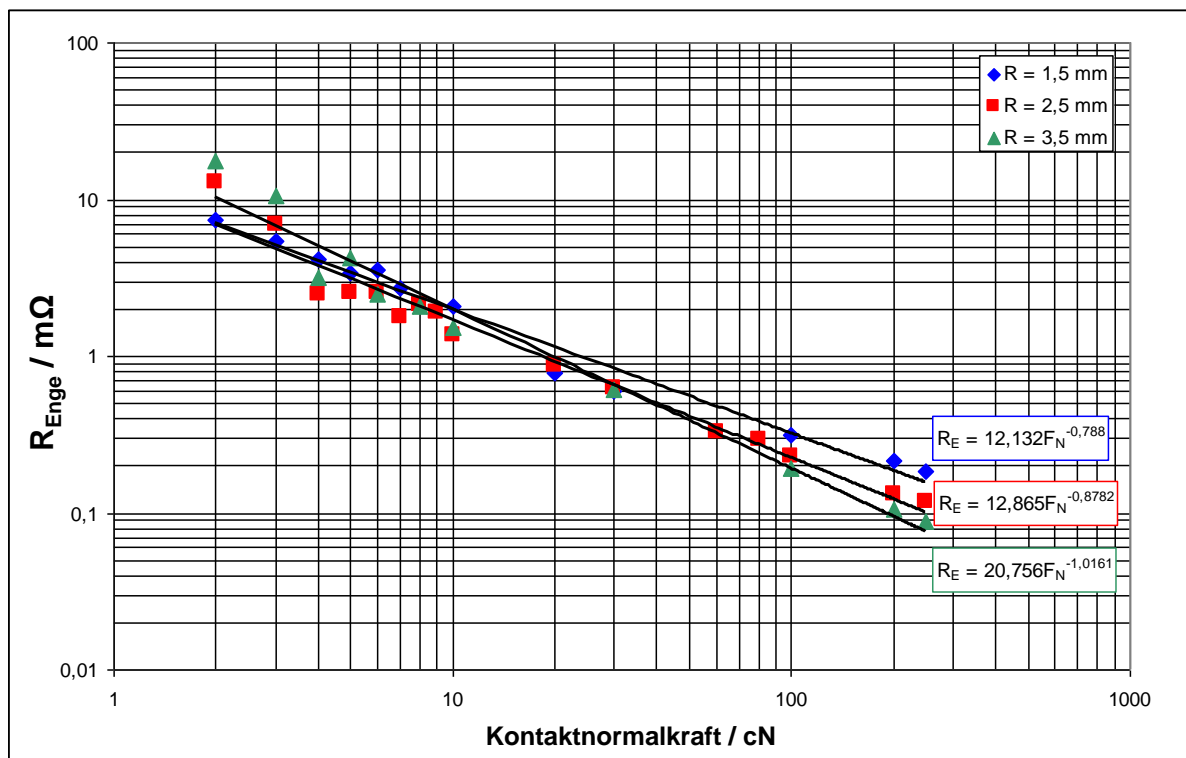


Abbildung 8.11: Engewiderstand in Abhängigkeit von der Kontaktnormalkraft, bei unterschiedlichen Kontaktradien

Der Unterschied der simulierten Werte mit den charakteristischen Kennwerten der Hertz'schen Theorie lässt sich an Hand Tabelle 8.7 vergleichen. Für den Fall einer Normalkraftbelastung von 1 N sind hier einige Kennwerte gegenübergestellt. Ein Vergleich der Werte des Engewiderstandes zeigt nur marginale Unterschiede. Sowohl die aus der Holm'schen Näherungsformel, als auch die aus der Simulation berechneten Werte, zeigen mit größer werdendem Kontaktradius eine leicht fallende Tendenz.

Tabelle 8.7: Vergleich zwischen den charakteristischen Kontaktkennwerten aus der Simulation bzw. der Hertz'schen Theorie bei einer Kontaktnormalkraft von 1 N.

Kennwert	R = 1,5 mm		R = 2,5 mm		R = 3,5 mm		Einheit
	Simuliert	Hertz	Simuliert	Hertz	Simuliert	Hertz	
R_E	0,31	0,43	0,25	0,36	0,19	0,32	m Ω
# a-Spots	286	973	265	1318	327	1674	
Kontaktfläche	635	2084	588	2928	715	3661	mm ²
Max Flächenpressung	4313	719	5538	512	4197	409	MPa

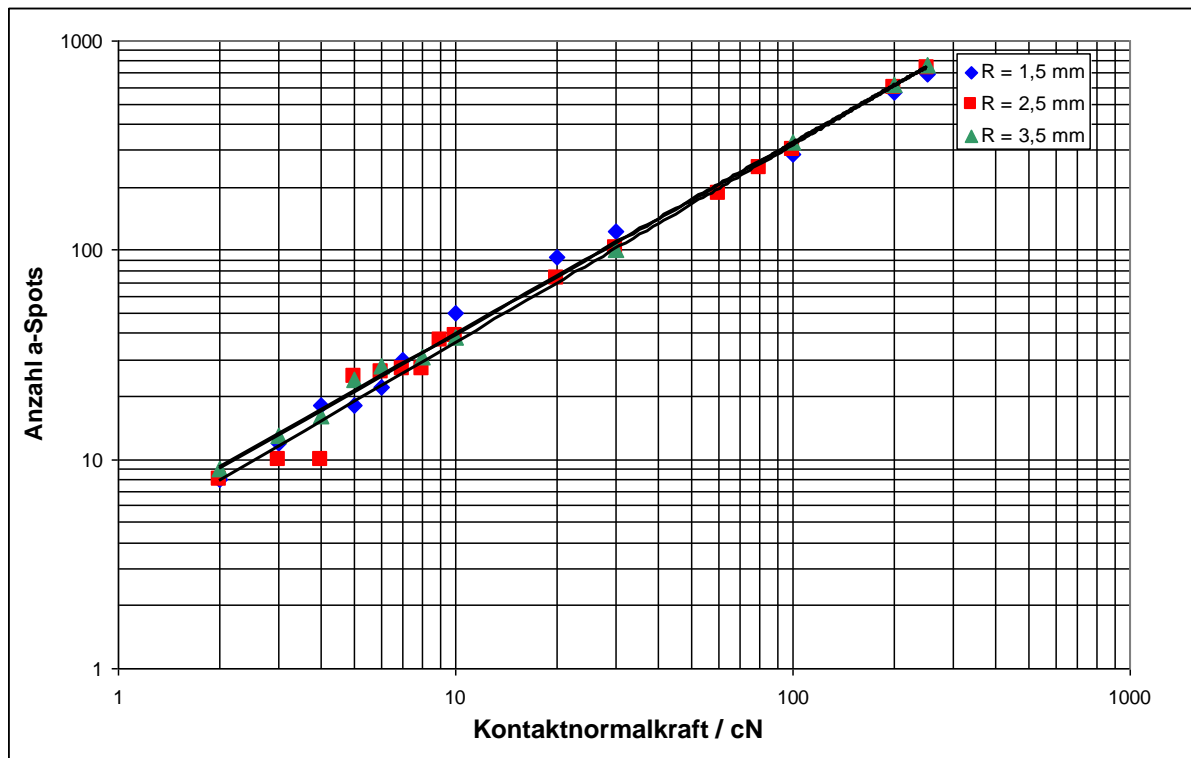


Abbildung 8.12: Anzahl a-Spots in Abhängigkeit von der Kontaktnormalkraft bei unterschiedlichen Kontaktradien.

Die in Tabelle 8.7 angegebene Anzahl a-Spots für den Hertz'schen Fall ergibt sich aus der entsprechenden Kontaktfläche, dividiert durch die Fläche einer Rechengitter-Masche ($\Delta x \Delta y$). Die aus der Hertz'schen Theorie resultierende Fläche ergibt eine mehrfach größere Fläche, als es sich aus der Summe der simulierten a-Spots ergibt. Die Bildfolge in Abbildung 8.13 a. bis c. relativiert jedoch diesen Eindruck. Die dargestellten Bereiche zeigen in x- und y-Richtung eine Ausdehnung von ~ 190 μm . Die innere kreisförmige Fläche zeigt maßstäblich den aus der Hertz Theorie vorhergesagten Kontaktbereich. Der äußere Umkreis umschließt die lateral verteilten a-Spots. Die a-Spots sind auf Grund der Oberflächenrauheit der Kontaktpartner und als Folge der plastischen Deformationen auf einen

größeren Bereich verteilt als die eigentliche Hertz-Fläche. Während dieser Bereich mit dem Kontaktradius kaum variiert, zeigt die Hertz-Fläche die in Tabelle 8.7 gegebene Abhängigkeit. Das Verhältnis zwischen der effektiven, durch die a-Spots gegebenen Fläche, sinkt von 29% bei einem Kontaktradius von 1,5 mm auf 19% bei einem Kontaktradius von $R=3,5$ mm. Dies stimmt mit den allgemein anerkannten Aussagen in der Fachliteratur (z.B. [81][149][162][30]) überein. Die Tatsache, dass die effektive (wahre Kontaktfläche) nur einen Bruchteil der Hertz'schen Kontaktfläche darstellt, kann sehr gut mit der Verteilung der punktuellen Belastungen auf der Kontaktoberfläche erklärt werden.

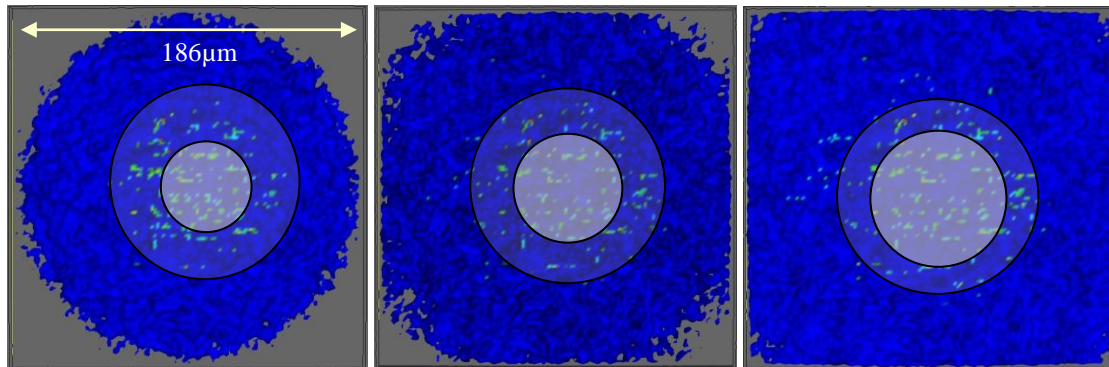


Abbildung 8.13 a. – c.: Verteilung der a-Spots bei unterschiedlichen Kontaktradien der Kugelelektrode;
a.: 1,5 mm; b.: 2,5 mm; c.: 3,5 mm. Mittlere schraffierte Fläche entspricht Hertz'scher Kontaktfläche.

Ein Vergleich der in Tabelle 8.7 aufgeführten maximalen Flächenpressung zeigt deutlich den prinzipiellen Unterschied. Auf Grund des eingerechneten Spannungshärtens der a-Spots, nehmen die individuellen Berührungspunkte deutlich mehr Kraft auf, als durch die Hertz'sche Theorie vorhergesagt. Hierdurch genügt eine deutlich geringere Berührungsfläche um die Kontaktnormalkraft aufzunehmen. Während bei der Hertz'schen Theorie die Druckverteilung eine rein elliptische bzw. kreisförmige und homogene Verteilung analog zu Glg. (8.7) besitzt, so ist die Druckverteilung auf einer rauen Oberfläche, durch deren statistischen Charakteristik bedingt.

$$P(x, y) = P_{\max} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \quad (8.7)$$

Abbildung 8.14 zeigt exemplarisch die Häufigkeitsverteilung der punktuellen Belastung auf der Kontaktoberfläche bei einer Kontaktnormalkraft von 1 N. Basierend auf dem obigen Kontaktmodell (Tabelle 8.1, Tabelle 8.2 und Tabelle 8.3) wird für den Fall $R=2,5$ mm die Hertz'sche mit der simulierten Druckverteilung dargestellt. Die rauen Oberflächen werden mit $\sigma=0,2$ µm gerechnet. Sehr deutlich ist hier zu erkennen, dass bei einem Hertz'schen Kontakt eine große Anzahl von lückenlos zusammenhängenden Flächenelementen (1318) einen Druck von nur einigen hundert MPa aufnehmen. Im Falle einer rauen Oberfläche, steht eine weitaus geringere Anzahl a-Spots (265) zur Verfügung um die gleiche Kontaktnormalkraft aufnehmen, was eine deutliche höhere Flächenpressung pro Element ergibt.

Abschließend kann für das hier durchgerechnete Fallbeispiel keine deutliche Abhängigkeit des Engewiderstandes vom Kontaktradius abgeleitet werden. Ob diese Behauptung auch für den Fall

zweier sphärischer Kontakte bzw. unterschiedlichen Topographien gilt, bedarf weiterer Untersuchungen im Anschluss an diese Arbeit.

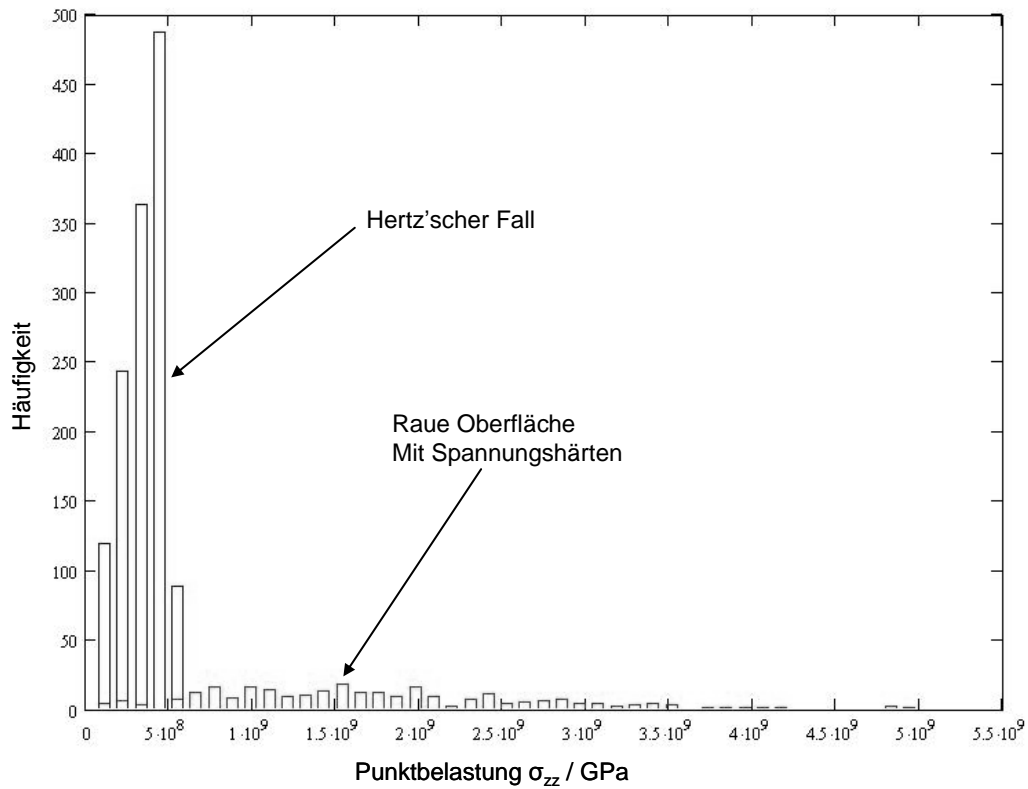


Abbildung 8.14: Häufigkeitsverteilung der Punktkräfte für den Hertz'schen Fall und den Fall zweier rauer Oberflächen bei einer Kontaktnormalkraft von 1 N und $R=2,5$ mm.

8.1.5 Abhängigkeit des Engwiderstandes von der Oberflächenbeschichtung

Nachfolgend soll die Anwendbarkeit der in dieser Arbeit entwickelten Simulationsalgorithmen auf unterschiedliche Kontaktbeschichtungen getestet werden. Als Basis dienen Messreihen, die mit der in Kapitel 5.2 beschriebenen Messapparatur bei Tyco, Standort Bensheim, durchgeführt wurden. Die Beschaltung der Kontakte erfolgt gemäß Abbildung 5.8. Bei der Modellierung des Messkontaktes wird auf eine gemessene Oberfläche (siehe Abbildung 8.15) zurückgegriffen. Die Maschenweite in x/y-Richtung ist so skaliert, dass sich wie in den vorhergegangenen Beispielen, eine laterale Ausdehnung von $\sim 190 \mu\text{m}$ ergibt. Bei einer Punktezahl von 128×128 errechnet sich somit eine Maschenweite von $1,459 \mu\text{m}$. Die Topographie des Flachkontaktes (Abbildung 8.16) ergibt sich gemäß den in Tabelle 8.8 aufgelisteten Parametern.

Tabelle 8.8: Parameter zur Oberflächensimulation mittels „FIR“-Filter

Parameter	Messsonde (digitalisiert)	Flachkontakt	Einheit
σ	0,28	0,2	μm
Wölbigkeit	7.22	3	
Schiefe	0.8	0	
Autokorrelationsform	Exponentiell	Linear	
β_x	6	5	Punkte
β_y	6	20	Punkte
R_1	1.5	1000	mm
R_2	1.5	1000	mm
Seed	-	2	
N_x / N_y	128 / 128	128 / 128	

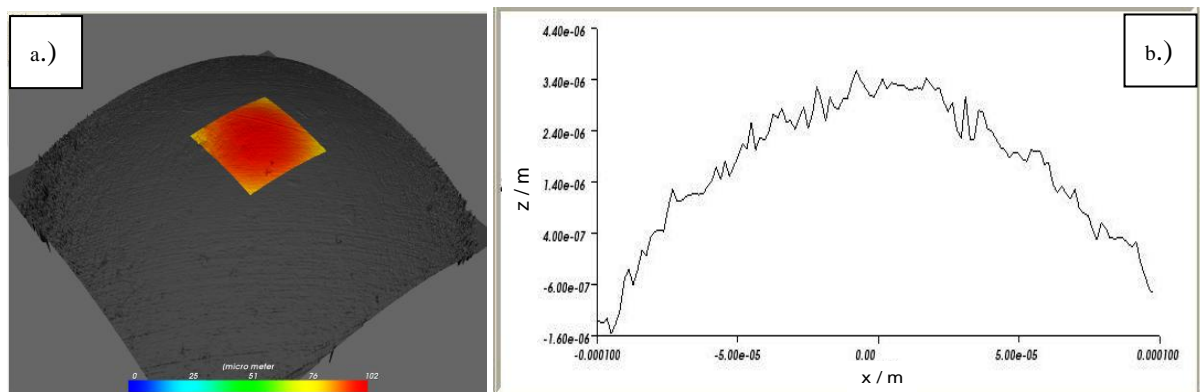


Abbildung 8.15: Digitalisierte Oberfläche des Messkontaktes. a. Hervorgehobener Bereich wird zur Simulation verwendet; b. Linienscan durch Kontaktmitte (hervorgehobener Bereich)

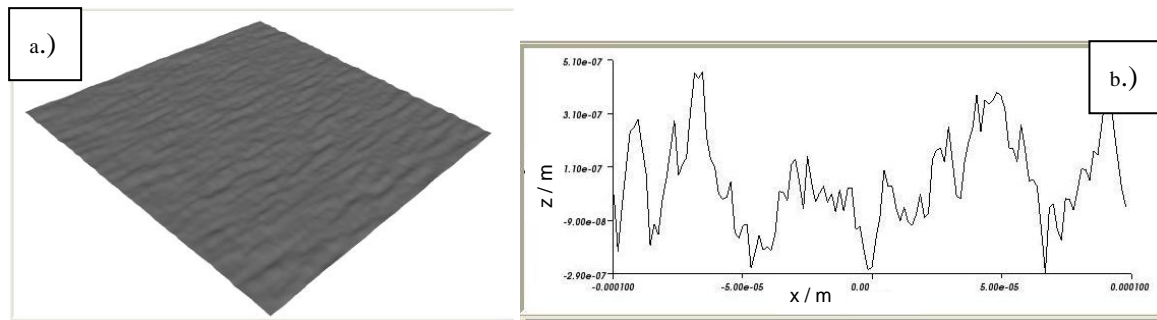


Abbildung 8.16: Simulierter Flachkontakt gemäß Tabelle 8.8; a. 3D-Darstellung;
b. Linienscan durch Kontaktmitte

Tabelle 8.9 zeigt die mechanischen und elektrischen Kennwerte der untersuchten Materialien. Die iterative Bestimmung der Druckverteilung erfolgt über die CG-Methode unter Verwendung des DC-FFT-Verfahrens.

Tabelle 8.9: Verwendete mechanische und elektrische Kenngrößen der Kontaktmaterialien

	Au (hart)	Ag	Sn	Ni	CuNiSiP	CuSn6	
E	78	82	49,9	199	135	118	GPa
ν	0,32	0,32	0,32	0,32	0,32	0,32	
Y	200	120	14,4	660	520	560	MPa
ρ	2,2 (2,57)	1,63	12,6	6,9	2,9	12,28	$10^{-8} \Omega m$

Gemessen wurden drei unterschiedliche Beschichtungsfolgen:

1. Gold über Nickel auf Stol76²⁵
2. Silber über Nickel auf Stol76
3. Feuerverzinnung auf Stol76

Bei dem Messkontakt handelt es sich um eine goldbeschichtete Elektrode²⁶ mit $R=1,5$ mm. Da genaue Angaben fehlen, wird beim Messkontakt im Falle der Gold- und Silberoberflächen eine Goldschichtdicke $1,5 \mu m$ angesetzt. Als Grundmaterial wird CuSn6 angenommen. Bei den Zinnoberflächen wird mit einer reinen Gold-Elektrode gerechnet.

²⁵ Handelsbezeichnung Stolberger Metallwerk (KME)

²⁶ Angabe Tyco Electronics Messlabor Bensheim

8.1.5.1 Vergoldete Oberflächen

Tabelle 8.10 zeigt den zur Simulation verwendeten Schichtaufbau. Da die Software nur zwischen symmetrischen Drei- und Zweifachschichtensystemen unterscheidet, wird mit einer „Dummy“-Zwischenschicht beim Messkontakt gerechnet. Hierbei werden die Materialparameter des Grundmaterials eingesetzt. Unter der Annahme eines durch Grundmaterial und Messapparatur bedingten Offset-Widerstandes von $0,1 \text{ m}\Omega$, ergibt sich das in Abbildung 8.17 gezeigte Bild.

Tabelle 8.10: Beschichtungsabfolge der Kontaktpaarung.

	Flachkontakt	Messkontakt
Deckschicht	$0,87 \text{ }\mu\text{m Au}$	$1,5 \text{ }\mu\text{m Au}$
Zwischenbeschichtung	$1,27 \text{ }\mu\text{m Ni}$	$1,0 \text{ }\mu\text{m CuSn6}$
Grundmaterial	$(6 \text{ }\mu\text{m}) \text{ CuNiSiP}$	$(6 \text{ }\mu\text{m}) \text{ CuSn6}$

Die simulierten Widerstandswerte liegen generell leicht unter den gemessenen Werten. An Hand der doppelt logarithmischen Darstellung der Werte, ist jedoch sehr gut zu erkennen, dass die Regression der simulierten Werte die gleiche Steigung wie die Messwerte besitzt. Hieraus kann gefolgert werden, dass die angewendete Härtekennlinie gemäß Glg. (7.16) die realen Verhältnisse sehr gut beschreibt. Eine Parallelverschiebung (log/log Darstellung) der simulierten Werte kann durch eine Anpassung der Widerstandskennwerte der zu Grunde liegenden Materialien erzielt werden (siehe hierzu auch Abbildung 8.19). Laut praktischen Erfahrungen bei Tyco Electronics ist der spezifische Widerstand einer Hart-Gold-Beschichtung, auf Grund der Kobalt-Zulegierungen höher anzusetzen, als bei reinem Goldmaterial.

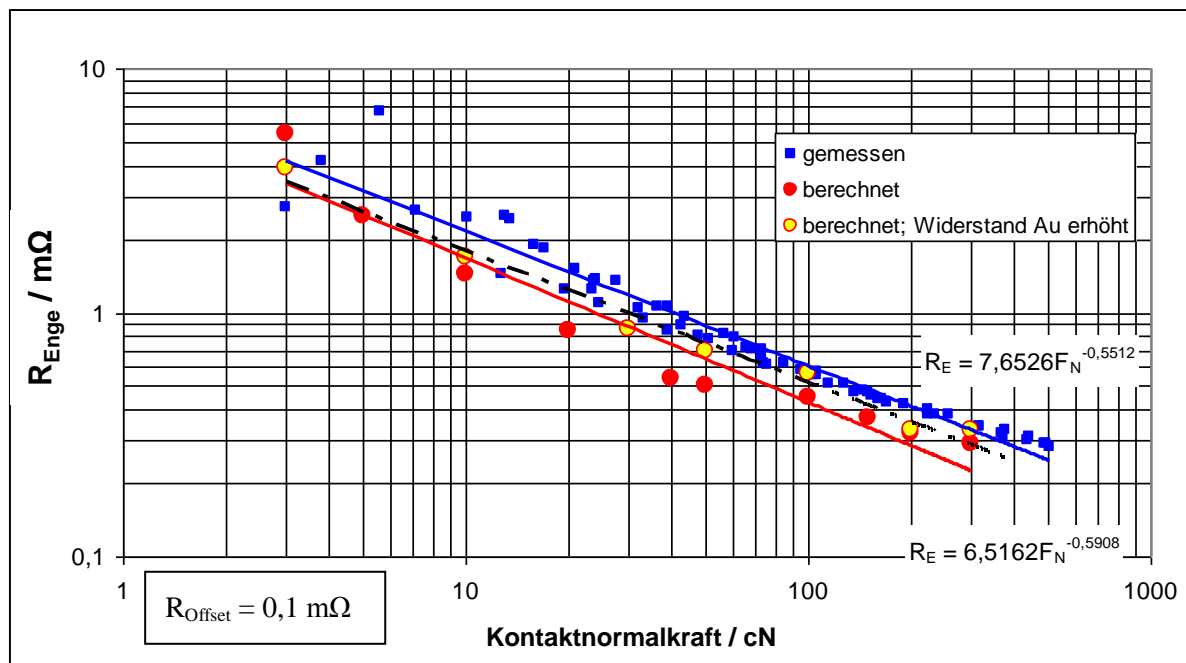


Abbildung 8.17: Vergleich des errechneten mit dem gemessenen Kontaktübergangswiderstand goldbeschichteter Kontakte. Der Bahnwiderstand (Grundmaterial plus Messapparatur) wird als konstanter Offset von $0,1 \text{ m}\Omega$ angenommen.

Vergleicht man die in Abbildung 8.17 dargestellten Parameter der Regressionsfunktionen, so ergibt sich das Verhältnis der entsprechenden Proportionalitätsfaktoren als $7,6/6,5=1,16$. Eine rechnerische Erhöhung des spezifischen Widerstandes der Hartgoldschicht um 16% auf $2,6 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ ergibt die in Abbildung 8.17 durch Kreise dargestellten Rechenwerte. Die errechneten Werte repräsentieren nun sehr gut die Messwerte. Zumal hier noch einmal erwähnt werden muss, dass im Falle des Flachkontaktes die wahre Oberfläche nicht vorliegt und auf eine simulierte Oberfläche zurückgegriffen wird.

Abbildung 8.18 zeigt die Potentialverteilung im Innern der Kontaktpartner an Hand der x/z-Schnittebenen durch den Kontaktmittelpunkt. Die 3D-Darstellung zeigt sehr gut den unterschiedlich starken Potentialabfall auf Grund der unterschiedlichen Materialien. Während Gold den flachsten Verlauf zeigt, ist die schlechter leitende Nickel-Zwischenschicht an dem steilen Verlauf zu erkennen. Die Phosphorbronz (CuSn₆) zeigt aus dem gleichen Grunde einen stärkeren Potentialabfall wie das Grundmaterial des Fachkontaktes (Stol76). Durch die Engstellen der a-Spots ist direkt an der Berührungsfläche der Kontaktpartner der stärkste Potentialgradient erkennbar.

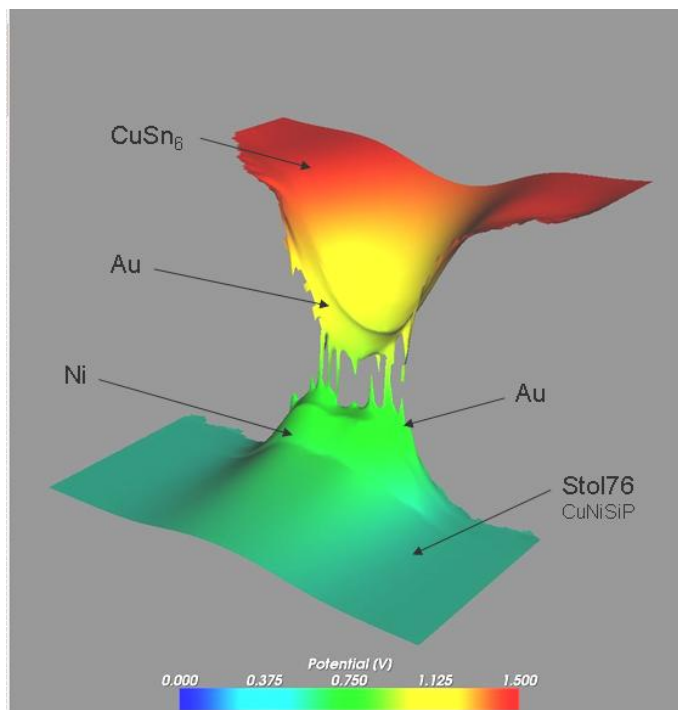


Abbildung 8.18: Potentialverteilung der x/z Schnittebene mittig durch den Kontaktpunkt.

8.1.5.2 Versilberte Oberflächen

Tabelle 8.11 zeigt den Schichtaufbau der versilberten Kontakte. Wie in Tabelle 8.9 ersichtlich, wird Silber mit einem fast identischen E-Modul wie Gold gelistet. Die Festigkeit wird geringer als die von Gold angesetzt. Der spezifische Widerstand liegt unterhalb von Gold und der hoch leitfähigen Kupfer Legierung. Wie in Abbildung 8.19 ersichtlich, stimmen die errechneten Kontaktwiderstände im Normalkraftbereich 0,05 N und 1 N mit den Messwerten überein.

Tabelle 8.11: Beschichtungsabfolge der Kontaktpaarung.

	Flachkontakt	Kugelkontakt
Deckschicht	1 μm Ag	1,5 μm Au
Zwischenbeschichtung	1,27 μm Ni	1,0 μm CuSn6
Grundmaterial	(6 μm) CuNiSiP	(6 μm) CuSn6

Die Näherungsfunktion der simulierten Werte zeigt in der doppeltlogarithmischen Darstellung die gleiche Steigung wie die Messwerteverteilung.

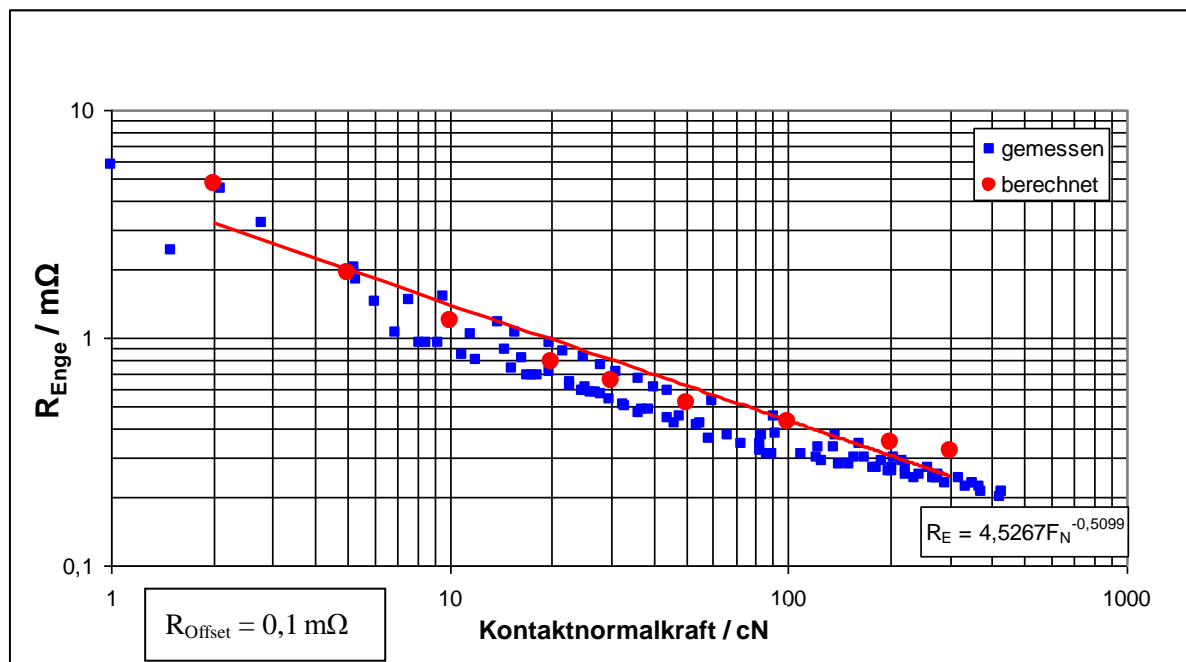


Abbildung 8.19: Vergleich des errechneten mit dem gemessenen Kontaktübergangswiderstand silberbeschichteter Kontakte. Der Bahnwiderstand (Grundmaterial plus Messapparatur) wird als konstanter Offset von 0.1 mΩ angenommen.

Im Vergleich der Exponenten der Regressionsfunktionen der versilberten bzw. vergoldeten Kontaktsysteme bestätigt die in Kapitel 8.1.5.1 gemachte Aussage, dass eine Änderung des Widerstandes der Kontaktmaterialien bei gleichen mechanischen Kennwerten, zu einer Parallelverschiebung der Regressionsgeraden in der doppeltlogarithmischen Darstellung führt. Die Proportionalitätsfaktoren der Regressionsfunktionen verhalten sich wie $6,5 / 4,2 = 1,54$. Dies entspricht in etwa dem gleichen Verhältnis wie die spezifischen Widerstände ($2,2 / 1,63 = 1,35$). Abbildung 8.20 zeigt analog zu Abbil-

dung 8.19 die Potentialverteilung an Hand der x/z-Schnittebenen durch den Kontaktpunkt. Hier gilt das Gleiche wie bereits im vorhergehenden Abschnitt festgestellt. Sehr gut ist der unterschiedliche Potentialgradient über die Schichtgrenzen hinweg zu sehen.

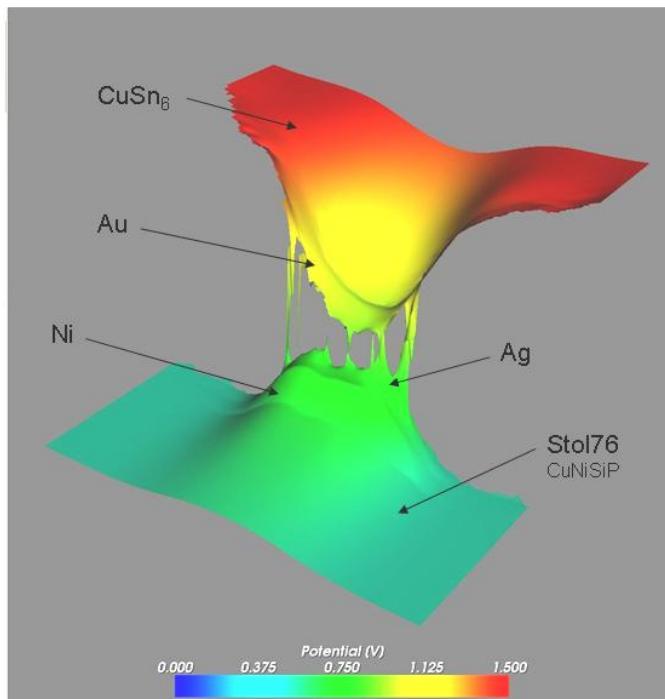


Abbildung 8.20: Potentialverteilung der x/z Schnittebene mittig durch den Kontaktpunkt.

8.1.5.3 Verzinnte Oberflächen

Nachfolgende Tabelle 8.12 zeigt den Schichtaufbau, wie er zur Berechnung der Widerstandskennlinien des feuerverzinnnten Kontaktes verwendet wird. Um auch die Randbedingungen des iterativen Algorithmus zur Berechnung der elektrischen Kennwerte weiter zu testen, wird der Flachkontakt als Dreischichtsystem aufgebaut. Deckschicht und virtuelle Zwischenschicht werden jeweils durch eine Zinnschicht von je 1,0 μm Dicke repräsentiert. Der Messkontakt besteht aus drei unterschiedlich dicken Goldschichten.

Tabelle 8.12: Beschichtungsabfolge der Kontaktpaarung.

	Flachkontakt	Kugelkontakt
Deckschicht	1,0 μm Sn	1,5 μm Au
Zwischenbeschichtung	1,0 μm Sn	1,0 μm Au
Grundmaterial	(6 μm) CuNiSi	(6 μm) Au

Der Einfachheit halber werden keine intermetallischen Zonen im Zinnschichtsystem angenommen. Im Unterschied zu den zuvor untersuchten Gold- und Silberoberflächen handelt es sich bei Zinn um ein unedles Kontaktmaterial (siehe auch Kapitel 3.2.1 und 3.2.2). Dies bedeutet, dass die Kontaktoberfläche mit einer isolierenden, wenige 10 nm dicken und harten Zinnoxidschicht bedeckt ist. Solche Deckschichten sind jedoch zurzeit nicht in den Rechenalgorithmen für die Druck- bzw. Potentialverteilung implementiert. Vergleicht man an Hand Abbildung 8.21 die simulierten Widerstandswerte

(Dreieck Symbole) mit den Messwerten (Vierecke), so liegen die errechneten Werte etwa um den Faktor 5 darunter.

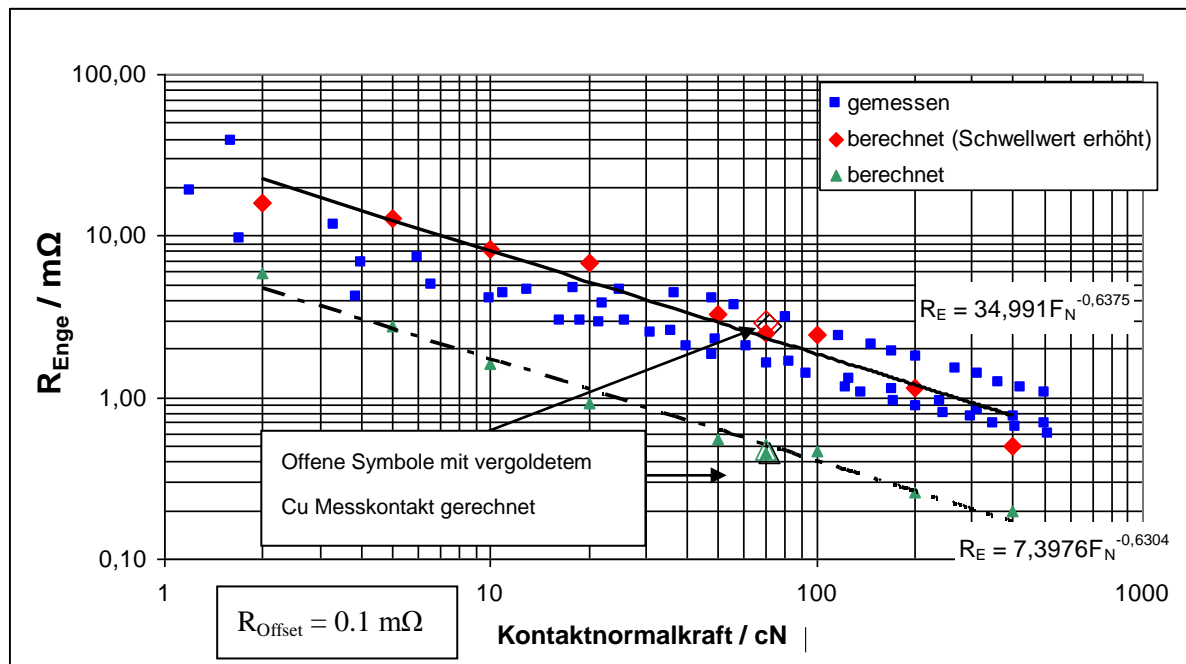


Abbildung 8.21: Vergleich des errechneten mit dem gemessenen Kontaktübergangswiderstand verzinnter Kontakte. Der Bahnwiderstand (Grundmaterial plus Messapparatur) wird als konstanter Offset von 0,1 mΩ angenommen.

Die Tatsache, dass hier mit einem reinen Goldkontakt als Messsonde gerechnet wurde, kann nicht als Erklärung herangezogen werden. Eine Kontrollrechnung mit einem Messkontakt gleichen Aufbaus wie aus den beiden vorhergehenden Kapiteln (offene Symbole), ergibt einen vernachlässigbaren Unterschied. Die Begründung der hohen Messwerte muss in der Oxidschicht zu suchen sein. Die harte Oxidschicht wird von den anliegenden Punktkräften nicht immer durchdrungen und bildet eine tragende und isolierende Trennschicht. Berührungspunkte, deren Trennschicht eine Dicke von wenigen Nanometern aufweisen, können wie in Kapitel 2.2 aufgezeigt, auf Grund von Tunneleffekten zum Stromfluss beitragen. Diese Effekte können jedoch zum jetzigen Stand der Arbeit nicht berücksichtigt werden. Für die Beschreibung der Oxidschichten können verschiedenen Ansätze betrachtet werden.

1. Einschnürung der a-Spots mit einem Flächenfaktor
2. Generation von a-Spots in Folge von Scherspannungen
3. Begrenzung der a-Spots auf Grund eines Minimaldruckes

Letztere Vorgehensweise versucht den Effekt einer harten dünnen Deckschicht anzunähern. Hierbei wird die Variable Threshold (siehe auch Kapitel 7.3.1 bzw. Anhang 16) so gesetzt, dass nur Punkte ab einer Punktbelastung größer dieser Schwelle, die zum Durchdringen der Oxidschicht ausreicht, als a-Spot betrachtet werden²⁷. Eine Simulationsreihe mit einem Schwellwert von 7 GPa (Default

²⁷ hierbei wird die unbeschränkte plastische Druckverteilung siehe auch Kapitel 6.2.4.3 herangezogen.

Threshold = 100 MPa) ergibt die in Abbildung 8.21 durch Rauten symbolisierten Werte. Bei beiden Simulationsfolgen wird ein Offset von 0,1 m Ω zu Grunde gelegt. Der daraus resultierende Effekt kann sehr gut an Hand Abbildung 8.22 a. und b. veranschaulicht werden.

Für den Fall einer für Zinn-Kontakte typischen Normalkraft von 2 N ist die Potentialverteilung der x/z-Schnittebene durch die Kontaktmitte dargestellt. In Abbildung 8.22 a. ist die homogene Schichtstruktur des Gold-Kontaktes sehr gut zu erkennen. Auch der Bereich der beiden Zinnschichten zeigt keinen Sprung im Potentialgradienten. Der Übergang zum gut leitenden Grundmaterial (Stol76) zur Zinn-Deckschicht ist deutlich ausgebildet und spiegelt die Unterschiede in der Leitfähigkeit wieder. Fast der komplette Potentialabfall findet im Bereich der Verzinnung statt. Auf Grund der Normalkraft von 2 N und des im Vergleich zu Gold sehr weichen Zinns bilden sich Bereiche aus, in welchen einzelne a-Spots verschmelzen.

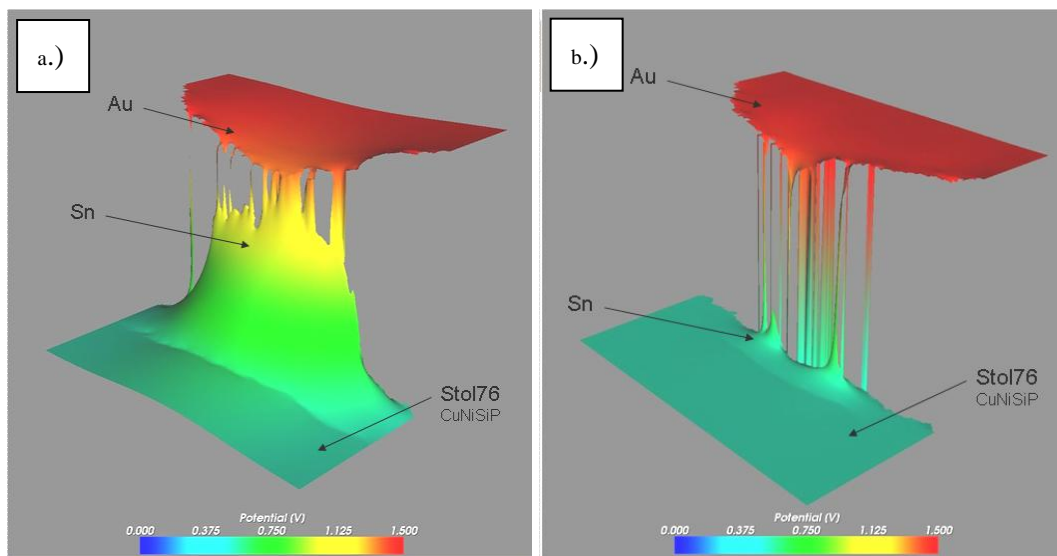


Abbildung 8.22: Potentialverteilung der x/z Schnittebene mittig durch den Kontaktpunkt;

a.: Default Threshold; b.: Threshold auf 7 GPa erhöht; Kontaktnormalkraft 2 N.

Bei Abbildung 8.22 b. liegt die gleiche mechanische Deformation zu Grunde. Es werden jedoch nicht alle Berührungspunkte bei der iterativen Berechnung der Potentialverteilung mit in Betracht gezogen. Hierdurch ergibt sich ein Bild, ähnlich wie in Tabelle 8.6, für einen Potentialverteilung geringer Kontaktnormalkraft.

8.2 Abhängigkeit der mechanischen Kontaktbelastung von der Schichtabfolge

Um den Einfluss der Beschichtungsabfolge auf die mechanische Belastung abzuschätzen, werden zwei elliptische Kontakte untersucht. Die Simulation der Topographie erfolgt mittels FIR-Filter (siehe Kapitel 6.1.3). Die entsprechenden Parameter sind in Tabelle 8.13 gelistet. Neben einer reinen Normalbelastung wird der Einfluss einer Scherkraft in x-Richtung gemäß Glg. (7.6) analysiert. Der Reibkoeffizient wurde hierbei mit $\mu=0,3$ angenommen, was für Goldoberflächen der praktischen Erfahrung entspricht. Die untersuchten Kontaktsysteme entsprechen hinsichtlich der Oberflächenbeschichtung ebenfalls den gängigen Varianten.

Tabelle 8.13: Parameter zur Oberflächensimulation mittels FIR-Filter

Parameter	Kontakt 1	Kontakt 2	Einheit
σ	0,2	0,2	μm
Wölbigkeit	3	3	
Schiefe	0	0	
Autokorrelationsform	Exponentiell	Linear	
β_x	5	5	Punkte
β_y	20	20	Punkte
R_1	2	3	mm
R_2	3	2	mm
Seed	1	2	
N_x / N_y	128 / 128		

8.2.1 Vergoldete Oberflächen

Nachfolgende Tabelle 8.14 zeigt den Aufbau einer typischen Kontaktpaarung mit vergoldeter Oberfläche. Gelistet ist ein Dreischichtsystem mit einer Standard Nickel-Zwischenschicht und Phosphorbronze als Grundmaterial. Die mechanischen Kennwerte sind in Tabelle 8.9 aufgeführt.

Tabelle 8.14: Beschichtungsabfolge der Kontaktpaarung.

	Kontakt 1	Kontakt 2
Deckschicht	0,87 μm Au	0,87 μm Au
Zwischenbeschichtung	1,27 μm Ni	1,27 μm Ni
Grundmaterial	(6 μm) CuSn6	(6 μm) CuSn6

Als Normalkraft wurde ein für Goldkontakte typischer Wert von $F_N=1\text{ N}$ angesetzt. Abbildung 8.23 a. und b. zeigt den „von-Mises-Stress“ gemäß Glg. (7.21) für eine reine Normalbelastung (a.) bzw. mit einer zusätzlichen Scherkraft. Dargestellt ist die x/z-Schnittebene durch den Kontaktmittelpunkt. Die farbliche Darstellung ist so skaliert, dass rote Bereiche plastisch beanspruchte Zonen darstellen. In der Schnittdarstellung ist sehr gut zu erkennen, dass auf Grund der deutlich höheren Bruchfestigkeit des Nickels, der „von-Mises-Stress“ nicht in die Zwischenschicht eindringt. Innerhalb der Deckschicht sind die plastischen Bereiche auf die unmittelbare Umgebung einiger (nicht aller) a-Spots begrenzt. Bei einer reinen Normalbelastung sind die plastischen Bereiche direkt unter der Oberfläche zu finden (siehe auch Tabelle 7.18) und von elastisch beanspruchten Zonen umfasst. Dies verhindert ein Wegfließen des Materials. Bei einer zusätzlichen Scherbeanspruchung erreichen die plastischen Zonen jedoch die Oberfläche.

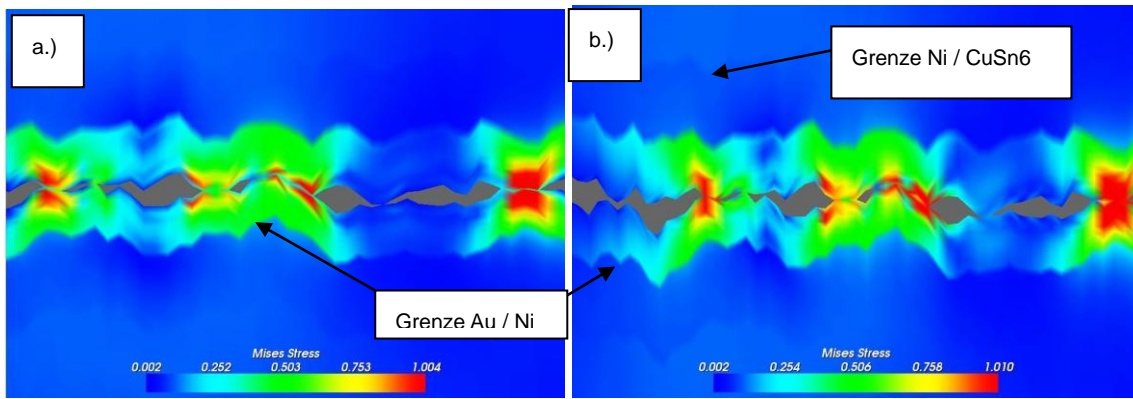


Abbildung 8.23 a. – b.: Von-Mises-Stress eines Au/Ni/CuSn6 Systems an Hand einer x/z-Schnittebene durch die Kontaktmitte; a.: Reine Normalbelastung ($F_N=1$ N); b.: Mit zusätzlicher Scherkraft ($\mu=0,3$).

Diese Tatsache ist sehr gut an Hand Abbildung 8.24 a. und b. erkennbar. Hier gilt die gleiche Farbskalierung wie zuvor. Während in Abbildung 8.24 a. keinerlei plastische Bereiche erkennbar sind, treten diese jedoch beim Vorhandensein einer Scherkraft in Abbildung 8.24 b. deutlich zu Tage.

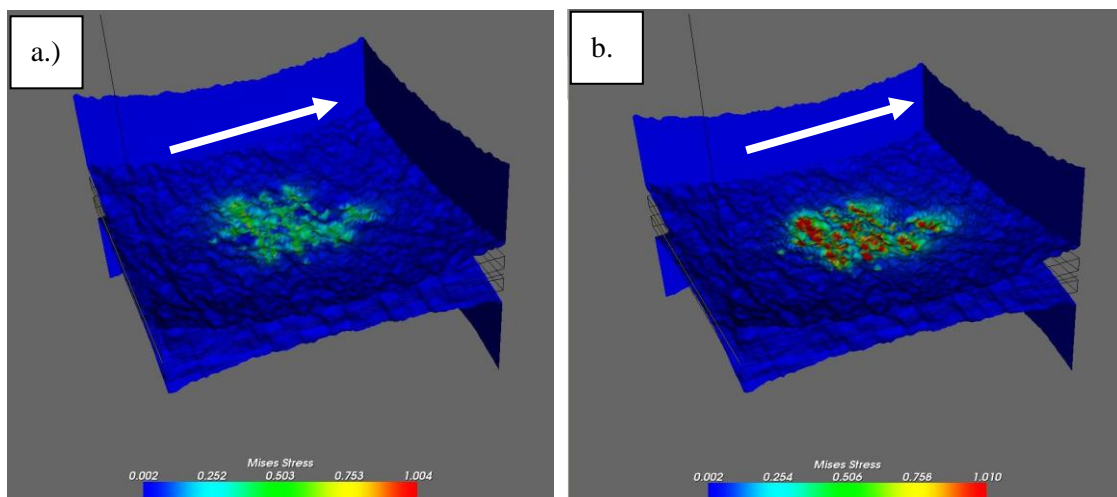


Abbildung 8.24 a. – b.: Von-Mises-Stress eines Au/Ni/CuSn6 Systems auf der Kontaktoberfläche; a.: Reine Normalbelastung ($F_N=1$ N); b.: Mit zusätzlicher Scherkraft ($\mu=0,3$) in Pfeilrichtung.

Bei einer rein statischen Belastung nehmen die plastischen und elastischen Bereiche die komplette Flächenpressung der Kontaktoberfläche auf. Durch die noch immer vorhandenen elastischen Bereiche kommt es zu keinem Materialfließen. Da die plastischen Zonen jedoch nicht mehr allseitig von elastisch beanspruchten Zonen umgeben sind, kommt es bei einer Relativbewegung der Kontakte zur Ausbildung einer Steckspur.

8.2.2 Versilberte Oberflächen

Tabelle 8.15 zeigt den Schichtaufbau des Silber-Kontaktpaares. Gegenüber der Goldvariante ist hier eine etwas höhere Schichtdicke von 1 μm gewählt. Die Kontaktnormalkraft beträgt wieder 1 N. Als Reibkoeffizient ist ein Wert von $\mu=0.3$ angesetzt.

Tabelle 8.15: Beschichtungsabfolge der Kontaktpaarung.

	Kontakt 1	Kontakt 2
Deckschicht	1,0 μm Ag	1,0 μm Ag
Zwischenbeschichtung	1,27 μm Ni	1,27 μm Ni
Grundmaterial	(6 μm) CuSn6	(6 μm) CuSn6

Ein Vergleich der in Tabelle 8.9 aufgeführten Druckfestigkeitswerte zeigt mit $Y=120$ MPa einen gegenüber Gold ($Y=200$ MPa) um 40% geringeren Wert. Dies führt dazu, dass die plastischen Zonen teilweise bis an die Grenze zur Zwischenschicht reichen. Abbildung 8.25 a. und b. zeigt an Hand einer x/z-Schnittebene durch die Kontaktmitte die von-Mises-Stress-Verteilung beider Lastfälle. Die Farbskalierung ist die Gleiche wie in Abbildung 8.23.

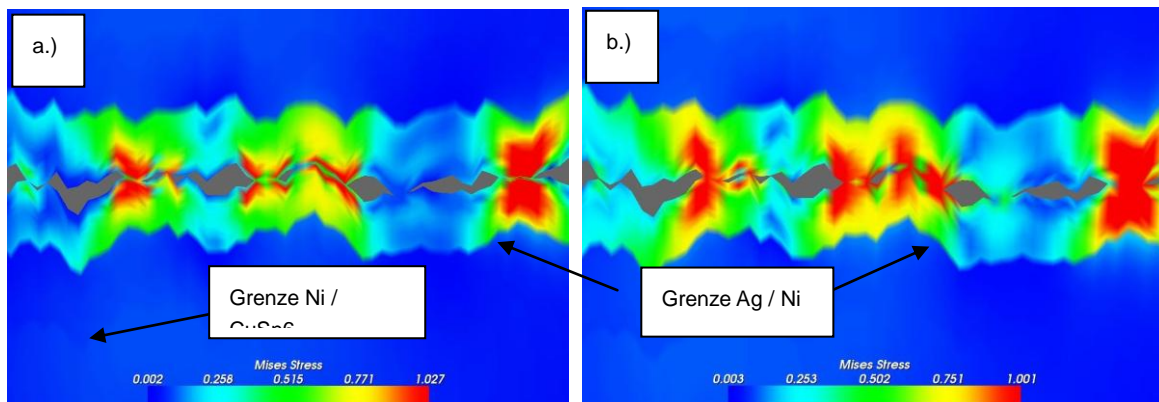


Abbildung 8.25 a. – b.: Von-Mises-Stress eines Ag/Ni/CuSn6 Systems an Hand einer x/z-Schnittebene durch die Kontaktmitte; a.: Reine Normalbelastung ($F_N=1$ N); b.: Mit zusätzlicher Scherkraft ($\mu=0,5$).

Es ist deutlich zu sehen, dass die hohen Stresswerte deutlich tiefer in die Deckschicht eindringen als bei der Goldvariante. Während bei den goldbeschichteten Kontakten selbst bei zusätzlicher Scherbeanspruchung keine von-Mises-Stress-Werte >0.5 an der Grenze zur Unternickelung festzustellen sind, sind bei den versilberten Kontakten schon bei reiner Normalbelastung Werte >0.75 erkennbar. Abbildung 8.26 a. und b. zeigt die entsprechende von-Mises-Stress-Verteilung auf der Kontaktoberfläche. Auch hier ist wieder deutlich zu erkennen, dass bei einer reinen Normalbelastung nur sehr wenige a-Spots bis zur Plastizitätsgrenze belastet sind. Dies ändert sich jedoch bei einer zusätzlichen Scherbelastung. Die plastischen Zonen treten nun, wie zuvor auch beiden Goldkontakten festgestellt, bis zur Oberfläche vor.

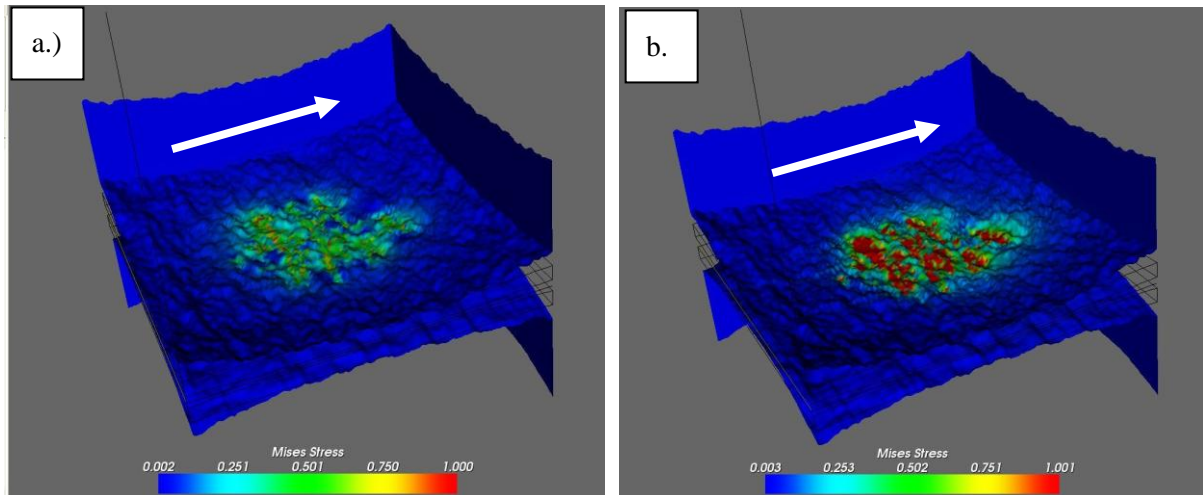


Abbildung 8.26 a. – b.: Von-Mises-Stress eines Ag/Ni/CuSn6 Systems auf der Kontaktoberfläche; a.: Reine Normalbelastung ($F_N=1$ N); b.: Mit zusätzlicher Scherkraft ($\mu=0,3$) in Pfeilrichtung.

Da im Gegensatz zu den Goldkontakten die plastischen Zonen bis zur Nickelgrenze reichen, kommt es mit einer höheren Wahrscheinlichkeit schneller zu einem partiellen Durchrieb, als bei dem härteren Gold. Dies stimmt mit den praktischen Erfahrungen (siehe auch Kapitel 3.2) überein. Weiterhin neigt Silber sehr stark zum Kaltverschweißen, was einen Abrieb bis zum Nickel gegenüber Gold noch beschleunigt, so dass in der Praxis nur etwa 20 Steckzyklen erreichbar sind.

8.2.3 Verzinnte Oberflächen

Tabelle 7.16 zeigt den hypothetischen Schichtaufbau eines galvanisch verzinnten Kontaktsystems. Gegenüber den zuvor diskutierten Silberkontakten, ist die Schichtdicke der Oberfläche auf $1,5\ \mu\text{m}$ erhöht. Der Reibkoeffizient wird zur Vergleichbarkeit mit $\mu=0,3$ angesetzt. Die Kontaktnormalkraft wird mit einem für den Betrieb verzinnter Kontakte typischen Wert von $F_N=2$ N parametrisiert.

Tabelle 8.16: Beschichtungsabfolge der Kontaktpaarung.

	Kontakt 1	Kontakt 2
Deckschicht	$1,5\ \mu\text{m}$ Sn	$1,5\ \mu\text{m}$ Sn
Zwischenbeschichtung	$1,27\ \mu\text{m}$ Ni	$1,27\ \mu\text{m}$ Ni
Grundmaterial	$(6\ \mu\text{m})$ CuSn6	$(6\ \mu\text{m})$ CuSn6

An Hand von Abbildung 8.27 ist sehr deutlich der prinzipielle Unterschied zu den zuvor diskutierten Gold- bzw. Silberkontakten zu sehen. Die plastische Zone ist über den gesamten Kontaktbereich ausgedehnt. Die Tiefe des plastischen Bereiches reicht bis zur Nickel-Zwischenschicht. Sowohl bei der reinen Normalbelastung als auch bei zusätzlicher Scherbeanspruchung sind plastische Zonen auf der Oberfläche gegeben. Diese Zonen sind nicht auf die eigentlichen a-Spots beschränkt, sondern auch in den Zwischenräumen der Kontakte feststellbar.

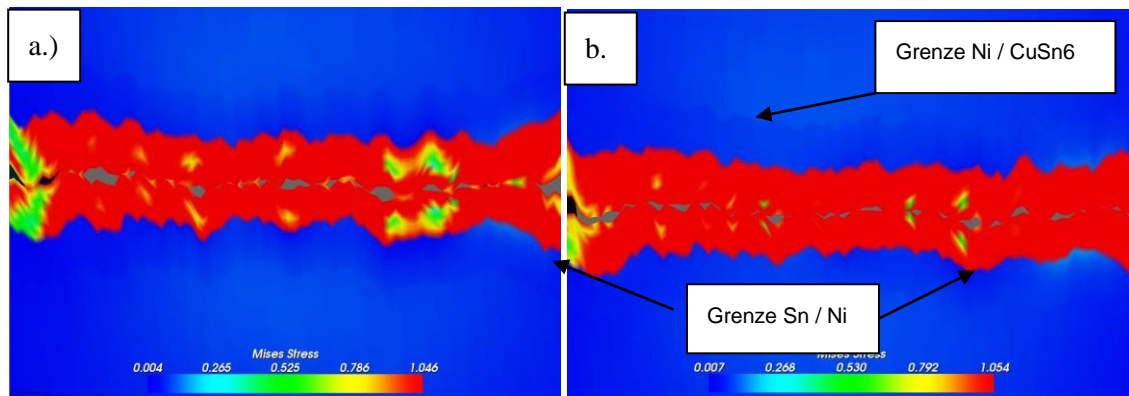


Abbildung 8.27 a. – b.: Von-Mises-Stress eines Sn/Ni/CuSn6 Systems an Hand einer x/z-Schnittebene durch die Kontaktmitte; a.: Reine Normalbelastung ($F_N=2\text{ N}$); b.: Mit zusätzlicher Scherkraft ($\mu=0,3$).

In Abbildung 8.28 a. ist zu erkennen, dass bei reiner Normalbelastung noch immer elastische Bereiche auf der Oberfläche gegeben sind, die letztendlich für ein Kraftgleichgewicht bei der iterativen Berechnung der Druckverteilung sorgen. Bei einer zusätzlichen Scherbeanspruchung verschwinden diese Bereiche jedoch vollständig. Aus dem Umstand, dass die plastischen Zone bis auf die Nickel Zwischenschicht reicht, ist davon auszugehen, dass bereits nach einem Steckzyklus die fast komplette Zinnbeschichtung weg gerieben wird und nur durch ein Verschmieren als Kontaktschicht erhalten bleibt.

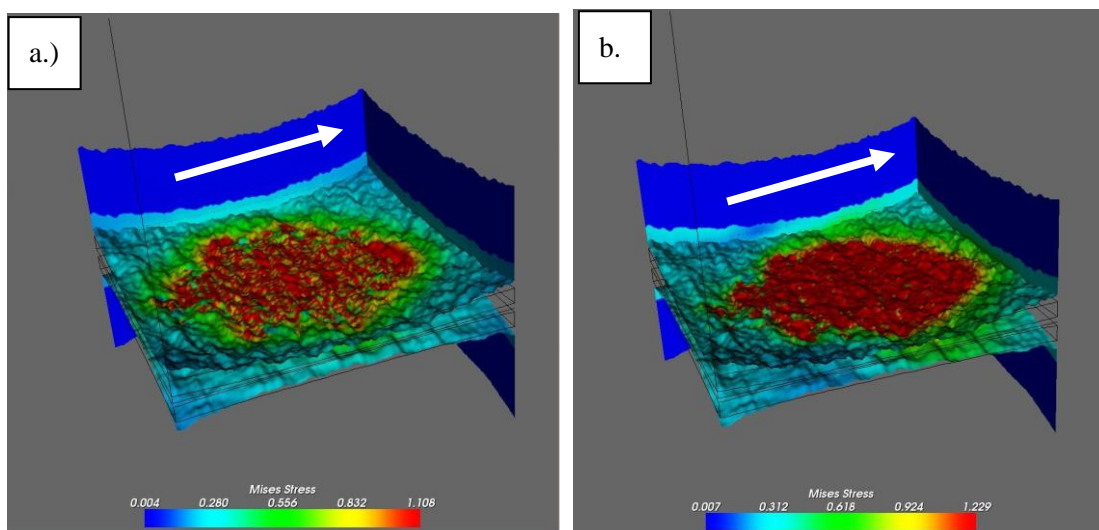


Abbildung 8.28 a. – b.: Von-Mises-Stress eines Sn/Ni/CuSn6 Systems auf der Kontaktoberfläche; a.: Reine Normalbelastung ($F_N=1\text{ N}$); b.: Mit zusätzlicher Scherkraft ($\mu=0,3$) in Pfeilrichtung.

An dieser Stelle sei deshalb noch einmal erwähnt, dass die in dieser Arbeit entwickelten Simulationsalgorithmen für den Fall zweier ruhender Kontaktstücke entwickelt wurden. Ein dynamisches Fließen der Kontaktmaterialien bzw. Steckvorgänge kann hiermit nicht berechnet werden. Ein Steckvorgang wird nur indirekt betrachtet, indem entweder eine gesteckte Oberflächentopographie simuliert bzw. als digitalisierte Topographie eingelesen wird.

9 Zusammenfassung und weitere Ausblicke

Im Rahmen dieser Arbeit wurden mehrere Verfahren implementiert, mit denen realistische Oberflächen simuliert werden können. Es konnte gezeigt werden, dass mittels sechs unabhängiger Parameter technische Oberflächen genau beschrieben werden können. Die Parameter lauten wie folgt:

1. Standardabweichung σ der z-Werte-Verteilung
2. Schiefe der z-Werte-Verteilung
3. Wölbigkeit der z-Werte-Verteilung
4. Form der Autokorrelationsfunktion (linear / exponentiell)
5. Korrelationslänge in x-Richtung
6. Korrelationslänge in y-Richtung

Am Beispiel digitalisierter technischer Oberflächen, die durch unterschiedliche Bearbeitungsprozesse erzeugt wurden, konnten die oben aufgeführten Parameter bestimmt werden. Durch das Anwenden eines „Finite Response Filter“ (siehe Kapitel 6.1.3) und nachträglicher Transformation der z-Werte-Verteilung werden entsprechende Oberflächen erzeugt, die sich vom optischen Eindruck her nicht von den Ursprungstopographien unterscheiden. Sowohl isotrope als auch anisotrope Oberflächen sind darstellbar. Auf eine aufwendige Präparation und Vermessung von Proben kann daher verzichtet werden.

Des Weiteren wurden Verfahren gezeigt, die die schnelle Berechnung der Deformations- und Spannungskomponenten rauer Mehrschichtsysteme erlauben. Die von Liu et al [87] beschriebene analytische Lösung für Zweischichtsysteme wurde mittels numerischer Lösungsalgorithmen auf Dreischichtsysteme erweitert.

Der in dieser Arbeit entwickelte iterative Lösungsalgorithmus erlaubt die Berechnung der elektrischen Kenngrößen im Innern realer mehrschichtiger Steckverbinderkontakte. Der so simulierte Engwiderstand stimmt im Falle edler Kontaktwerkstoffe sehr gut mit den experimentell bestimmten Werten überein.

Sämtliche hier beschriebenen Algorithmen wurden in eine Windows-kompatible Software implementiert. Durch eine Datenbankbindung lassen sich auf einfachstem Weg komplexe Simulationsfolgen generieren, speichern und auswerten. Sämtliche Ergebnisse lassen sich dreidimensional darstellen und analysieren.

9.1 Weiterführende Arbeiten und Ausblicke

In weiteren experimentellen Versuchen ist zu klären, ob die in Kapitel 8.1.2 getroffene Aussage, dass die Anzahl der a-Spot mit steigender Oberflächenrauheit abnimmt, verifiziert werden kann. Ebenfalls ist bekannt, dass nicht in allen Fällen die makroskopisch ermittelten Parameter, wie E-Modul oder Zugfestigkeit, für dünnste Schichten angewendet werden können. Ziel der weiterten Arbeiten ist es daher, diese Parameter so anzugleichen, dass eine exakte Übereinstimmung der Messkurven mit den Simulationsdaten erreicht wird. Integriert in einer entsprechenden Datenbank soll der Anwender für

den jeweiligen Anwendungsfall die optimalen Design-Parameter bei minimalem Entwicklungsaufwand vorab bestimmen können.

Um den Einfluss von Fremdschichten berechnen zu können, ist das Modell um eine weitere Schicht zu erweitern. Dies ist mit dem hier entwickelten Verfahren ohne großen Aufwand durchführbar. Weiterhin ist zu prüfen, ob das DC-FFT-Verfahren auch auf Schichten nicht konstanter Dicke angewendet werden kann.

Da die Stromdichteverteilung und somit die erzeugte Wärme im Kontaktpaar bekannt sind, ist es möglich, das Modell hinsichtlich Wärmetransporteffekte zu erweitern. Somit ist auch eine Abschätzung der Derating-Kurve möglich.

Für sehr hohe Normalkräfte kann die plastische Zone an den Rändern der Kontaktzone die Oberfläche erreichen (siehe auch Tabelle 7.18). Für diesen Lastfall muss das Modell gemäß dem iterativen Algorithmus nach Chu [21][22] erweitert werden. Ob hiermit ein Wegschieben der Kontaktbeschichtung beim Steckvorgang simuliert werden kann, ist ebenfalls zu untersuchen.

Des Weiteren kann unter Einbeziehung des „Elasto-Hydrodynamic-Lubrication“-Modells (Vernier [146]) auf das tribologische Verhalten der Kontaktpaare zurück geschlossen werden (siehe hierzu auch Kapitel 2.4).

Um die Oberflächenrauheit bei der iterativen Berechnung des Engwiderstandes bei gleichzeitig vermindertem Speicherplatzbedarf und schnellerer Konvergenz feiner abbilden zu können, muss die Maschendichte des Rechengitters variabel gestaltet werden. Während die Lagendichte im Oberflächenbereich der Kontaktkörper sehr eng gehalten werden muss (siehe auch Kapitel 6.3.2), kann die Maschendichte im Inneren der Kontaktkörper um ein mehrfaches gröber gestaltet werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Achard, J.F.: Single Contacts and multiple Encounters. Jour. of Appl. Physics 32 (1961), 1420 – 1425
- [2] Adams, G. G.; Muftu, S.; Azhar, N. M.: A Scale-Dependent Model for Multi-Asperity Contact and Friction. Transactions of the ASME - F - Journal of Tribology 125 (2003), 700 – 708
- [3] Ao, Y.; Wang, Q.; Chen, P.: Simulating the worn surface in a wear process. Wear 252 (2002), 37-47
- [4] Ausloos, M.; Berman, D.H.: Multivariate Weierstrass Mandelbrot Function. Proceedings of the Royal Society of London 400 (1985), 331 – 350
- [5] Avila, L.; Bare, S.; Blue, R. et al.: VTK User's Guide. Kitware, USA, 2004, ISBN 1-930934-13-0.
- [6] Barber, J. R.: Bounds on the electrical resistance between contacting elastic rough bodies. The royal society 459 (2003), 53 – 66
- [7] Becker, W.; Groß, D.: Mechanik elastischer Körper und Strukturen. Springer-Verlag, 2002, 65 - 66, ISBN 3540435115.
- [8] Bishop, R.: Bishop Report, 2003.
- [9] Bora, C.K., Plesha, M.E.; Flater, E.E.; Street, M.D.; Carpick, R.W.; Redmond, J.: Multiscal roughness of MEMS surfaces. Proceedings of TRIB2004, Joint Int. Tribology Conference Long Beach CA, 2004, 1 – 7
- [10] Bower, A.: Linear Elasticity. Division of Engineering, Brown University, 2005, <http://www.engin.brown.edu/courses/en224/pnpots/pnpots.html>.
- [11] Brandt, A.; Lubrecht, A.A.: Multilevel matrix multiplication and fast solution of integral equations. J. Comp. Phys. 90 (1990), 348 – 370
- [12] Brenner, A.: Anforderungen an Leistungssteckverbinder und Steckverbinder in der Informationselektronik. Albert Keil Kontaktseminar 15 (1999), 1 – 8
- [13] Burmister, D.M.: The general Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems. J. Appl. Phys. 16 (1945), 89 – 94
- [14] Bush, A.; Gibson, R. D.; Keogh, G.P.: Strongly Anisotropic Rough Surfaces. ASME Jour. Of Lubr. Techn. 101 (1979), 15 – 20
- [15] Bush, A.; Gibson, R. D.; Thomas, T.R.: The Basic Contact of a Rough Surface. WEAR 35 (1975), 87 – 110
- [16] Bushan, B.: Contact Mechanics of Rough Surfaces in Tribology : Multiple Asperity Contact. Trib. Letters 4 (1998), 1 – 35
- [17] Bushan, B.; Peng, W.: A numerical three dimensional model for the contact of layered elastic/plastic solids with rough surfaces by a variational principle. Journal of Tribology 123 (2001), 330 – 342
- [18] Cai, S.; Bushan, B.: Three Dimensional Dry/Wet Contact Analysis of Multilayered Elastic/Plastic Solids with Rough Surfaces. Journal of Tribology 128 (2006), 18 – 31
- [19] Chen, W.T.: Computation of Stresses and displacements in a Layered Elastic Medium. Int. J. Eng. Sci. 9 (1971), 775 – 799
- [20] Cheng, W. R.; Etsion I.; Bogoy, D.B.: An Elastic Plastic Model for the Contacts of Rough Surfaces. ASME Journal of Tribology 109 (1987), 257 – 263

- [21] Chiu, Y.P.: On the Stress Field due to Initial Stress in a Cuboidal Surrounded by an Infinite Half Space. *J. Appl. Mech.* 44 (1977), 387 – 390
- [22] Chiu, Y.P.: On the Stress Field and Surface Displacement in a Half Space With a Cuboidal Zone in which Initial Strains are Uniform. *J. Appl. Mech.* 45 (1978), 302 – 306
- [23] Ciavarella, M.; Leoci, F.: An Assessment of the Greenwood Williamson and other asperities Models, with special Reference to Electrical Conductance. *Journal of Tribologie* 128 (2006), 10 – 17.
- [24] Conry, T. F.; Seireg, A.: A Mathematical Programming Method for Design of Elastic Bodies in Contact. *ASME Jour. Of Applied Mechanics* 38 (1971), 387 – 392
- [25] Conzalez, C.; Segurado, J.; Llorca, J.: Numerical Simulation of Elasto-Plastic Deformation of Composites: Evolution of Stress Microfields and Implications for Homogenization Models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 52 (2004), 1573 – 1593
- [26] Deeg, E. W.: New Algorithms for Calculating Hertzian Stresses, Deformations, and Contact Zone. *AMP Journal of Technology* 2 (1992), 14 – 24
- [27] Derman, G.B.: Connectors. Hrsg.: International institute of Connector and Interconnection Technology, Inc., Connectors and Interconnections Handbook, Band 1, Deerfield IL, USA, 1990 pp. 45 - , Library of Congress No. 77-088086.
- [28] Dowson, D.; Hamrock, B. J.: Numerical Evaluation of the Surface Deformation of Elastic Solids Subjected to a Hertzian Contact Stress. *ASLE Transactions* 19 (1976), 279 – 286
- [29] Etsion, I.; Amit, M.: The Effect of Small Normal Loads on the Static Friction Coefficient in very Smooth Surfaces. *ASME Journal of Tribology* 115 (1993), 406 – 410
- [30] Finke, H.: Beurteilung der wahren Kontaktberührungsfläche mit Hilfe statistischer Modelle, International Research Symposium on electrical contacts 3 (1966), 3, 135 -139
- [31] Fluss H.S.: Hertzian Stress as a Predictor of Contact Reliability. *Connector Technology*, Dec. 1990, 12 – 19
- [32] Francis, H. A.: The Accuracy of Plane Strain for the Elastic Contact of Three-Dimensional Rough Surfaces. *WEAR* 85 (1983), 239 – 256
- [33] Gagnepain, J.J.; Roges-Carmes, C.: Fractal Approach to two-dimensional and three dimensional Surface Roughness. *WEAR* 109 (1986), 119 – 126
- [34] Gong, Z. Q.; Komvopoulos, K.: Contact Fatigue Analysis of an Elastic Plastic Layered Medium With a Surface Crack in Sliding Contact With a Fractal Surface. *Journal of Tribology* 127 (2005), 503 – 512
- [35] Greenwood, J. A.: Constriction Resistance and the Area of Real Contact. *Br. J. Appl. Phys.* 17 (1966), 1621 – 1632
- [36] Greenwood, J. A.; Williamson, J. B. P.: Contact of Nominally Flat Surfaces. *Proc. Roy. Soc. (London) Series A* 295 (1966), 300 – 319
- [37] Greenwood, J. A.; Wu, J. J.: Surface Roughness and Contact: An Apology. *Mechanica* 36 (2001), 617 – 630
- [38] Hertz, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 92 (1882), 156 – 171
- [39] Hertz, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte. *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewebefleisses*, 1882.
- [40] Hestenes, M. R.: Kapitel 2,3, Conjugate Direction Methods in Optimization. New York, Springer, 1980.
- [41] Holm, R.: Electric Contacts. Hrsg.: Springer, 1967, ISBN 3-540-03875-2.

- [42] Horn, G., Dürrwächter E., Der ruhende Kontakt. VDE Seminar , Kontaktverhalten und Schalten 3 (1975), 4 – 5
- [43] Horn, J.; Aue, H. D.: Rechnergesteuerte Untersuchung von Kontaktwerkstoffen. Feinwerktechnik und Messtechnik 95 (1987), 523 – 525
- [44] Horn, J.; Lippmann, B.; Steinhäuser H., Strombelastbarkeit von Steckverbinderkontakten. Albert Keil Kontakt Seminar Karlsruhe 17 (2003), 1 – 9
- [45] Hou, K.; Zhu, D.; Wen, S: A New Numerical Technique for Computing Surface Elastic Deformation Caused by a Given Normal Pressure Distribution. ASME Journal of Tribology 107 (1985), 128 – 131
- [46] Hu, Y. Z.; Barber, G.C.; Zhu D.: Numerical Analysis for the Elastic Contact of Real Rough Surfaces. Tribol. Trans. 12 (1999), 195-200
- [47] Hu, Y. Z.; Tonder, K.: Simulation of 3D Random Surface by 2 Digital Filter and Fourier Analysis. Int'l J. of Mach Tool Manufact. 32 (1992), 82 – 90
- [48] Hueber, B.; Huebner, C.: Joule Heating and Development of Temperature in a Symmetric Metallic Current Current Constriction. Holm Seminar on Electric Contact Phenomena 18 (1972), 31 – 39
- [49] Jamari, J.; Schipper, D. J.: Experimental Investigation of Fully Plastic Contact of a Sphere Against a Hard Flat. Journal of Tribology 128 (2006), 230 – 235
- [50] Jeng, J. R.: Characterization of surface Distribution. J. Chin. Soc. Mech. Eng. 19 (1998), 417 – 423
- [51] Jeng, Y. R.; Peng, S. R.: Elastic Plastic Contact Behavior Considering Asperity Interactions for Surfaces with various Height Distributions. Journal of Tribology 128 (2006), 245 – 251
- [52] Jeng, Y.R.; Gao, C. C.: Changes of Surface topography during Wear for Surfaces with Different height Distributions. Tribol. Trans. 43 (2000), 749 – 757
- [53] Jeng, Y.-R.; Wang, P.-Y.: An Elliptical Microcontact Model Considering Elastic, Elastoplastic, and Plastic Deformation. Transactions of the ASME - F - Journal of Tribology 125 (2003), 232-240
- [54] Johnson, K.L.: Hertz Theory of Elastic Contact. In: Contact Mechanics. Cambridge University Press, (1985), p. 93, ISBN 521 34796 3
- [55] Johnson, K.L.: Influence of interfacial friction. In: Contact Mechanics. Cambridge University Press, (1985), ISBN 521 34796 3
- [56] Johnson, K.L.: Rough Surfaces. In: Contact Mechanics. Cambridge University Press, (1985), ISBN 521 34796 3
- [57] Jones, R.; Ziegler, D.A.: A method for determining the asperity distribution of contacting rough surfaces. Journal of Tribology 127 (2005), 24-29
- [58] Ju, J.; Farris, T. N.: Spectral Analysis of Two Dimensional Contact Problems. ASME Jour. Of Trib. 118 (1996), 320 – 328
- [59] Ju, J.; Zheng L.: A Full Numerical Solution for the Elastic Contact of Three Dimensional Real Rough Surfaces. WEAR 157 (1992), 151 – 161
- [60] Jung, C. C.; Jen, F. L.: Variation in Fractal Properties and non Gaussian Distributions of Microcontact between Elastic Plastic Rough Surfaces With mean Surface Separation. Journal of applied mechanics 73 (2006), 143 -152.
- [61] Kalker, J. I.: Variational principles in Contact Elastostatics. Jour. Int. Math. Appl. 20 (1977), 199 – 219

- [62] Kalker, J. I.; Van Randen, Y.: A Minimum Principle for Frictionless Elastic Contacts with Application in Non Hertzian Half Space Contact Problems. *Jour. Of Eng. Math.*, 6 (1972), 193 – 200.
- [63] Kalker, J.J.: Numerical Calculation of the Elastic Field in a Half Space. *Commun. Appl. Numer. Methods* 2 (1986), 401 – 410
- [64] Kaneta, M.; Yang, P.: Effects of Thermal Conductivity of Contacting Surfaces on Point EHL Contacts. *Transactions of the ASME - F - Journal of Tribology* 125 (2003), 731 – 738
- [65] Kantner, E.A.; Hobgood, L.D.: Hertz Stress as an indicator Of Connector Reliability. *Connection Technologie*, march 1989, 14 – 23
- [66] Keil, A.: Ruhender, gleitender und trocken schaltender Kontext. *VDE Seminar, Kontaktverhalten und Schalten*, 1979, 1 – 16
- [67] Kesselring, A.: Theoretische Grundlagen zur Berechnung der Schaltgeräte. Berlin,, de Gruiter, 1950 275, 292, 295
- [68] Klarbring, A.: A Mathematical Programming Approach to Three Dimensional Contact Problems with Friction. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 58 (1986), 175 – 200
- [69] Klarbring, A.; Biorkman, G.: A Mathematical Programming Approach to Contact Problems with Friction and Varying Contact Surfaces. *Computers and Structures* 30 (1988), 1185 - 1198
- [70] Klarbring, A.; Biorkman, G.: The Treatement of Problems in Contact Mechanics by Mathematical Programming. *Jour, of Theoretical and Applied Mechanics* 7 (1988), 83 – 96
- [71] Kogut, L.; Komvopoulos, K.: Electrical Contact resistance theory for conductive rough surfaces separated by a thin insulationg film. *Journal of Applied Physics* 95 (2003), 576 – 585
- [72] Kogut, L.; Jackson, R. L.: A Comparion of Contact Modeling Utilizing Statistical and Fractal Approaches. *Jour. Of Tribology* 128 (2006), 213 – 217
- [73] Kogut, L.; Etsion, I.: A Static Friction Model for Elastic-Plastic Contacting Rough Surfaces. *Transactions of the ASME - F - Journal of Tribology* 126 (2004), 34 – 40
- [74] Komvopoulos, K.; Choi, D.H.: Elastic Finite Element Analysis of Multi Aspherity Contacts. *ASME Jour. Of Tribology* 107 (1992), 37 – 60
- [75] Kucharski, S.; Klimczak, T.; Polijaniuk, A.; Kakumarek, J.: Finite Element Model for the Contact of Rough Surfaces. *WEAR* 177 (1994), 1 – 13
- [76] Lai, W. T.; Cheng, H. S.: Computer Simulation of Elastic Rough Surfaces. *Trib. Trans.* 28 (1985), 172 – 180
- [77] Lee, S.; Cheng, H. S.: On the relation of Load to Average Gap in the Contact between Surfaces with Longitudinal Roughness. *STLE Trib: Trans.* 35 (1992), 523 – 529
- [78] Lee, S.; Ren, N.: Behaviour of Elastic Plastic Rough Surface Contacts as Affected by Surfaces Topography, Load and Material Hardness. *Trib. Trans.* 39 (1996), 67 – 74
- [79] Lee, S.C; Ren N.: The Effekt of Surface Roughness and Topography on the Contact Behavior of Elastic Bodies. *ASME J. Tribol.* 116 (1994), 804 – 80.
- [80] Lee, S.C.; Ren, N.: The Subsurface Stress Field created by Three-Dimensionally Rough Bodies in Contact with Traction. *Tribol. Trans.* 37 (1994), 615 – 621
- [81] Leng, Y. S.; Yang, G. P.; Huang, Y.; Zheng, L. Q.: The Characteristics of Elastically Contacting Ideal Rough Surfaces. *ASME Jour. Of Trib.* 118 (1996), 90 – 97
- [82] Ling, F.F.: The Possible Role of Fractal Geometrie in Tribology. *Tribology Transactions* 32 (1989), 497 – 505
- [83] Liu, G.; Wang, Q.: A Survey of Current Models for Simulating the Contact between Rough Surfaces. *Tribology Transactions* 42 (1999), 581-851
- [84] Liu, G.; Zhu J.; Yu, L.; Wang, Q.: Elasto Plastic Contact of Rough Surfaces. *Tribology Transactions* 44 (2001), 437 – 443

- [85] Liu, S.; Wang, Q.: A Three Dimensional Thermomechanical Model of Contact Between Non-Conforming Rough Surfaces. *Journal of Tribology* 123 (2001), 17-26
- [86] Liu, S.; Wang, Q.; Liu, G.: A versatile method if discrete convolution and FFT (DC-FFT) for contact analyses. *WEAR* 243 (2000), 101 – 111
- [87] Liu, S.; Wang, Q.: Studying Contatc Stress Fields Caused by Surface Traction With a Discrete Convolution and Fast Fourier Transform Algorithm. *Transactions of the ASME* 124 (2002), 36 -45
- [88] Longuet; Higgins, M. S.: The Statistical Analysis of Random Moving Surfaces. *Philosophical Transactions of the Royal Society* 249 (1957), 321 – 387
- [89] Love, A. E. H.: The Stress Produced in a Semi-Infinite Solid by Pressure on Part of the Boundary. *Phil. Trans. Roy. Soc. (London) Series A* 228 (1929), 377 – 420
- [90] Lubrecht, A.A.; Ioannides, E.: A fast solution of the dry contact problem and the associated subsurface stress field using multilevel techniques. *ASME J. Tribol.* 133 (1991), 128 – 133
- [91] Majundar, A.; Tien, C.L.: Fractal Characterization and Simualation of Rough Surfaces. *WEAR* 136 (1990), 313 – 325
- [92] Majundar, A.; Bushan B.: Fractal model of Elastic Plastic Contact between Rough Surfaces. *ASME Jour. Of Trib.* 113 (1991), 1 – 11
- [93] Mandelbrot, B.B.: *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, SanFransisco CA, 1982
- [94] Martini, A.; Escoffier, B.; Wang, Q.; Liu S.B.; Keer, L. M.; Zhu, D.; Bujiol, M.: Prediction of Subsurfae stress in elastic perfectly plastic rough components. *Tribology Letters* 23 (2006), 243-251
- [95] Martz, P.: Generatin Random Fractal Terrain, 1996, www.gameprogrammer.com/fractal.html,.
- [96] Mau, H.J.: Über die Schweißkraft von Kontakten bei Belastung durch einen Halbwellenstrom. *Z. Kontakte in der Elektrotechnik*, 1965, 76 – 85
- [97] Mayeur, C.: Sainsnot P., Flammand L., A Numerical Elastoplastic Model for Rough Contact. *ASME Jour. Of. Tribol.* 117 (1995), 422 – 429
- [98] McCool, J. I. and Gassel S. S.: The contact of Two Surfaces having Anisotropic Roughness Geometrie. *ASLE Spec. Publ.* 7 (1981), 29 – 38
- [99] McCool, J.I., Comparison of Models for the Contact of Rough Surfaces. *WEAR*, 107 (1986), 37 – 60
- [100] Merl, W.; Vinaricky, E.; Dürrwächter, E.: Der Ruhende Kontakt. *VDE Seminar , Kontaktverhalten und Schalten* 2 (1972), 1 – 6
- [101] Merl, W.; Horn G.; Dürrwächter, E.: Der Ruhende Kontakt. *VDE Seminar , Kontaktverhalten und Schalten* 2 (1973), 2 – 4
- [102] Miller, Garvin S. P.: The Definition and Rendering of Terrain Maps. *SIGGRAPH 1986 Conference Proceedings, Computer Graphics* 20 (1986)
- [103] Minowa, I.; Nakamura, M.: Simulation for the Current Density Distribution in a Contact Spot. *Electronics and Communications in Japan, Part 2*, 77 (1994), 88 – 95
- [104] Morrow, C. A.: *Adhesive Rough Surface Contact*. Hrsg.: University Pittsburg, Adhesive Rough Surface Contact, Pittsburg, 2003.
- [105] Mroczkowski, R.: Concerning "Hertz Stress" as a Connector Design Parameter: a Negative Note. *Proc 24th Annual Connector and Interconnection Technology Seminar* 1991
- [106] Myers, M.; Leidner, M.; Schmidt, H.; Schlaak, H.: Extension and Experimental Verification of a New 'First Contact' Method to Model Performance of Multilayer Contact Interfaces. angenommen zur Publication 54th IEEE Holm conference on electrical contacts, Orlando, 2008

- [107] Nayak, P. R.: Random Process Model of Rough Surfaces. Trans. ASME J. Lubr. Tech. 93 (1971), 398 – 407
- [108] Neuber, H.: Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme in der Elastizitätstheorie. Zeit. Angew. math. Mech. 14 (1934), 203 – 212
- [109] Niordson, C. F.; Hutchinson, J. W.: Non Uniform Plastic Deformation of Micron Scale Objects. Int. Jour, for Num. Methodes in Engineering 56 (2003), 961 – 967
- [110] Nogi, T.; Kato, T.: Influence of a Hard Surface Layer on the Limit of Elastic Contact - Part 1: Analysis Using a Real Rough Surface Model. ASME Jour. Of Tribology 119 (1997), 496 – 500
- [111] Nosonovsky, M.; Bushan, B.: Scale effect in dry friction during multiple asperity contact. Journal of Tribology 127 (2005), 37 – 46
- [112] Onions, R. A.; Achard, J. F.: The Contact of Surface having a Random Surface Structure. Jour. Of Phys. D, Appl. Phys. 6 (1973), 289 – 304
- [113] O'Sullivan, T.C.; King, R.B., Sliding Contact stress field due to a spherical indenter on a layered elastic medium. ASME J. Tribol. 110 (1988), 235 – 240
- [114] Papkovich, P.F.: Izvest. Akad. Nauk. SSSR, Fiz. Math. Serv. 10 (1932), 1425 – 1435
- [115] Patir, N.: Numerical Procedure for Random Generation of Rough Surfaces. WEAR, 47 (1978), 263 – 277
- [116] Philippow, E.: 1.2. Statische Felder. Hrsg.: Philippow E., Taschenbuch Elektrotechnik, Band 1, VEB Verlag Technik Berlin, 1976, 45 – 49
- [117] Plumet, S.; Dubourg, M. C.: A 3 D model for a Multilayered Body Loaded Normally and Tangentially Against a Rigid Body. ASME Journal of Tribology 120 (1998), 668 – 676
- [118] Polonsky, I.A.; Kerr, L.M.: A New Numerical Method for Solving Rough Contact Problems Based On The Multil-Level Multi-Summation and “conjugate gradient Technique. WEAR 231 (1999), 206 – 219
- [119] Polonsky, L.A.; Kerr, L.M.: A Fast and Accurate Method for Numerical Analysis of Elastic Layered Contacts. ASME Jour. Of Tribology 122 (2000) 30 – 35
- [120] Polonsky, L.A.; Kerr, L.M.: Fast Methods for Solving Rough Contact Problems: A Comparative Study. ASME Jour. Of Tribology 122 (2000), 36 – 41
- [121] Poon, C. J.; Sayles, R.S.: Numerical Contact Modell of a Smooth Ball on an Anisotropic Rough Surface. ASME Jour. Of Tribol. 116 (1994), 194 – 201
- [122] Pursche, G.: Elektrolytisches Metallabscheiden, Oberflächenschutz vor Verschleiß. Verlag Technik Berlin, ISBN 3-341-00639-7.
- [123] Ren, N.; Lee, S. C.: Contact Simulation of Three Dimensional Rough Surfaces Using Moving Grid Methods. ASME Jour. Of Trib. 15 (1993), 597 – 601
- [124] Ren, N.; Lee, S.C.: The Effects of Surface Roughness and Topography on the Contact Behaviour of Elastic Bodies. ASME Jour. Of Trib. 116 (1994), 804 – 801
- [125] Rogers, M.J.; Keer, L.M.; Cheng, H. S.: Steady State Temperature Rise in Coated Halfspaces and Halfplanes. CMES 3 (2002), 483 – 495
- [126] Sainsnot, P.; Jacq, C.; Nelias, D.: A Numerical Model for Elastoplastic Rough Contact. CMES 3 (2002), 497 – 506
- [127] Sauter, E.: Ruhender gleitender und trocken schaltender Kontakt. VDE Seminar , Kontaktverhalten und Schalten 6 (1981), 1 – 20
- [128] Sayles, R. S.: Basic Principles of Rough Surface Analysis Using Numerical Methods. Trib. Int'l. 29 (1996), 639 – 650
- [129] Schaefer, E.: Stecker in der Elektronik. Elektronik Praxis 5 (1980), 16.

- [130] Schmidt, H.; Leidner, M.: Einflussgrößen auf das Steck- und Ziehverhalten hochpoliger Steckverbinder Systeme. Global Industrial & Commercial News 01 / 11-02 (2002), 8 – 9
- [131] Schnabl, R.: Physik elektrischer Kontakte. VDE Kontaktverhalten und Schalten 8 (1989), 1 – 13
- [132] Schroeder, W.; Martin, K.; Lorensen, B., Hrsg.: Kitware, The Visualization Toolkit, An Object Oriented Approach to 3D graphics. 3, USA., 2004, ISBN 1-930934-12-2
- [133] Seabra, J.; Berthe, D.: influence of Surface Waviness and Roughness on the Normal Pressure Distribution in the Hertzian Contact. ASME Journal of Tribology 109 (1987), 462 – 470
- [134] Simmons, J.G.: Generalized formula for the electric tunnel effect between dissimilar electrodes separated by a thin insulation film. Jour. Appl. Physics 34 (1963), 1793 – 1803
- [135] Simmons, J.G.: Electric tunnel effect between dissimilar electrodes separated by a thin insulating film. Jour. Appl. Physics 34 (1963), 2581 – 2590
- [136] Slade, P. G.: Electrical Contacts. CRC Press, 1999, ISBN 0824719344
- [137] Stanley, U. M.; Kato, T.: An FFT Based Method for Rough Surface Contacts. ASME Jour. Of Tribology 119 (1997), 481 – 485
- [138] Stöckel, D.: Grundlagen der Werkstoffauswahl für elektrische Kontakte. Technische Akademie Esslingen, Werkstoffe für elektrische Kontakte, Band 43, Esslingen, Expert Verlag, 1984 pp.15 - 16, ISBN 3-88508-934-3
- [139] Stoer, J.: Einführung in die Numerische Mathematik I. Heidelberger Taschenbücher, 1982, Springer Verlag, pp. 118ff, 3-540-12536-1
- [140] Sui, P.C.: An Efficient Computation Model for Calculation Surface Contact Pressures Using Measured Roughness. Style. Trib. Trans. 40 (1997), 243 - 250
- [141] Tabor, D.: Friction - The present State of our Understanding. J. Lubr.Techn. 103 (1981), 169 – 179
- [142] Tian, X.. F. and Bushan B.: A Numerical three dimensional Model for the Contact of Rough Surfaces by Variational Principle. ASME Jour. Of Trib. 118 (1996), 33 – 42
- [143] Tricot, C.: A model for rough surfaces, Composites Science and Technology 63 (2003), 1089 – 1096
- [144] Van Dijk, P.: Critical Aspects of Connector Contacts Proc ICEC Conf., 2002.
- [145] Van Dijk, Piet: Contact Spots. Proc. 20th Conf. On Electrical Contacts ICEC, 2000, <http://www.pvdijk.com/pdf/publcontactspots.pdf>.
- [146] Venner, C.H.; Lubrecht, A.A.: Multilevel Methods in Lubrication. ELSEVIER, 2000, ISBN 0 444 50503 2
- [147] Vetterling, W. T.: Numerical Recipes Example Book. Cambridge University Press, 1992, pp. 195, ISBN 0521437202
- [148] Vinaricky, E.: Grundlagen elektrischer Kontakte. VDE Seminar , Kontaktverhalten und Schalten 10 (1989), 7 – 15
- [149] Wang, S.: Real Contact Area of Fractal-Regular Surfaces and Its Implications in the Law of Friction. Transactions of the ASME - F - Journal of Tribology, 126 (2004), 1 – 8
- [150] Wang, S.; Komvopoulos K.: A Frictional Theory of the Interfacial Temperature Distribution in the Slow Sliding Regime. Part 2 - Multiple Domains. Elastoplastic Contacts and Applications, ASME Jour of Trib. 116 (1994), 824 – 832

- [151] Wang, S.; Komvopoulos, K.: A Frictional Theory of the Interfacial Temperature Distribution in the Slow Sliding Regime. Part 1 - Elastic Contact and Heat Transfer Analysis. *ASME Jour. Of Trib.* 116 (1994), 812 – 823
- [152] Warren, T. L.; Krajcinovic, D.: Random Cantor set models for the elastic-perfectly plastic contact of rough surfaces. *WEAR*, 196 (1996), 1 – 15
- [153] Warren, T. L.; Majumdar, A.; Krajcinovic, D.: A Fractal Model of the Rigid-Perfectly Plastic Contact of Rough Surfaces. *ASME Journal of Applied Mechanics* 63 (1996), 47 – 54
- [154] Webster, M.N.; Sayles, R.S.: A Numerical Model for the elastic Frictionless Contact of Real Rough Surfaces. *ASME Jour. Of Trib.*, 108 (1986), 314 – 320
- [155] West, M. A.; Sayles, R.S.: A 3 Dimensional Method of Studying 3-Body Contact Geometry and Stress on Real Rough Surfaces, 14th Leeds-Lyon Symposium on Tribology 12 (1987), 195 – 200
- [156] Whitehouse, J. A.; Achard, J. F.: The Properties of Random Surfaces of Significance in Their Contact. *Proc. Roy. Soc. Series A* 316 (1970), 97 – 121
- [157] Whitley, H.: A Measurement of Constriction Resistance Based on its Non-Linearity. *Int. Research Symp. On electric Contact Phenomena* 3 (1966), 63 – 69
- [158] Wieland Werke AG: Wileand – Kupferwerkstoffe, Ulm, 1999
- [159] Willner, K.: Elasto-Plastic Normal Contact of Three-Dimensional Fractal Surfaces Using Halfspace Theory. *Transactions of the ASME - F - Journal of Tribology* 126 (2004), 28 – 33
- [160] Wolfe, P.: The Simplex Method for Quadratic Programming, *Econometrica* 27 (1959), 382 – 395
- [161] Yan, F. G.; Bower, A.F.: Elastic Plastic Contact of a rough surface with Weierstrass profile. *Proc. R. Soc. A* 462 (2006), 319 – 348
- [162] Yan, W.; Komvopoulos, K.: Contact analysis of elastic plastic fractal surfaces, *Journal of applied physics* 84 (1988), pp.3617 – 3624.
- [163] Yang, J.; Komvopoulos, K.: A mechanics approach to static friction of elastic plastic fractal surfaces. *Trans of ASME Journal of Tribology* 127 (2005), 315 – 324
- [164] Yang, J.; Komvopoulos, K.: Impact of a rigid sphere on an elastic homogeneous half space. *Journal of tribology* 127 (2005), 325 – 330
- [165] Yu, M.M.H.; Bushan, B.: Contact Analysis of Three Dimensional Rough Surfaces under Frictionless and Frictional Contact. *WEAR* 200 (1996), 265 – 280
- [166] Yu, N.; Pergande, S. R.; Polycarpou, A. A., Static Friction Model for Rough Surfaces With Asymmetric Distribution of Asperity Heights. *Transactions of the ASME - F - Journal of Tribology* 126 (2004), 626 – 629
- [167] Yu, N.; Polycarpou, A. A.: Contact of Rough Surfaces With Asymmetric Distribution of Asperity Heights. *Transactions of the ASME - F - Journal of Tribology* 126 (2002), 367 – 376
- [168] Zhiu, D.; Hu Y. Z.: A Computer Programm Package for the Prediction of EHL and Mixed Lubrication Characteristics, Friction, Subsurface Stresses and Flash Temperature Based on Measured 3D Surface Roughness. *Tribol. Trans.* 44 (2001), 383 – 390

Anhang

Anhang 1: Formeln Hertz'scher Kontakte für beliebige elliptische Geometrien

Gemäß Deeg [26] wird der Hertzsche Kontakt nach folgenden Formeln berechnet:

$$\text{“Hertz Coeffizient”}: \quad \Theta_i = 4 \cdot \frac{(1-\nu^2)}{E_i}; \quad i = 1,2 \quad (9.1)$$

$$\text{“Principle Radius”}: \quad R = \frac{1}{r_{11}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{21}} + \frac{1}{r_{22}} \quad ; \quad (9.2)$$

$$R_i = \frac{1}{r_{i1}} + \frac{1}{r_{i2}}; \quad i = 1,2 \quad (9.3)$$

Wirkwinkel der Kontaktkraft ω (normalerweise immer 90°)

$$\text{Hilfsvariable:} \quad \Omega = a \cos\left(\frac{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + 2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega)}}{R}\right) \quad (9.4)$$

Die drei folgenden Integralfunktionen werden mittels des Romberg Verfahrens [139] gelöst.

$$H(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - (1-x^2) \cdot \sin^2(\phi)}} \quad (9.5)$$

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(\phi) d\phi}{\sqrt{\left\{1 - (1-x^2) \cdot \sin^2(\phi)\right\}^3}} \quad (9.6)$$

$$J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(\phi) d\phi}{\sqrt{\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \sin^2(\phi)\right\}^3}} \quad (9.7)$$

Je nach Hilfswinkel Ω wird einer der drei Startwerte K_1 , K_2 bzw. K_3 gewählt

$$K_1 = 0,04 \quad (9.8)$$

$$K_2 = 0,56 \quad (9.9)$$

$$K_3 = 0,85 \quad (9.10)$$

wenn $\Omega \leq 5 \cdot \pi/180$

$$G_0 = K_1 \quad \text{sonst} \quad G_0 = 0 \quad (9.11)$$

wenn $\Omega \geq \pi/180$

$$G_1 = G_0 \quad \text{sonst} \quad G_1 = 0 \quad (9.12)$$

wenn $\Omega \leq 73 \cdot \pi/180$

$$G_2 = K_2 \quad \text{sonst} \quad G_2 = 0 \quad (9.13)$$

wenn $\Omega \succ 5 \cdot \pi/180$

$$G_3 = G_2 \quad \text{sonst} \quad G_3 = 0 \quad (9.14)$$

wenn $\Omega \succ 73 \cdot \pi/180$

$$G_4 = K_3 \quad \text{sonst} \quad G_4 = 0 \quad (9.15)$$

für K gilt dann:

$$K = G_0 + G_2 + G_4 \quad (9.16)$$

Für das Verhältnis der Halbachsen der Kontaktellipse ergibt sich:

$$k = \text{Wurzel} \left(\left[\left\{ \frac{K^3}{\left[\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) \right]^2} \right\} - \left\{ \frac{J(k)}{I(K)} \right\} \right], K \right) \quad (9.17)$$

Die s.g. Hertz Faktoren f und g errechnen sich zu:

$$f = \left[\frac{2 \cdot I(k)}{\pi \cdot [\sin(\Omega/2)]^2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (9.18)$$

$$g = \left[\frac{2 \cdot J(k)}{\pi \cdot [\cos(\Omega/2)]^2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (9.19)$$

Die beiden Halbachsen a und b der Kontaktellipse berechnen sich wie folgt:

$$a = f \cdot \left[\frac{3F_N}{8R} \cdot (\Theta_1 + \Theta_2) \right]^{\frac{1}{3}} \quad (9.20)$$

$$b = a \cdot \frac{g}{f} \quad (9.21)$$

Die Kompressionen der beiden Kontaktkörper sind wie folgt angegeben:

$$u_{h1} = \frac{3 \cdot F_N \cdot \Theta_1 \cdot H(k)}{8 \cdot \pi \cdot a} \quad (9.22)$$

$$u_{h2} = u_{h1} \cdot \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \quad (9.23)$$

Die maximale Hertz'sche Flächenpressung errechnet sich zu:

$$P_{\max} = \frac{3 \cdot F_N}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot b} \quad (9.24)$$

Anhang 2: Aliasing-Problem und Gibbs-Phänomen

Der Einfachheit halber wird eine eindimensionale Funktion betrachtet, welche nur im Bereich zwischen $0 \leq x < L$ von Null verschiedene Werte aufweist (Abbildung 9.1 a.). Die Funktion soll mittels N diskreter Werte angenähert (gemessen) werden, welches einen Datenvektor mit den N Komponenten f_i ergibt. Der Index durchläuft hierbei die Serie von 0 bis $N-1$. Das Datenintervall beträgt $\Delta_x = L/N$. Es sei angemerkt, dass gemäß dem Nyquist-Abtasttheorem das Produkt zwischen Abtastintervall und der maximal möglichen Frequenz des abgetasteten Signals $< 0,5$ beträgt. Dadurch ergibt sich ein nicht zu vermeidender Diskretisierungsfehler bei der Simulation, der durch die Größe des Abtastintervalls bedingt ist. Auf Grund der analytisch einfachen Form der Fouriertransformierten wird als Beispiel folgende eindimensionale Funktion gewählt (Abbildung 9.1 a.):

$$f(x) = e^{-|x|} \quad (9.25)$$

Die kontinuierliche Fouriertransformierte hat die Form:

$$\tilde{f}(\omega_x) = \frac{2}{(1 + \omega_x^2)} \quad (9.26)$$

Die Relation zwischen der kontinuierlichen Fouriertransformation \tilde{f} und der diskreten Fouriertransformation \hat{f} stellt sich wie folgt dar [87]:

$$\hat{f}_j = \frac{1}{\Delta_x} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{L}j - \frac{2\pi}{\Delta_x}l\right) \quad \forall j \quad (9.27)$$

Durch die oben besprochen zyklische Anordnung der Indexterme der FFT ergibt sich der in Abbildung 9.1 b. gezeigte Aliasing-Effekt im Bereich von π/Δ_x .

Ein ähnlicher Effekt ergibt sich, wie in Abbildung 9.2 dargestellt, beim Übergang aus dem Frequenzraum in den Ortsraum. Die im Frequenzraum gemessene Funktion $\tilde{f}(\omega_x)$ aus Glg. (9.25) hat nur im Bereich von $-\pi/\Delta_x \leq \omega \leq \pi/\Delta_x$ von Null verschiedene Werte und ist in einem Ortsintervall von $2\pi/L$ durch N Messwerte bestimmt. Für $L=4$ ergibt dies in zyklischer Anordnung den in Abbildung 9.2 a. dargestellten Verlauf. Die Relation zwischen der Funktion im Ortsraum Glg. (9.25) und der Rücktransformation iFFT der Messwerte kann wie folgt geschrieben werden [87]:

$$iFFT(\tilde{f}(j\Delta_\omega)) = \Delta_x \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(x_j - lL) \quad \forall j \quad (9.28)$$

Abbildung 9.2 a. und b. zeigt den Aliasing-Effekt im Ortsbereich. Hierbei werden die Werte der kontinuierlichen Funktion im Zeitbereich $f(\omega)$ aus Glg. (9.26) für Werte größer $|\pi/\Delta_x|$ nicht berücksichtigt.

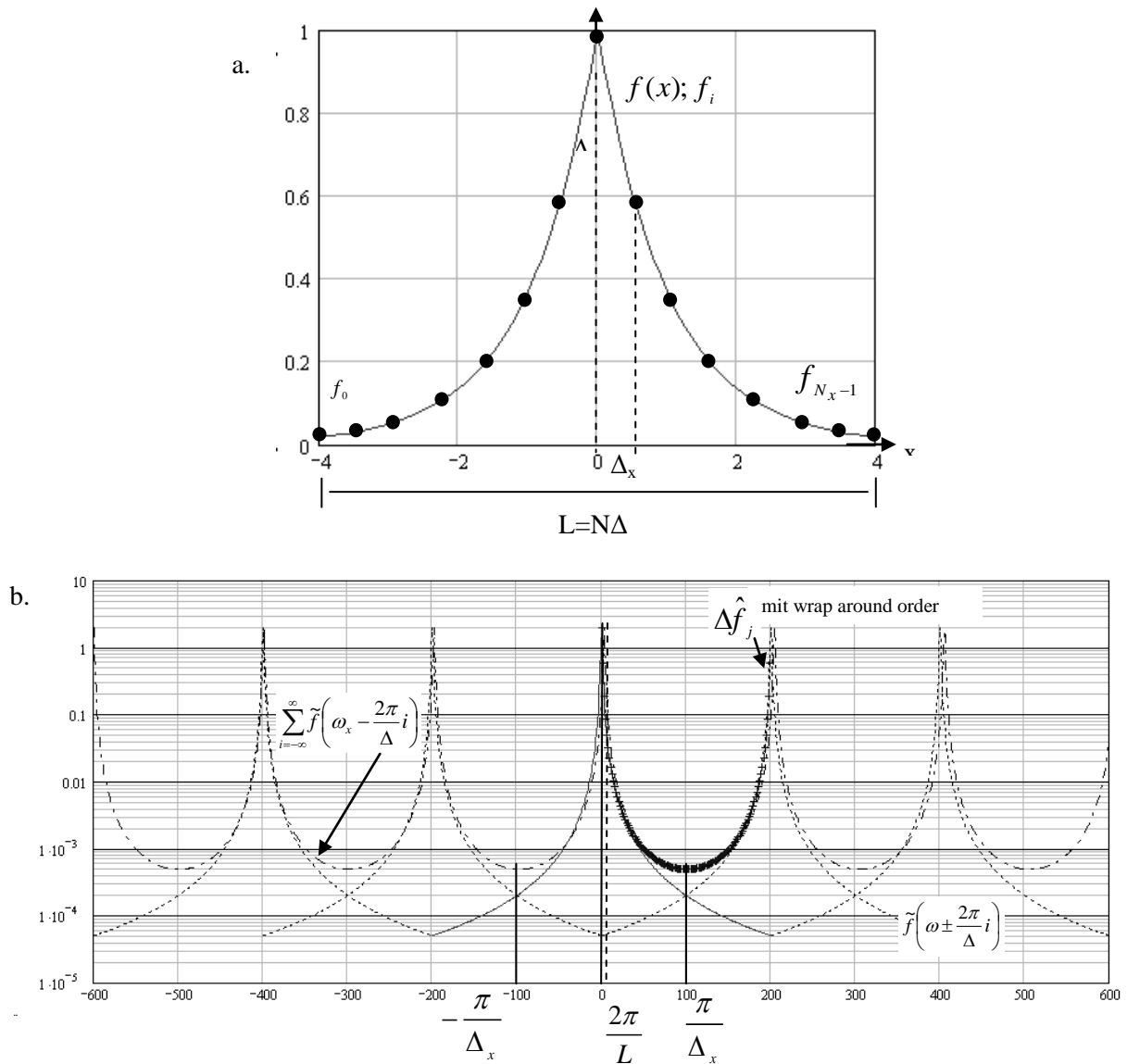


Abbildung 9.1 a. b.: Der Aliasing-Effekt im Frequenz Bereich.

Die Überlappungen in den Relationen (9.27) und (9.28) ergeben auf Grund der diskreten Messwerte im Frequenz- bzw. Ortsraum den Aliasing-Effekt.

Ein weiterer Effekt, der bei der Anwendung der FFT auftritt, ist das Gibbs-Phänomen. Wird eine periodische kontinuierliche Funktion $f(x)$ mit Periode L durch eine Fourier-Serie ausgedrückt,

$$f(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(l\omega_0)}{L} e^{il\omega_0 x}; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{L} \quad (9.29)$$

so steht in der Praxis nur eine endliche Anzahl an Werten zur Verfügung. Hierdurch ergibt sich zwangsläufig ein Fehler (Gibbs-Phänomen) bei der Transformation der Werte in den Ortsraum. Das Gibbs-Phänomen äußert sich in einem Überschwingen der in den Ortsraum transformierten Funktion, wie in Abbildung 9.3 gezeigt, an beiden Rändern der Diskontinuität.

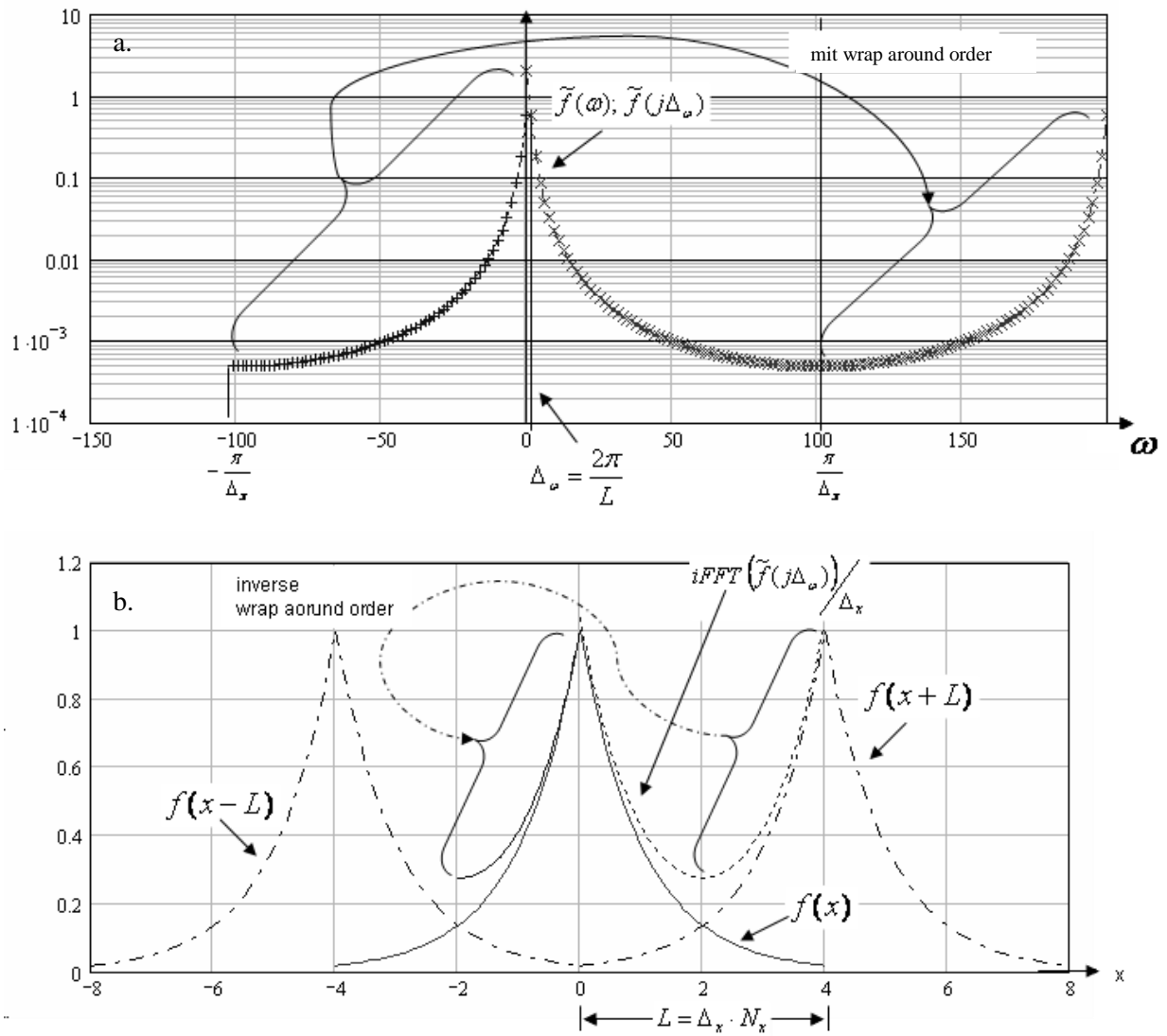
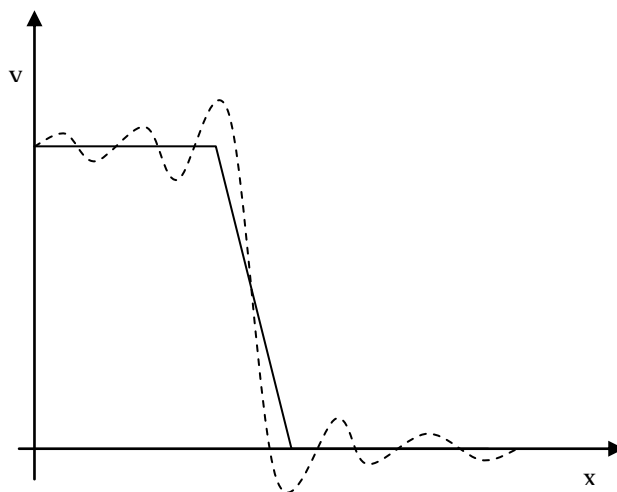
Abbildung 9.2: Der AliasingEffekt im Ortsbereich mit $L = 4$, $N_x = 124$ 

Abbildung 9.3: Schematische Darstellung des Gibbs-Phänomens

Anhang 3: Papkovitch-Neuber Potentiale

Im Falle fehlender Volumenkräfte kann die Lamè-Naviersche Gleichung wie folgt geschrieben werden.

$$\frac{G}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + G \cdot \Delta \vec{u} = 0 \quad (9.30)$$

Der Term kennzeichnet hierbei das Schubmodul. Gemäß dem Helmholtz-Theorem setzt sich das Verschiebungsfeld \vec{u} eines beliebigen elastostatischen Problems additiv aus einem rotationsfreiem Feld \vec{u}_1 und einem divergenzfreien Feld \vec{u}_2 zusammen.

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \quad (9.31)$$

Mit dem Ansatz $\vec{u}_1 = \nabla \phi$ (Wirbelfreiheit eines Gradientenfeldes) und $\vec{u}_2 = \nabla \times \vec{\Theta}$ (Quellenfreiheit eines Rotationsfeldes) ergibt sich die folgende Gleichung.

$$\vec{u} = \nabla \phi + \nabla \times \vec{\Theta} \quad (9.32)$$

Hierbei stellt ϕ eine Skalar- und $\vec{\Theta}$ ein Vektorpotential dar. Die Divergenz des Verschiebungsfeldes errechnet sich dann zu:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \nabla \cdot (\nabla \phi) + \nabla \cdot (\nabla \times \vec{\Theta}) = \Delta \phi \quad (9.33)$$

Eingesetzt in Glg. (9.30) ergibt:

$$\frac{G}{1-2\nu} \nabla(\Delta \phi) + G \cdot \Delta \vec{u} = 0 \quad (9.34)$$

Nach Vertauschung des Nabla und Laplace Operators folgt:

$$\Delta \left(\frac{G}{1-2\nu} \nabla \phi + G \cdot \vec{u} \right) = 0 \quad (9.35)$$

Eine Lösung der Laplace Gleichung ist:

$$\frac{G}{1-2\nu} \nabla \phi + G \cdot \vec{u} = c \cdot \vec{\Psi} \quad (9.36)$$

Hierbei kennzeichnet c eine später zu bestimmende skalare Konstante und $\vec{\Psi}$ ist ein Vektor aus harmonischen Funktionen, also Funktionen welche die Laplace Gleichung

$$\Delta \vec{\Psi} = 0 \quad (9.37)$$

erfüllen. Eine Umstellung nach \vec{u} ergibt:

$$\vec{u} = \frac{c}{G} \cdot \vec{\Psi} - \frac{1}{1-2\nu} \nabla \phi \quad (9.38)$$

Bildet man die Divergenz des Verschiebungsfeldes (Deformationsvektor), so ergibt sich unter Einbeziehung von Glg. (9.33):

$$\nabla \cdot \vec{u} = \Delta \phi = \frac{c}{G} \nabla \cdot \vec{\Psi} - \frac{1}{1-2\nu} \Delta \phi \quad (9.39)$$

Auflösen obiger Gleichung nach $\Delta \phi$ ergibt:

$$\Delta \phi = \frac{c \cdot (1-2\nu)}{G \cdot (2-2\nu)} \nabla \cdot \vec{\Psi} \quad (9.40)$$

Aus der Beziehung

$$\nabla \cdot \vec{\Psi} = \frac{1}{2} \Delta(\vec{r} \cdot \vec{\Psi}) \quad (9.41)$$

kann Glg. (9.40) wie folgt dargestellt werden.

$$\Delta \phi = \frac{c \cdot (1-2\nu)}{G \cdot 4 \cdot (1-\nu)} \Delta(\vec{r} \cdot \vec{\Psi}) \quad (9.42)$$

Hierbei steht \vec{r} für den Ortsvektor der kartesischen Koordinaten x, y und z. Für das Skalarpotential ϕ ergibt sich somit die folgende Lösung.

$$\phi = \frac{c \cdot (1-2\nu)}{G \cdot 4 \cdot (1-\nu)} \cdot (\Phi + \vec{r} \cdot \vec{\Psi}) \quad (9.43)$$

Wobei auch hier wieder gilt:

$$\Delta \Phi = 0 \quad (9.44)$$

Dies bedeutet Φ ist eine harmonische Funktion. Einsetzen von Glg. (9.43) in Glg. (9.38) ergibt:

$$\vec{u} = \frac{c}{G} \vec{\Psi} - \frac{c}{G \cdot 4 \cdot (1-\nu)} \nabla(\Phi + \vec{r} \cdot \vec{\Psi}) \quad (9.45)$$

Eine einfache Umstellung führt zu:

$$\frac{4 \cdot (1-\nu) \cdot G}{c} \cdot \vec{u} = 4 \cdot (1-\nu) \cdot \vec{\Psi} - \nabla(\Phi + \vec{r} \cdot \vec{\Psi}) \quad (9.46)$$

Die Darstellung der obigen Gleichung in Indexschreibweise ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{4 \cdot (1-\nu) \cdot G}{c} \cdot u_i &= 4 \cdot (1-\nu) \cdot \Psi_i - \Phi_{,i} - \Psi_i - x \cdot \Psi_{1,i} - y \cdot \Psi_{2,i} - z \cdot \Psi_{3,i} \\ &= (3-4 \cdot \nu) \cdot \Psi_i - \Phi_{,i} - x \cdot \Psi_{1,i} - y \cdot \Psi_{2,i} - z \cdot \Psi_{3,i} \end{aligned} \quad (9.47)$$

Gemäß Neuber [108] kann immer eine der drei harmonischen Potentiale Ψ_1 , Ψ_2 oder Ψ_3 gleich Null gesetzt werden, ohne die Vollständigkeit zu beeinträchtigen. Mit der Wahl der skalaren Konstante c zu $-2(1-\nu)$ und $\Psi_2=0$ folgt die in [87] und [113] verwendete Darstellung.

$$2 \cdot G \cdot u_i = \Phi_{,i} + (x \cdot \Psi_{1,i} + z \cdot \Psi_{3,i}) - (3-4 \cdot \nu) \cdot \Psi_i \quad (9.48)$$

Komponenten des Spannungstensors

Die Komponenten des Spannungstensors σ errechnen sich durch Anwenden von (9.49) auf die Dehnungs-Spannungsrelation (9.50).

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (9.49)$$

$$\sigma_{ij} = 2 \cdot G \cdot \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{spur}(\varepsilon_{ij}) \right) \quad (9.50)$$

Die Komponenten des Verzerrungstensors ε_{ij} errechnen sich mittels Glg (9.48) zu:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{4 \cdot G} (\Phi_{,ij} + (x_{,j} \Psi_{1,i} + z_{,j} \Psi_{3,i} + x \Psi_{1,ij} + z \Psi_{3,ij}) - (3-4\nu) \cdot (\Psi_{i,j})) \\ &\quad + \Phi_{,ji} + (x_{,i} \Psi_{1,j} + z_{,i} \Psi_{3,j} + x \Psi_{1,ji} + z \Psi_{3,ji}) - (3-4\nu) \cdot (\Psi_{j,i})) \\ &= \frac{1}{4 \cdot G} (2 \cdot \Phi_{,ij} + 2 \cdot (x \Psi_{1,ij} + z \Psi_{3,ij}) + (x_{,j} \Psi_{1,i} + z_{,j} \Psi_{3,i} + x_{,i} \Psi_{1,j} + z_{,i} \Psi_{3,j}) - (3-4\nu) \cdot (\Psi_{i,j} + \Psi_{j,i})) \end{aligned} \quad (9.51)$$

Für gleiche Indizes ($i=j$) ergibt sich

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= \frac{1}{4 \cdot G} (2 \cdot \Phi_{,ii} + 2 \cdot (x \Psi_{1,ii} + z \Psi_{3,ii}) + (x_{,i} \Psi_{1,i} + z_{,i} \Psi_{3,i} + x_{,i} \Psi_{1,i} + z_{,i} \Psi_{3,i}) - (3-4\nu) \cdot (\Psi_{i,i} + \Psi_{i,i})) \\ &= \frac{1}{4 \cdot G} (2 \cdot \Phi_{,ii} + 2 \cdot (x \Psi_{1,ii} + z \Psi_{3,ii}) + (x_{,i} \Psi_{1,i} + z_{,i} \Psi_{3,i} + x_{,i} \Psi_{1,i} + z_{,i} \Psi_{3,i}) - 2 \cdot (3-4\nu) \cdot (\Psi_{i,i})) \end{aligned} \quad (9.52)$$

Und aus den Bedingungen (9.37) und (9.44) folgt:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{4 \cdot G} ((x_{,i} \Psi_{1,i} + z_{,i} \Psi_{3,i} + x_{,i} \Psi_{1,i} + z_{,i} \Psi_{3,i}) - 2 \cdot (3-4\nu) \cdot (\Psi_{i,i})) \quad (9.53)$$

Die Spur des Verzerrungstensors ergibt sich dann gemäß:

$$\begin{aligned} \text{spur}(\varepsilon) &= \frac{1}{4 \cdot G} \sum_{i=1}^3 ((x_{,i} \Psi_{1,i} + z_{,i} \Psi_{3,i} + x_{,i} \Psi_{1,i} + z_{,i} \Psi_{3,i}) - 2 \cdot (3-4\nu) \cdot (\Psi_{i,i})) \\ &= \frac{1}{4 \cdot G} ((\Psi_{1,1} + \Psi_{1,1}) - 2 \cdot (3-4\nu) \cdot (\Psi_{1,1}) + (\Psi_{3,3} + \Psi_{3,3}) - 2 \cdot (3-4\nu) \cdot (\Psi_{3,3})) \\ &= \frac{-1}{2 \cdot G} ((2-4\nu) \cdot (\Psi_{1,1} + \Psi_{3,3})) \end{aligned} \quad (9.54)$$

Für ungleiche Indizes ($i \neq j$) des Verzerrungstensors vereinfacht sich Glg. (9.51) zu:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{4 \cdot G} (2 \cdot \Phi_{,ij} + 2 \cdot (x \Psi_{1,ij} + z \Psi_{3,ij}) + (\Psi_{j,i} + \Psi_{i,j}) - (3-4\nu) \cdot (\Psi_{i,j} + \Psi_{j,i})) \\ &= \frac{1}{2 \cdot G} (\Phi_{,ij} + (x \Psi_{1,ij} + z \Psi_{3,ij}) - (1-2\nu) \cdot (\Psi_{i,j} + \Psi_{j,i})) \end{aligned} \quad (9.55)$$

Einsetzen von (9.54) und (9.55) in (9.50) ergibt die in der Literatur ([87], [113]) verwendete Bestimmungsgleichung für die Komponenten des Spannungstensors σ .

$$\sigma_{ij} = \Phi_{,ij} + (x \Psi_{1,ij} + z \Psi_{3,ij}) - (1-2\nu) \cdot (\Psi_{i,j} + \Psi_{j,i}) - 2\nu \cdot (\Psi_{1,1} + \Psi_{3,3}) \cdot \delta_{ij} \quad (9.56)$$

Nebenrechnung:

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass nur drei harmonische Potentiale Berechnung der Deformationen und folglich der Spannungen benötigt werden. Gleichung (9.46) kann unter Verwendung von $\nu = -2(1-\nu)$ wie folgt dargestellt werden:

$$-2 \cdot G \cdot \vec{u} = 4 \cdot (1-\nu) \cdot \vec{\Psi} - \nabla Y; \quad \text{mit } Y = \Phi + \vec{r} \cdot \vec{\Psi} \quad (9.57)$$

Im Folgenden werden die vier harmonischen Potentiale Φ , Ψ_1 , Ψ_2 und Ψ_3 dergestalt substituiert (siehe hierzu auch [108]), dass keine y-Komponente des Vektorpotentials zur Lösung der obigen Gleichung benötigt wird.

Mit der Substitution

$$\Phi = \Phi' + 4 \cdot (1-\nu) \Psi_2' - (x \cdot \Psi_{2,1}' + y \cdot \Psi_{2,2}' + z \cdot \Psi_{2,3}') \quad (9.58)$$

$$\Psi_1 = \Psi_1' + \Psi_{2,1}' \quad (9.59)$$

$$\Psi_2 = \Psi_{2,2}' \quad (9.60)$$

$$\Psi_3 = \Psi_3' + \Psi_{2,3}' \quad (9.61)$$

ändert sich nichts an der Allgemeingültigkeit der vier harmonischen Potentiale, wobei die Φ' , Ψ_1' , Ψ_2' und Ψ_3' ebenfalls harmonische Potentiale darstellen. Mit einer weiteren Substitution

$$Y = Y' + 4 \cdot (1-\nu) \cdot \Psi_2' \quad (9.62)$$

ergibt sich durch einfache Umstellung und Anwendung von (9.58) bis (9.61):

$$\begin{aligned} Y' &= \Phi' + 4 \cdot (1-\nu) \Psi_2' - (x \cdot \Psi_{2,1}' + y \cdot \Psi_{2,2}' + z \cdot \Psi_{2,3}') \\ &\quad + x \cdot \Psi_1' + x \cdot \Psi_{2,1}' + y \cdot \Psi_{2,2}' + z \cdot \Psi_3' + z \cdot \Psi_{2,3}' - 4 \cdot (1-\nu) \cdot \Psi_2' \\ &= \Phi' + x \cdot \Psi_1' + z \cdot \Psi_3' \end{aligned} \quad (9.63)$$

Einsetzen von (9.63) in (9.62) ergibt:

$$Y = \Phi' + x \cdot \Psi_1' + z \cdot \Psi_3' + 4 \cdot (1-\nu) \cdot \Psi_2' \quad (9.64)$$

Die Darstellung von $\nabla Y'$ in Komponentenschreibweise stellt sich wie folgt dar:

$$Y_{',i} = \Phi_{',i} + x_{',i} \cdot \Psi_1' + x \cdot \Psi_{1,i}' + z_{',i} \cdot \Psi_3' + z \cdot \Psi_{3,i}' \quad (9.65)$$

Unter Verwendung von (9.58) bis (9.61) und (9.65) in (9.57) ergibt sich für die Komponenten von \vec{u} :

$$\begin{aligned} -2 \cdot G \cdot u_1 &= 4 \cdot (1-\nu) \cdot (\Psi_1' + \Psi_{2,1}') - (\Phi_{',1}' + \Psi_1' + x \cdot \Psi_{1,1}' + z \cdot \Psi_{3,1}' + 4 \cdot (1-\nu) \cdot \Psi_{2,1}') \\ &= 4 \cdot (1-\nu) \cdot \Psi_1' - (\Phi_{',1}' + \Psi_1' + x \cdot \Psi_{1,1}' + z \cdot \Psi_{3,1}') \\ &= 4 \cdot (1-\nu) \cdot \Psi_1' - Y_1' \end{aligned} \quad (9.66)$$

$$\begin{aligned} -2 \cdot G \cdot u_2 &= 4 \cdot (1-\nu) \cdot \Psi_{2,2}' - (\Phi_3' + x \cdot \Psi_{1,2}' + z \cdot \Psi_{3,2}' + 4 \cdot (1-\nu) \cdot \Psi_{2,2}') \\ &= -(\Phi_3' + x \cdot \Psi_{1,2}' + z \cdot \Psi_{3,2}') \\ &= -Y_1' \end{aligned} \quad (9.67)$$

$$\begin{aligned}
-2 \cdot G \cdot u_3 &= 4 \cdot (1 - \nu) \cdot (\Psi'_3 + \Psi'_{2,3}) - (\Phi'_{,3} + x \cdot \Psi'_{1,3} + \Psi'_3 + z \cdot \Psi'_{3,3} + 4 \cdot (1 - \nu) \cdot \Psi'_{2,3}) \\
&= 4 \cdot (1 - \nu) \cdot \Psi'_3 - (\Phi'_{,3} + x \cdot \Psi'_{1,3} + \Psi'_3 + z \cdot \Psi'_{3,3}) \\
&= 4 \cdot (1 - \nu) \cdot \Psi'_1 - Y'_3
\end{aligned} \tag{9.68}$$

Die Gleichungen (9.66) bis (9.68) enthalten nur noch die harmonischen Potentiale Φ' , Ψ'_1 und Ψ'_3 .

Anhang 4: Spannung in zz-Richtung

$$\tilde{\sigma}_{zz} = FT_{xy} \left(\frac{d}{dz} \frac{d}{dz} \Phi - 2\nu \left[\frac{d}{dx} \Psi_1 + \frac{d}{dz} \Psi_3 \right] \delta_{33} - (1-2\nu) \left[\frac{d}{dz} \Psi_3 + \frac{d}{dz} \Psi_3 \right] + x \frac{d}{dz} \frac{d}{dz} \Psi_1 + z \frac{d}{dz} \frac{d}{dz} \Psi_3 \right) \quad (9.69)$$

Für die Fouriertransformierte des ersten Term in obiger Gleichung gilt:

$$FT_{xy} \left(\frac{d}{dz} \frac{d}{dz} \Phi \right) = \frac{d}{dz} \frac{d}{dz} (Ae^{-\alpha z} + \bar{A}e^{\alpha z}) = \alpha^2 Ae^{-\alpha z} + \alpha^2 \bar{A}e^{\alpha z} \quad (9.70)$$

Der zweite Term in (9.69) kann wie folgt umgeformt werden

$$FT_{xy} \left(-2\nu \left[\frac{d}{dx} \Psi_1 + \frac{d}{dz} \Psi_3 \right] \delta_{11} \right) = -2\nu FT_{xy} \left(\frac{d}{dx} \Psi_1 \right) - 2\nu FT_{xy} \frac{d}{dz} \Psi_3$$

mit

$$-2\nu FT_{xy} \left(\frac{d}{dx} \Psi_1 \right) = -2\nu FT_y im FT_x (\Psi_1) = -2im \nu B e^{-\alpha z} - 2im \nu \bar{B} e^{\alpha z} \quad (9.71.a)$$

und

$$-2\nu FT_{xy} \frac{d}{dz} \Psi_3 = -2\nu \frac{d}{dz} (C e^{-\alpha z} + \bar{C} e^{\alpha z}) = 2\nu \alpha C e^{-\alpha z} - 2\nu \alpha \bar{C} e^{\alpha z} \quad (9.71b)$$

ergeben (9.71.a) und (9.71.b)

$$FT_{xy} \left(-2\nu \left[\frac{d}{dx} \Psi_1 + \frac{d}{dz} \Psi_3 \right] \delta_{11} \right) = -2im \nu B e^{-\alpha z} - 2im \nu \bar{B} e^{\alpha z} + 2\nu \alpha C e^{-\alpha z} - 2\nu \alpha \bar{C} e^{\alpha z} \quad (9.71)$$

Für Term drei in (9.69) ergibt sich

$$\begin{aligned} FT_{xy} \left[- (1-2\nu) \left[\frac{d}{dz} \Psi_3 + \frac{d}{dz} \Psi_3 \right] \right] &= -2(1-2\nu) FT_{xy} \left[\frac{d}{dz} \Psi_3 \right] = -2(1-2\nu) \frac{d}{dz} FT_{xy} (\Psi_3) \\ &= 2(1-2\nu) \alpha C e^{-\alpha z} - 2(1-2\nu) \alpha \bar{C} e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (9.72)$$

Die Fouriertransformation von Term 4 ergibt

$$\begin{aligned} FT_{xy} \left[x \frac{d}{dz} \frac{d}{dz} \Psi_1 \right] &= FT_y [FT_x (x \left(\frac{d}{dz} \frac{d}{dz} \Psi_1 \right))] = -\frac{1}{i} \frac{d}{dm} FT_y [FT_x \left(\frac{d}{dz} \frac{d}{dz} \Psi_1 \right)] = i \frac{d}{dm} \frac{d}{dz} \frac{d}{dz} FT_{xy} (\Psi_1) \\ &= i \frac{d}{dm} \frac{d}{dz} \frac{d}{dz} (B e^{-\alpha z} + \bar{B} e^{\alpha z}) = [i \alpha^2 B' + i 2m B - i \alpha z m B] e^{-\alpha z} + [i \alpha^2 \bar{B}' + 2im \bar{B} + i \alpha z m \bar{B}] e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (9.73)$$

Und der letzte Term in (9.69)

$$FT_{xy} \left[z \frac{d}{dz} \frac{d}{dz} \Psi_3 \right] = z \frac{d}{dz} \frac{d}{dz} [FT_{xy} \Psi_3] = z \alpha^2 C e^{-\alpha z} + z \alpha^2 \bar{C} e^{\alpha z} \quad (9.74)$$

Durch Einsetzen von (9.70), (9.71), (9.72), (9.73) und (9.74) in (9.69) folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{33} &= \alpha^2 A e^{-\alpha z} + \alpha^2 \bar{A} e^{\alpha z} - 2im \nu B e^{-\alpha z} - 2im \nu \bar{B} e^{\alpha z} \\
&+ 2\nu \alpha C e^{-\alpha z} - 2\nu \alpha \bar{C} e^{\alpha z} + 2(1-2\nu)\alpha C e^{-\alpha z} - 2(1-2\nu)\alpha \bar{C} e^{\alpha z} \\
&\quad + [i\alpha^2 B' + 2imB - i\alpha z m B] e^{-\alpha z} + [i\alpha^2 \bar{B}' + 2im\bar{B} + i\alpha z m \bar{B}] e^{\alpha z} + z\alpha^2 C e^{-\alpha z} + z\alpha^2 \bar{C} e^{\alpha z} \\
&= \left\{ \alpha^2 A + [-2im\nu + 2im - i\alpha z m]B + i\alpha^2 B' + [2\nu\alpha + 2(1-2\nu)\alpha + z\alpha^2]C \right\} e^{-\alpha z} \\
&\quad + \left\{ \alpha^2 \bar{A} + [-2im\nu + 2im + i\alpha z m]\bar{B} + i\alpha^2 \bar{B}' + [-2\nu\alpha - 2(1-2\nu)\alpha + z\alpha^2]\bar{C} \right\} e^{\alpha z} \\
&= \left\{ \alpha^2 [A + iB'] + [2im(1-\nu) - i\alpha z m]B + [2\nu\alpha + 2(1-2\nu)\alpha + z\alpha^2]C \right\} e^{-\alpha z} \\
&\quad + \left\{ \alpha^2 [\bar{A} + i\bar{B}'] + [2im(1-\nu) + i\alpha z m]\bar{B} + [-2\nu\alpha - 2(1-2\nu)\alpha + z\alpha^2]\bar{C} \right\} e^{\alpha z} \\
&= \left\{ \alpha^2 [A + iB'] + [2im(1-\nu) - i\alpha z m]B + [2\nu\alpha + 2(1-2\nu)\alpha + z\alpha^2]C \right\} e^{-\alpha z} \\
&\quad + \left\{ \alpha^2 [\bar{A} + i\bar{B}'] + [2im(1-\nu) + i\alpha z m]\bar{B} + [-2\nu\alpha - 2(1-2\nu)\alpha + z\alpha^2]\bar{C} \right\} e^{\alpha z} \tag{9.75}
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $D = A + iB'$ und $\bar{D} = \bar{A} + i\bar{B}'$ folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{zz} &= \left\{ \alpha^2 D + [2im(1-\nu) - i\alpha z m]B + [2(1-\nu)\alpha + z\alpha^2]C \right\} e^{-\alpha z} \\
&\quad + \left\{ \alpha^2 \bar{D} + [2im(1-\nu) + i\alpha z m]\bar{B} + [-2(1-\nu)\alpha + z\alpha^2]\bar{C} \right\} e^{\alpha z} \tag{6.185}
\end{aligned}$$

Anhang 5: Spannungen in xx-Richtung

$$\tilde{\sigma}_{xx} = FT_{xy} \left(\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \Phi - 2\nu \left[\frac{d}{dx} \Psi_1 + \frac{d}{dz} \Psi_3 \right] \delta_{11} - (1-2\nu) \left[\frac{d}{dx} \Psi_1 + \frac{d}{dx} \Psi_1 \right] + x \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \Psi_1 + z \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \Psi_3 \right) \quad (9.76)$$

Die Fouriertransformation des ersten Terms in Glg. (9.76)

$$FT_{xy} \left(\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \Phi \right) = FT_y (im FT_x \left(\frac{d}{dx} \Phi \right)) = im im FT_{xy} (\Phi) = -m^2 A e^{-\alpha z} - m^2 \bar{A} e^{\alpha z} \quad (9.77)$$

Für den zweiten Teil der Glg. (9.76) gilt

$$FT_{xy} \left(-2\nu \left[\frac{d}{dx} \Psi_1 + \frac{d}{dz} \Psi_3 \right] \delta_{11} \right) = -2\nu FT_{xy} \left(\frac{d}{dx} \Psi_1 \right) - 2\nu FT_{xy} \frac{d}{dz} \Psi_3$$

mit

$$-2\nu FT_{xy} \left(\frac{d}{dx} \Psi_1 \right) = -2\nu FT_y im FT_x (\Psi_1) = -2im \nu B e^{-\alpha z} - 2im \nu \bar{B} e^{\alpha z} \quad ((9.78.a))$$

und

$$-2\nu FT_{xy} \frac{d}{dz} \Psi_3 = -2\nu \frac{d}{dz} (C e^{-\alpha z} + \bar{C} e^{\alpha z}) = 2\nu \alpha C e^{-\alpha z} - 2\nu \alpha \bar{C} e^{\alpha z} \quad ((9.78.b))$$

ergeben (9.78.a) und (9.78.b)

$$FT_{xy} \left(-2\nu \left[\frac{d}{dx} \Psi_1 + \frac{d}{dz} \Psi_3 \right] \delta_{11} \right) = -2im \nu B e^{-\alpha z} - 2im \nu \bar{B} e^{\alpha z} + 2\nu \alpha C e^{-\alpha z} - 2\nu \alpha \bar{C} e^{\alpha z} \quad (9.78)$$

Teil drei aus (9.76) ergibt:

$$\begin{aligned} FT_{xy} \left[- (1-2\nu) \left[\frac{d}{dx} \Psi_1 + \frac{d}{dx} \Psi_1 \right] \right] &= -2(1-2\nu) FT_{xy} \left[\frac{d}{dx} \Psi_1 \right] = -2(1-2\nu) FT_y im FT_x (\Psi_1) \\ &= -2(1-2\nu) im B e^{-\alpha z} - 2(1-2\nu) im \bar{B} e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (9.79)$$

Der vierte Teil kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} FT_{xy} \left[x \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \Psi_1 \right] &= FT_y [FT_x (x \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \Psi_1)] = -\frac{1}{i} \frac{d}{dm} FT_y [FT_x (\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \Psi_1)] = -\frac{1}{i} \frac{d}{dm} FT_y [im FT_x (\frac{d}{dx} \Psi_1)] = -\frac{1}{i} \frac{d}{dm} FT_y [im im FT_x (\Psi_1)] \\ &= -i \frac{d}{dm} (m^2 (B e^{-\alpha z} + \bar{B} e^{\alpha z})) = [-i 2m B - im^2 B' + i \frac{zm^3}{\alpha} B] e^{-\alpha z} + [-i 2m \bar{B} - im^2 \bar{B}' - i \frac{zm^3}{\alpha} \bar{B}] e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (9.80)$$

Für den fünften Term in Glg. (9.76) gilt:

$$FT_{xy} \left[z \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \Psi_3 \right] = z FT_y [FT_x (\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \Psi_3)] = z im FT_y FT_x (\frac{d}{dx} \Psi_3) = -zm^2 C e^{-\alpha z} - zm^2 \bar{C} e^{\alpha z} \quad (9.81)$$

Einsetzen von (9.77), (9.78), (9.79), (9.80)

und (9.81) in (9.76) ergibt

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_{xx} &= -m^2 A e^{-\alpha z} - m^2 \bar{A} e^{\alpha z} - 2im\nu B e^{-\alpha z} - 2im\nu \bar{B} e^{\alpha z} + 2\nu\alpha C e^{-\alpha z} - 2\nu\alpha \bar{C} e^{\alpha z} - 2(1-2\nu)im B e^{-\alpha z} - 2(1-2\nu)im \bar{B} e^{\alpha z} \\
 &+ [-i2mB - im^2 B' + i\frac{zm^3}{\alpha} B] e^{-\alpha z} + [-i2m\bar{B} - im^2 \bar{B}' - i\frac{zm^3}{\alpha} \bar{B}] e^{\alpha z} - zm^2 C e^{-\alpha z} - zm^2 \bar{C} e^{\alpha z} \\
 &= \left\{ -m^2 A + \left[-2im\nu - i2m + i\frac{zm^3}{\alpha} - 2(1-2\nu)im \right] B - im^2 B' + [2\nu\alpha - zm^2] C \right\} e^{-\alpha z} \\
 &+ \left\{ -m^2 \bar{A} + \left[-2im\nu - i2m - i\frac{zm^3}{\alpha} - 2(1-2\nu)im \right] \bar{B} - im^2 \bar{B}' + [-2\nu\alpha - zm^2] \bar{C} \right\} e^{\alpha z} \\
 &= \left\{ -m^2 [A + iB'] + \left[-2im\nu - i2m + i\frac{zm^3}{\alpha} - 2(1-2\nu)im \right] B + [2\nu\alpha - zm^2] C \right\} e^{-\alpha z} \\
 &\quad + \left\{ -m^2 [\bar{A} + i\bar{B}'] + \left[-2im\nu - i2m - i\frac{zm^3}{\alpha} - 2(1-2\nu)im \right] \bar{B} + [-2\nu\alpha - zm^2] \bar{C} \right\} e^{\alpha z} \quad (9.82)
 \end{aligned}$$

Mit der Substitution $D = A + iB'$ und $\bar{D} = \bar{A} + i\bar{B}'$ folgt:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_{xx} &= \left\{ -m^2 D + \left[-2im(2-\nu) + i\frac{zm^3}{\alpha} \right] B + [2\nu\alpha - zm^2] C \right\} e^{-\alpha z} \\
 &\quad + \left\{ -m^2 \bar{D} + \left[-2im(2-\nu) - i\frac{zm^3}{\alpha} \right] \bar{B} + [-2\nu\alpha - zm^2] \bar{C} \right\} e^{\alpha z} \quad (6.185)
 \end{aligned}$$

Anhang 6: Spannung in yy-Richtung

$$\tilde{\sigma}_{yy} = FT_{xy} \left(\frac{d}{dy} \frac{d}{dy} \Phi - 2\nu \left[\frac{d}{dx} \Psi_1 + \frac{d}{dz} \Psi_3 \right] \delta_{22} - (1-2\nu) \left[\frac{d}{dy} \Psi_2 + \frac{d}{dy} \Psi_2 \right] + x \frac{d}{dy} \frac{d}{dy} \Psi_1 + z \frac{d}{dy} \frac{d}{dy} \Psi_3 \right) \quad (9.83)$$

Für die Fouriertransformierte des ersten Term in obiger Gleichung gilt

$$FT_{xy} \left(\frac{d}{dy} \frac{d}{dy} \Phi \right) = FT_x (inFT_y \left(\frac{d}{dy} \Phi \right)) = ininFT_{xy} (\Phi) = -n^2 A e^{-\alpha z} - n^2 \bar{A} e^{\alpha z} \quad (9.84)$$

Term zwei in (9.83) kann wie folgt umgeschrieben werden

$$FT_{xy} \left(-2\nu \left[\frac{d}{dx} \Psi_1 + \frac{d}{dz} \Psi_3 \right] \delta_{11} \right) = -2\nu FT_{xy} \left(\frac{d}{dx} \Psi_1 \right) - 2\nu FT_{xy} \left(\frac{d}{dz} \Psi_3 \right)$$

mit

$$-2\nu FT_{xy} \left(\frac{d}{dx} \Psi_1 \right) = -2\nu FT_y (imFT_x (\Psi_1)) = -2im \nu B e^{-\alpha z} - 2im \nu \bar{B} e^{\alpha z} \quad (9.85.a)$$

und

$$-2\nu FT_{xy} \left(\frac{d}{dz} \Psi_3 \right) = -2\nu \frac{d}{dz} (C e^{-\alpha z} + \bar{C} e^{\alpha z}) = 2\nu \alpha C e^{-\alpha z} - 2\nu \alpha \bar{C} e^{\alpha z} \quad (9.85.b)$$

ergibt (9.85.a) und (9.85.b):

$$FT_{xy} \left(-2\nu \left[\frac{d}{dx} \Psi_1 + \frac{d}{dz} \Psi_3 \right] \delta_{11} \right) = -2im \nu B e^{-\alpha z} - 2im \nu \bar{B} e^{\alpha z} + 2\nu \alpha C e^{-\alpha z} - 2\nu \alpha \bar{C} e^{\alpha z} \quad (9.85)$$

Für Term drei in (9.83) gilt mit $\Psi_2=0$:

$$FT_{xy} \left[- (1-2\nu) \left[\frac{d}{dy} \Psi_2 + \frac{d}{dy} \Psi_2 \right] \right] = 0 \quad (9.86)$$

Für den vierten Teil gilt:

$$\begin{aligned} FT_{xy} \left[x \frac{d}{dy} \frac{d}{dy} \Psi_1 \right] &= FT_y [FT_x (x \frac{d}{dy} \frac{d}{dy} \Psi_1)] = -\frac{1}{i} \frac{d}{dm} FT_y [FT_x (\frac{d}{dy} \frac{d}{dy} \Psi_1)] \\ &= -\frac{1}{i} \frac{d}{dm} FT_x [inFT_y (\frac{d}{dy} \Psi_1)] = -\frac{1}{i} \frac{d}{dm} FT_x [ininFT_x (\Psi_1)] \\ &= -i \frac{d}{dm} (n^2 (B e^{-\alpha z} + \bar{B} e^{\alpha z})) = [-in^2 B' + i \frac{zmn^2}{\alpha} B] e^{-\alpha z} + [-in^2 \bar{B}' - i \frac{zmn^2}{\alpha} \bar{B}] e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (9.87)$$

Term Nummer fünf in (9.83):

$$FT_{xy} \left[z \frac{d}{dy} \frac{d}{dy} \Psi_3 \right] = z FT_x [FT_y (\frac{d}{dy} \Psi_3)] = zinFT_x FT_y (\frac{d}{dy} \Psi_3) = -zn^2 C e^{-\alpha z} - zn^2 \bar{C} e^{\alpha z} \quad (9.88)$$

Einsetzen von (9.84), (9.85), (9.86), (9.87), und (9.88) in (9.83) ergibt

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{\sigma}}_{yy} &= -n^2 A e^{-\alpha z} - n^2 \bar{A} e^{\alpha z} - 2im\nu B e^{-\alpha z} - 2im\nu \bar{B} e^{\alpha z} + 2\nu\alpha C e^{-\alpha z} - 2\nu\alpha \bar{C} e^{\alpha z} \\
&\quad + [-in^2 B' + i \frac{zmn^2}{\alpha} B] e^{-\alpha z} + [-in^2 \bar{B}' - i \frac{zmn^2}{\alpha} \bar{B}] e^{\alpha z} - zn^2 C e^{-\alpha z} - zn^2 \bar{C} e^{\alpha z} \\
&= \left\{ -n^2 A + \left[-2im\nu + i \frac{zmn^2}{\alpha} B \right] B - in^2 B' + [2\nu\alpha - zn^2] C \right\} e^{-\alpha z} \\
&\quad + \left\{ -n^2 \bar{A} + \left[-2im\nu - i \frac{zmn^2}{\alpha} \bar{B} \right] \bar{B} - in^2 \bar{B}' + [-2\nu\alpha - zn^2] \bar{C} \right\} e^{\alpha z} \\
&= \left\{ -n^2 [A + iB'] + \left[-2im\nu + i \frac{zmn^2}{\alpha} B \right] B' + [2\nu\alpha - zn^2] C \right\} e^{-\alpha z} \\
&\quad + \left\{ -n^2 [\bar{A} + \bar{B}'] + \left[-2im\nu - i \frac{zmn^2}{\alpha} \bar{B} \right] \bar{B}' + [-2\nu\alpha - zn^2] \bar{C} \right\} e^{\alpha z} \tag{9.89}
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $D = A + iB'$ und $\bar{D} = \bar{A} + i\bar{B}'$ folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{\sigma}}_{yy} &= \left\{ -n^2 D + \left[-2im\nu + i \frac{zmn^2}{\alpha} B \right] B + [2\nu\alpha - zn^2] C \right\} e^{-\alpha z} \\
&\quad + \left\{ -n^2 \bar{D} + \left[-2im\nu - i \frac{zmn^2}{\alpha} \bar{B} \right] \bar{B} + [-2\nu\alpha - zn^2] \bar{C} \right\} e^{\alpha z} \tag{6.186}
\end{aligned}$$

Anhang 7: Spannungen in $zx(xz)$ -Richtung

$$\tilde{\sigma}_{zx} = FT_{xy} \left(\frac{d}{dz} \frac{d}{dx} \Phi - 2\nu \left[\frac{d}{dz} \Psi_1 + \frac{d}{dx} \Psi_3 \right] \delta_{31} - (1-2\nu) \left[\frac{d}{dz} \Psi_1 + \frac{d}{dx} \Psi_3 \right] + x \frac{d}{dz} \frac{d}{dx} \Psi_1 + z \frac{d}{dz} \frac{d}{dx} \Psi_3 \right) \quad (9.90)$$

Für den ersten Teil in Gleichung (9.90) ergibt sich die Fouriertransformierte wie:

$$FT_{xy} \left(\frac{d}{dz} \frac{d}{dx} \Phi \right) = FT_y \frac{d}{dz} im FT_x \Phi = im \frac{d}{dz} FT_{xy} \Phi = -im \alpha A e^{-\alpha z} + im \alpha \bar{A} e^{\alpha z} \quad (9.91)$$

Für Teil zwei gilt:

$$FT_{xy} \left(-2\nu \left[\frac{d}{dz} \Psi_1 + \frac{d}{dx} \Psi_3 \right] \delta_{31} \right) = 0 \quad (9.92)$$

Der dritte Term in Glg. (9.90) kann wie folgt umgeformt werden:

$$FT_{xy} \left[-(1-2\nu) \left[\frac{d}{dz} \Psi_1 + \frac{d}{dx} \Psi_3 \right] \right] = -(1-2\nu) FT_{xy} \left[\frac{d}{dz} \Psi_1 \right] - (1-2\nu) FT_{xy} \left[\frac{d}{dx} \Psi_3 \right]$$

Mit

$$-(1-2\nu) FT_{xy} \left[\frac{d}{dz} \Psi_1 \right] = -(1-2\nu) \frac{d}{dz} FT_{xy} [\Psi_1] = (1-2\nu) \alpha B e^{-\alpha z} - (1-2\nu) \alpha \bar{B} e^{\alpha z} \quad (9.93.a)$$

und

$$-(1-2\nu) FT_{xy} \left[\frac{d}{dx} \Psi_3 \right] = -(1-2\nu) FT_y im FT_x [\Psi_3] = -(1-2\nu) im FT_{xy} [\Psi_3] = -im(1-2\nu) C e^{-\alpha z} - im(1-2\nu) \bar{C} e^{\alpha z} \quad (9.93.b)$$

Glg. (9.93.a) und (9.93.b) ergeben:

$$FT_{xy} \left[-(1-2\nu) \left[\frac{d}{dz} \Psi_1 + \frac{d}{dx} \Psi_3 \right] \right] = (1-2\nu) \alpha B e^{-\alpha z} - (1-2\nu) \alpha \bar{B} e^{\alpha z} - im(1-2\nu) C e^{-\alpha z} - im(1-2\nu) \bar{C} e^{\alpha z} \quad (9.93)$$

Der vierte Term in (9.90) ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} FT_{xy} \left[x \frac{d}{dz} \frac{d}{dx} \Psi_1 \right] &= FT_y [FT_x (x \frac{d}{dx} \frac{d}{dz} \Psi_1)] = -\frac{1}{i} \frac{d}{dm} FT_y [FT_x (\frac{d}{dx} \frac{d}{dz} \Psi_1)] = i \frac{d}{dm} im FT_y \frac{d}{dz} FT_x (\Psi_1) = -\frac{d}{dm} \frac{d}{dz} m FT_{xy} (\Psi_1) \\ &= [\alpha B + m \alpha B' + \frac{m^2}{\alpha} B - m^2 z B] e^{-\alpha z} + [-\alpha \bar{B} - m \alpha \bar{B}' - \frac{m^2}{\alpha} \bar{B} - m^2 z \bar{B}] e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (9.94)$$

Der letzte Term ergibt:

$$FT_{xy} \left[z \frac{d}{dz} \frac{d}{dx} \Psi_3 \right] = z FT_y \frac{d}{dz} FT_x \frac{d}{dx} [\Psi_3] = z \frac{d}{dz} im FT_{xy} \Psi_3 = -z im \alpha C e^{-\alpha z} + z im \alpha \bar{C} e^{\alpha z} \quad (9.95)$$

Einsetzen von (9.91), (9.92), (9.93), (9.94) und (9.95) in (9.90) ergibt:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{zx} = & -im\alpha Ae^{-\alpha z} + im\alpha \bar{A}e^{\alpha z} + (1-2\nu)\alpha Be^{-\alpha z} - (1-2\nu)\alpha \bar{B}e^{\alpha z} - im(1-2\nu)Ce^{-\alpha z} - im(1-2\nu)\bar{C}e^{\alpha z} \\
& + [\alpha B + m\alpha B' + \frac{m^2}{\alpha}B - m^2 z B]e^{-\alpha z} + [-\alpha \bar{B} - m\alpha \bar{B}' - \frac{m^2}{\alpha}\bar{B} - m^2 z \bar{B}]e^{\alpha z} - zim\alpha Ce^{-\alpha z} + zim\alpha \bar{C}e^{\alpha z} \\
= & \left\{ -im\alpha A + \left[(1-2\nu)\alpha + \alpha + \frac{m^2}{\alpha} - m^2 z \right] B + m\alpha B' + [-im(1-2\nu) - zim\alpha] C \right\} e^{-\alpha z} \\
& + \left\{ im\alpha \bar{A} + \left[-(1-2\nu)\alpha - \alpha - \frac{m^2}{\alpha} - m^2 z \right] \bar{B} - m\alpha \bar{B}' + [-im(1-2\nu) + zim\alpha] \bar{C} \right\} e^{\alpha z} \\
= & \left\{ -im\alpha \left[A - \frac{1}{i} B' \right] + \left[2(1-\nu)\alpha + \frac{m^2}{\alpha} - m^2 z \right] B + [-im(1-2\nu) - zim\alpha] C \right\} e^{-\alpha z} \\
& + \left\{ im\alpha \left[\bar{A} - \frac{1}{i} \bar{B}' \right] + \left[-2(1-\nu)\alpha - \frac{m^2}{\alpha} - m^2 z \right] \bar{B} + [-im(1-2\nu) + zim\alpha] \bar{C} \right\} e^{\alpha z} \quad (9.96)
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $D = A + iB'$ und $\bar{D} = \bar{A} + i\bar{B}'$ folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{zx} = & \left\{ -im\alpha D + \left[2(1-\nu)\alpha + \frac{m^2}{\alpha} - m^2 z \right] B + [-im(1-2\nu) - zim\alpha] C \right\} e^{-\alpha z} \\
& + \left\{ im\alpha \bar{D} + \left[-2(1-\nu)\alpha - \frac{m^2}{\alpha} - m^2 z \right] \bar{B} + [-im(1-2\nu) + zim\alpha] \bar{C} \right\} e^{\alpha z} \quad (6.188)
\end{aligned}$$

Anhang 8: Spannung in zy(yz)–Richtung

$$\hat{\sigma}_{zy} = FT_{xy} \left(\frac{d}{dz} \frac{d}{dy} \Phi - 2\nu \left[\frac{d}{dz} \Psi_1 + \frac{d}{dy} \Psi_3 \right] \delta_{32} - (1-2\nu) \left[\frac{d}{dz} \Psi_2 + \frac{d}{dy} \Psi_3 \right] + x \frac{d}{dz} \frac{d}{dy} \Psi_1 + z \frac{d}{dz} \frac{d}{dy} \Psi_3 \right) \quad (9.97)$$

Term eins in (9.97) kann als Fouriertransformation wie folgt geschrieben werden:

$$FT_{xy} \left(\frac{d}{dz} \frac{d}{dy} \Phi \right) = FT_x \frac{d}{dz} in FT_y \Phi = in \frac{d}{dz} FT_{xy} \Phi = -in \alpha A e^{-\alpha z} + in \alpha \bar{A} e^{\alpha z} \quad (9.98)$$

Für den zweiten Term gilt:

$$FT_{xy} \left(-2\nu \left[\frac{d}{dz} \Psi_1 + \frac{d}{dy} \Psi_3 \right] \delta_{32} \right) = 0 \quad (9.99)$$

Auswerten des dritten Terms in Glg. (9.97) ergibt

$$FT_{xy} \left[-(1-2\nu) \left[\frac{d}{dz} \Psi_2 + \frac{d}{dy} \Psi_3 \right] \right] = -(1-2\nu) FT_{xy} \left[\frac{d}{dz} \Psi_2 \right] - (1-2\nu) FT_{xy} \left[\frac{d}{dy} \Psi_3 \right]$$

$$\text{Mit Randbedingung } \Psi_2 = 0 \quad FT_x \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x) \right] = i m \tilde{f}(m)$$

(6.183)

$$-(1-2\nu) FT_{xy} \left[\frac{d}{dz} \Psi_2 \right] = 0 \quad (9.100.a)$$

und

$$-(1-2\nu) FT_{xy} \left[\frac{d}{dy} \Psi_3 \right] = -(1-2\nu) FT_x in FT_y [\Psi_3] = -(1-2\nu) in FT_{xy} [\Psi_3] = -in(1-2\nu) C e^{-\alpha z} - in(1-2\nu) \bar{C} e^{\alpha z} \quad (9.100.b)$$

ergeben (9.100.a) und (9.100.b):

$$FT_{xy} \left[-(1-2\nu) \left[\frac{d}{dz} \Psi_1 + \frac{d}{dx} \Psi_3 \right] \right] = -in(1-2\nu) C e^{-\alpha z} - in(1-2\nu) \bar{C} e^{\alpha z} \quad (9.100)$$

Der vierte Teil aus kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} FT_{xy} \left[x \frac{d}{dz} \frac{d}{dy} \Psi_1 \right] &= [FT_y FT_x (x \left(\frac{d}{dz} \frac{d}{dy} \Psi_1 \right))] = -\frac{1}{i} \frac{d}{dm} FT_x [FT_y \left(\frac{d}{dy} \frac{d}{dz} \Psi_1 \right)] = i \frac{d}{dm} in FT_y \frac{d}{dz} FT_x (\Psi_1) \\ &= -\frac{d}{dm} \frac{d}{dz} n FT_{xy} (\Psi_1) = [n \alpha B' + \frac{nm}{\alpha} B - mn z B] e^{-\alpha z} + [-n \alpha \bar{B}' - \frac{mn}{\alpha} \bar{B} - mn z \bar{B}] e^{\alpha z} \quad (9.101) \end{aligned}$$

Teil fünf ergibt analog:

$$FT_{xy} \left[z \frac{d}{dz} \frac{d}{dy} \Psi_3 \right] = z FT_x \frac{d}{dz} FT_y \frac{d}{dy} [\Psi_3] = z \frac{d}{dz} in FT_{xy} \Psi_3 = -z in \alpha C e^{-\alpha z} + z in \alpha \bar{C} e^{\alpha z} \quad (9.102)$$

Zusammenfassen von (9.98), (9.99), (9.100), (9.101) und (9.102) ergibt

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{zy} &= -in\alpha A e^{-\alpha z} + in\alpha \bar{A} e^{\alpha z} - in(1-2\nu)C e^{-\alpha z} - in(1-2\nu)\bar{C} e^{\alpha z} + [n\alpha B' + \frac{nm}{\alpha}B - mnzB]e^{-\alpha z} \\
&\quad + [-n\alpha \bar{B}' - \frac{mn}{\alpha}\bar{B} - mnz\bar{B}]e^{\alpha z} - zin\alpha C e^{-\alpha z} + zin\alpha \bar{C} e^{\alpha z} \\
&= \left\{ -in\alpha A + \left[\frac{nm}{\alpha} - mnz \right] B + n\alpha B' + [-in(1-2\nu) - zin\alpha] C \right\} e^{-\alpha z} \\
&\quad + \left\{ in\alpha \bar{A} + \left[-\frac{mn}{\alpha} - mnz \right] \bar{B} - n\alpha \bar{B}' + [-in(1-2\nu) + zin\alpha] \bar{C} \right\} e^{\alpha z} \\
&= \left\{ -in\alpha \left[A - \frac{1}{i} B' \right] + \left[\frac{nm}{\alpha} - mnz \right] B + [-in(1-2\nu) - zin\alpha] C \right\} e^{-\alpha z} \\
&\quad + \left\{ in\alpha \left[\bar{A} - \frac{1}{i} \bar{B}' \right] + \left[-\frac{mn}{\alpha} - mnz \right] \bar{B} + [-in(1-2\nu) + zin\alpha] \bar{C} \right\} e^{\alpha z} \tag{9.103}
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $D = A + iB'$ und $\bar{D} = \bar{A} + i\bar{B}'$ folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{zy} &= \left\{ -in\alpha D + \left[\frac{nm}{\alpha} - mnz \right] B + [-in(1-2\nu) - zin\alpha] C \right\} e^{-\alpha z} \\
&\quad + \left\{ in\alpha \bar{D} + \left[-\frac{mn}{\alpha} - mnz \right] \bar{B} + [-in(1-2\nu) + zin\alpha] \bar{C} \right\} e^{\alpha z} \tag{6.189}
\end{aligned}$$

Anhang 9: Spannung in xy (yx)–Richtung

$$\tilde{\sigma}_{xy} = FT_{xy} \left(\frac{d}{dx} \frac{d}{dy} \Phi - 2\nu \left[\frac{d}{dx} \Psi_1 + \frac{d}{dz} \Psi_3 \right] \delta_{12} - (1-2\nu) \left[\frac{d}{dx} \Psi_2 + \frac{d}{dy} \Psi_1 \right] + x \frac{d}{dx} \frac{d}{dy} \Psi_1 + z \frac{d}{dx} \frac{d}{dy} \Psi_3 \right) \quad (9.104)$$

Die Fouriertransformation angewandt auf Term eins in (9.104) ergibt:

$$FT_{xy} \left(\frac{d}{dx} \frac{d}{dy} \Phi \right) = FT_x \frac{d}{dx} in FT_y \Phi = in im FT_{xy} \Phi = -nmAe^{-\alpha z} - nm\bar{A}e^{\alpha z} \quad (9.105)$$

Für den nächsten Term gilt:

$$FT_{xy} \left(-2\nu \left[\frac{d}{dx} \Psi_1 + \frac{d}{dz} \Psi_3 \right] \delta_{12} \right) = 0 \quad (9.106)$$

Term drei aus Gleichung (9.104) ergibt mit Randbedingung $\Psi_2 = 0$:

$$\begin{aligned} FT_{xy} \left[- (1-2\nu) \left[\frac{d}{dx} \Psi_2 + \frac{d}{dy} \Psi_1 \right] \right] &= - (1-2\nu) FT_{xy} \left[\frac{d}{dy} \Psi_1 \right] = - (1-2\nu) in FT_{xy} (\Psi_1) \\ &= - (1-2\nu) in Be^{-\alpha z} - (1-2\nu) in \bar{B}e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (9.107)$$

Der vierte Teil von Glg. (9.104) kann umgeschrieben werden zu:

$$\begin{aligned} FT_{xy} \left[x \frac{d}{dx} \frac{d}{dy} \Psi_1 \right] &= FT_y \left[FT_x \left(x \left(\frac{d}{dx} \frac{d}{dy} \Psi_1 \right) \right) \right] = - \frac{1}{i} \frac{d}{dm} FT_y \left[FT_x \left(\frac{d}{dx} \frac{d}{dy} \Psi_1 \right) \right] = i \frac{d}{dm} im FT_y \frac{d}{dy} FT_x (\Psi_1) = i \frac{d}{dm} i \min FT_{xy} (\Psi_1) \\ &= [-inB - inmB' + \frac{nnmz^2}{\alpha} B]e^{-\alpha z} + [-in\bar{B} - inm\bar{B}' - \frac{nnmz^2}{\alpha} \bar{B}]e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (9.108)$$

Auswertung des letzten Terms aus Glg. (9.104) ergibt:

$$FT_{xy} \left[z \frac{d}{dx} \frac{d}{dy} \Psi_3 \right] = z FT_x \frac{d}{dx} FT_y \frac{d}{dy} [\Psi_3] = -znm FT_{xy} \Psi_3 = -znmCe^{-\alpha z} - znm\bar{C}e^{\alpha z} \quad (9.109)$$

Formeln (9.105), (9.106), (9.107), (9.108) und (9.109) eingesetzt in (9.104) ergibt

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xy} &= -nmAe^{-\alpha z} - nm\bar{A}e^{\alpha z} - (1-2\nu)inBe^{-\alpha z} - (1-2\nu)in\bar{B}e^{\alpha z} + [-inB - inmB' + \frac{nnmz^2}{\alpha} B]e^{-\alpha z} \\ &\quad + [-in\bar{B} - inm\bar{B}' - \frac{nnmz^2}{\alpha} \bar{B}]e^{\alpha z} - znmCe^{-\alpha z} - znm\bar{C}e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (9.110)$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ -nmA + \left[- (1-2\nu)in - in + \frac{nnmz^2}{\alpha} \right] B - inmB' + [-znm]C \right\} e^{-\alpha z} \\ &\quad + \left\{ -nm\bar{A} + \left[- (1-2\nu)in - in + \frac{nnmz^2}{\alpha} \right] \bar{B} - inm\bar{B}' + [-znm]\bar{C} \right\} e^{\alpha z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ -nm[A + B'] + \left[-2(1-\nu)in + \frac{nnmz^2}{\alpha} \right] B + [-znm]C \right\} e^{-\alpha z} \\
&+ \left\{ -nm[\bar{A} + \bar{B}'] + \left[-2(1-\nu)in - \frac{nnmz^2}{\alpha} \right] \bar{B} + [-znm]\bar{C} \right\} e^{\alpha z}
\end{aligned} \tag{9.111}$$

Mit der Substitution $D = A + iB'$ und $\bar{D} = \bar{A} + i\bar{B}'$ folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{\sigma}}_{xy} &= \left\{ -nmD + \left[-2(1-\nu)in + \frac{nnmz^2}{\alpha} \right] B + [-znm]C \right\} e^{-\alpha z} \\
&+ \left\{ -nm\bar{D} + \left[-2(1-\nu)in - \frac{nnmz^2}{\alpha} \right] \bar{B} + [-znm]\bar{C} \right\} e^{\alpha z}
\end{aligned} \tag{6.190}$$

Anhang 10: Deformation in z-Richtung

$$2G\tilde{u}_z = FT_{xy} \left(\frac{d}{dz} \Phi + x \frac{d}{dz} \Psi_1 + z \frac{d}{dz} \Psi_3 - (3-4\nu) \Psi_3 \right) \quad (9.112)$$

Für die Fourier-transformierte von $\frac{d}{dz} \Phi$ ergibt sich:

$$FT_{xy} \left(\frac{d}{dz} \Phi \right) = \frac{d}{dz} (FT_{xy} \Phi) = \frac{d}{dz} (Ae^{-\alpha z} + \bar{A}e^{\alpha z}) = -\alpha A e^{-\alpha z} + \alpha \bar{A} e^{\alpha z} \quad (9.113)$$

Der zweite Term in Formel (9.112) kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} FT_{xy} \left(x \frac{d}{dz} \Psi_1 \right) &= FT_y (FT_x (x \frac{d}{dz} \Psi_1)) = FT_y \left(-\frac{1}{i} \frac{d}{dm} FT_x \left(\frac{d}{dz} \Psi_1 \right) \right) \\ &= \frac{d}{dz} \left(-\frac{1}{i} \frac{d}{dm} FT_{xy} (\Psi_1) \right) = -\frac{1}{i} \frac{d}{dz} \frac{d}{dm} (B e^{-\alpha z} + \bar{B} e^{\alpha z}) \\ &= [imzB - i\alpha B' - i\frac{m}{\alpha} B] e^{-\alpha z} + [imz\bar{B} + i\alpha \bar{B}' + i\frac{m}{\alpha} \bar{B}] e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (9.114)$$

Der dritte Term in Formel (9.112) ergibt:

$$\begin{aligned} FT_{xy} \left(z \frac{d}{dz} \Psi_3 \right) &= z \frac{d}{dz} FT_{xy} \Psi_3 = z \frac{d}{dz} (C e^{-\alpha z} + \bar{C} e^{\alpha z}) \\ &= -z\alpha C e^{-\alpha z} + z\alpha \bar{C} e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (9.115)$$

Für den letzten Term kann geschrieben werden:

$$FT_{xy} ((3-4\nu) \Psi_3) = (3-4\nu) C e^{-\alpha z} + (3-4\nu) \bar{C} e^{\alpha z} \quad (9.116)$$

Einsetzen von (9.113), (9.114), (9.115) und (9.116) in (9.112) und umstellen nach den Exponentialthermen ergibt:

$$\begin{aligned} 2G\tilde{u}_z &= -\alpha A e^{-\alpha z} + \alpha \bar{A} e^{\alpha z} + [imzB - i\alpha B' - i\frac{m}{\alpha} B] e^{-\alpha z} + [imz\bar{B} + i\alpha \bar{B}' + i\frac{m}{\alpha} \bar{B}] e^{\alpha z} \\ &\quad - z\alpha C e^{-\alpha z} + z\alpha \bar{C} e^{\alpha z} - (3-4\nu) C e^{-\alpha z} - (3-4\nu) \bar{C} e^{\alpha z} \\ &= \left[-\alpha A + \left[-i\frac{m}{\alpha} + imz \right] B - i\alpha B' + [-(3-4\nu) - z\alpha] C \right] e^{-\alpha z} \\ &\quad + \left[\alpha \bar{A} + \left[i\frac{m}{\alpha} + imz \right] \bar{B} + i\alpha \bar{B}' + [-(3-4\nu) + z\alpha] \bar{C} \right] e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (9.117)$$

Mit der Substitution $D = A + iB'$ und $\bar{D} = \bar{A} + i\bar{B}'$ folgt:

$$\begin{aligned} 2G\tilde{u}_z &= \left[-\alpha [A + iB'] + \left[-i\frac{m}{\alpha} + imz \right] B + [-(3-4\nu) - z\alpha] C \right] e^{-\alpha z} + \left[\alpha [\bar{A} + i\bar{B}'] + \left[i\frac{m}{\alpha} + imz \right] \bar{B} + [-(3-4\nu) + z\alpha] \bar{C} \right] e^{\alpha z} \\ &= \left[-\alpha D + \left[-i\frac{m}{\alpha} + imz \right] B + [-(3-4\nu) - z\alpha] C \right] e^{-\alpha z} + \left[\alpha \bar{D}' + \left[i\frac{m}{\alpha} + imz \right] \bar{B} + [-(3-4\nu) + z\alpha] \bar{C} \right] e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (6.191)$$

Anhang 11: Deformation in x-Richtung

$$2\tilde{G}\tilde{u}_x = FT_{xy} \left(\frac{d}{dx} \Phi + x \frac{d}{dx} \Psi_1 + z \frac{d}{dx} \Psi_3 - (3-4\nu) \Psi_1 \right) \quad (9.118)$$

Für die Fourier-transformierte von $\frac{d}{dx} \Phi$ ergibt sich:

$$FT_{xy} \left(\frac{d}{dx} \Phi \right) = FT_y (im FT_x (\Phi)) = im FT_{xy} (\Phi) = im A e^{-\alpha} + im \bar{A} e^{\alpha} \quad (9.119)$$

Der zweite Term in Formel (9.118) kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} FT_{xy} \left(x \frac{d}{dx} \Psi_1 \right) &= FT_y (FT_x (x \frac{d}{dx} \Psi_1)) = FT_y \left(-\frac{1}{i} \frac{d}{dm} FT_x \left(\frac{d}{dx} \Psi_1 \right) \right) \\ &= FT_y \left(-\frac{1}{i} \frac{d}{dm} im FT_x \Psi_1 \right) = -\frac{1}{i} \frac{d}{dm} (im FT_{xy} \Psi_1) \\ &= -\frac{d}{dm} (m B e^{-\alpha} + m \bar{B} e^{\alpha}) \\ &= [-B + B \frac{m^2 z}{\alpha} - B' m] e^{-\alpha} + [-\bar{B} - \bar{B} \frac{m^2 z}{\alpha} - \bar{B}' m] e^{\alpha} \end{aligned} \quad (9.120)$$

Der dritte Term in Formel (9.118) kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} FT_{xy} \left(z \frac{d}{dx} \Psi_3 \right) &= z FT_y (FT_x \left(\frac{d}{dx} \Psi_3 \right)) = z FT_y (im FT_x \Psi_3) = z im FT_{xy} \Psi_3 \\ &= im z C e^{-\alpha} + im z \bar{C} e^{\alpha} \end{aligned} \quad (9.121)$$

Für den letzten Term in (9.118) gilt:

$$FT_{xy} ((3-4\nu) \Psi_1) = -(3-4\nu) B e^{-\alpha} - (3-4\nu) \bar{B} e^{\alpha} \quad (9.122)$$

Einsetzen von (9.119), (9.120), (9.121) und (9.122) in (9.118) und umstellen ergibt:

$$\begin{aligned} 2\tilde{G}\tilde{u}_x &= im A e^{-\alpha} + im \bar{A} e^{\alpha} + [-B + B \frac{m^2 z}{\alpha} + B' m] e^{-\alpha} + [-\bar{B} - \bar{B} \frac{m^2 z}{\alpha} - \bar{B}' m] e^{\alpha} \\ &\quad + im z C e^{-\alpha} + im z \bar{C} e^{\alpha} + (3-4\nu) B e^{-\alpha} + (3-4\nu) \bar{B} e^{\alpha} \\ &= \left\{ im A + \left[-1 + \frac{m^2 z}{\alpha} - (3-4\nu) \right] B - B' m + im z C \right\} e^{-\alpha} + \left\{ im \bar{A} + \left[-1 - \frac{m^2 z}{\alpha} - (3-4\nu) \right] \bar{B} - \bar{B}' m + im z \bar{C} \right\} e^{\alpha} \\ &= \left\{ im A + \left[\frac{m^2 z}{\alpha} - (4-4\nu) \right] B - B' m + im z C \right\} e^{-\alpha} + \left\{ im \bar{A} + \left[-\frac{m^2 z}{\alpha} - (4-4\nu) \right] \bar{B} - \bar{B}' m + im z \bar{C} \right\} e^{\alpha} \end{aligned} \quad (9.123)$$

Mit der Substitution $D = A + iB'$ und $\bar{D} = \bar{A} + i\bar{B}'$ folgt:

$$\begin{aligned} 2\tilde{G}\tilde{u}_x &= \left\{ im \left(A - \frac{B'}{i} \right) + \left[\frac{m^2 z}{\alpha} - (4-4\nu) \right] B + im z C \right\} e^{-\alpha} + \left\{ im \left(\bar{A} - \frac{\bar{B}'}{i} \right) + \left[-\frac{m^2 z}{\alpha} - (4-4\nu) \right] \bar{B} + im z \bar{C} \right\} e^{\alpha} \\ &= \left\{ im D + \left[\frac{m^2 z}{\alpha} - (4-4\nu) \right] B + im z C \right\} e^{-\alpha} + \left\{ im \bar{D} + \left[-\frac{m^2 z}{\alpha} - (4-4\nu) \right] \bar{B} + im z \bar{C} \right\} e^{\alpha} \end{aligned} \quad (6.192)$$

Anhang 12: Deformation in y-Richtung

$$2G\tilde{u}_y = FT_{xy} \left(\frac{d}{dy} \Phi + x \frac{d}{dy} \Psi_1 + z \frac{d}{dy} \Psi_3 - (3-4\nu) \Psi_2 \right) \quad (9.124)$$

Für die Fourier-transformierte von $\frac{d}{dy} \Phi$ ergibt sich:

$$FT_{xy} \left(\frac{d}{dy} \Phi \right) = FT_x (inFT_y (\Phi)) = inFT_{xy} (\Phi) = inAe^{-\alpha z} + in\bar{A}e^{\alpha z} \quad (9.125)$$

Der zweite Term in Formel (9.124) kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} FT_{xy} \left(x \frac{d}{dy} \Psi_1 \right) &= FT_y (FT_x (x \frac{d}{dy} \Psi_1)) = FT_y \left(-\frac{1}{i} \frac{d}{dm} FT_x \left(\frac{d}{dy} \Psi_1 \right) \right) \\ &= \left(-\frac{1}{i} \frac{d}{dm} FT_x FT_y \left(\frac{d}{dy} \Psi_1 \right) \right) = -\frac{1}{i} \frac{d}{dm} (inFT_{xy} \Psi_1) \\ &= -\frac{d}{dm} (nBe^{-\alpha z} + n\bar{B}e^{\alpha z}) \\ &= \left[B \frac{mnz}{\alpha} - B'n \right] e^{-\alpha z} + \left[-\bar{B} \frac{mnz}{\alpha} - \bar{B}'n \right] e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (9.126)$$

Für den dritten Term in (9.124) gilt:

$$\begin{aligned} FT_{xy} \left(z \frac{d}{dy} \Psi_3 \right) &= z FT_x (FT_y \left(\frac{d}{dy} \Psi_3 \right)) = z FT_x (inFT_y \Psi_3) = zinFT_{xy} \Psi_3 \\ &= inzCe^{-\alpha z} + inz\bar{C}e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (9.127)$$

Gemäß Randbedingung $\Psi_2=0$ gilt:

$$FT_{xy} ((3-4\nu)\Psi_2) = 0 \quad (9.128)$$

Einsetzen von (9.125), (9.126), (9.127) und (9.128) in (9.124) und umstellen nach den Exponentialthermen ergibt:

$$\begin{aligned} 2G\tilde{u}_y &= inAe^{-\alpha z} + in\bar{A}e^{\alpha z} + \left[B \frac{mnz}{\alpha} - B'n \right] e^{-\alpha z} + \left[-\bar{B} \frac{mnz}{\alpha} - \bar{B}'m \right] e^{\alpha z} + inzCe^{-\alpha z} + inz\bar{C}e^{\alpha z} \\ &= \left\{ inA + \left[B \frac{mnz}{\alpha} - B'n \right] + inzC \right\} e^{-\alpha z} + \left\{ in\bar{A} + \left[-\bar{B} \frac{mnz}{\alpha} - \bar{B}'m \right] + inzC \right\} e^{\alpha z} \\ &= \left\{ in \left(A - \frac{B'}{i} \right) + B \frac{mnz}{\alpha} + inzC \right\} e^{-\alpha z} + \left\{ in \left(\bar{A} - \frac{\bar{B}'}{i} \right) - \bar{B} \frac{mnz}{\alpha} + inzC \right\} e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (9.129)$$

Mit der Substitution $D = A + iB'$ und $\bar{D} = \bar{A} + i\bar{B}'$ folgt:

$$2G\tilde{u}_y = \left\{ inD + B \frac{mnz}{\alpha} + inzC \right\} e^{-\alpha z} + \left\{ in\bar{D} - \bar{B} \frac{mnz}{\alpha} + inzC \right\} e^{\alpha z} \quad (6.193)$$

Anhang 13: Koeffizienten des linearen Gleichungssystem (Berechnung der PN-Koeffizienten)

Die Komponenten der ersten Zeile der Koeffizientenmatrix lauten

(Druckverteilung an der Oberfläche)

für Zwei- und Dreischichtsysteme:

$$M_{1,1} = \alpha^2, \quad M_{1,2} = \alpha^2, \quad M_{1,3} = 2im(1 - \nu_1), \quad M_{1,4} = 2im(1 - \nu_1), \quad M_{1,5} = 2\alpha(1 - \nu_1), \\ M_{1,6} = -2\alpha(1 - \nu_1)$$

Für Zweischichtsystem gilt:

$$M_{1,7} = M_{1,8} = M_{1,9} = 0$$

Für Dreischichtsystem gilt:

$$M_{1,7} = M_{1,8} = M_{1,9} = M_{1,10} = M_{1,11} = M_{1,12} = M_{1,13} = M_{1,14} = M_{1,15} = 0$$

Die Komponenten der zweiten Zeile der Koeffizientenmatrix lauten

(Scherkraft in X-Richtung an der Oberfläche)

für Zwei- und Dreischichtsysteme:

$$M_{2,1} = -im\alpha, \quad M_{2,2} = im\alpha, \quad M_{2,3} = 2\alpha(1 - \nu_1) + \frac{m^2}{\alpha}, \quad M_{2,4} = -2\alpha(1 - \nu_1) - \frac{m^2}{\alpha}, \\ M_{2,5} = -im(1 - 2\nu_1), \quad M_{2,6} = -im(1 - 2\nu_1)$$

Für Zweischichtsysteme gilt:

$$M_{2,7} = M_{2,8} = M_{2,9} = 0$$

Für Dreischichtsysteme gilt:

$$M_{2,7} = M_{2,8} = M_{2,9} = M_{2,10} = M_{2,11} = M_{2,12} = M_{2,13} = M_{2,14} = M_{2,15} = 0$$

Die Komponenten der dritten Zeile der Koeffizientenmatrix lauten

(Scherkraft an der Oberfläche in y Richtung)

für Zwei- und Dreischichtsysteme:

$$M_{3,1} = -in\alpha, \quad M_{3,2} = in\alpha, \quad M_{3,3} = \frac{mn}{\alpha}, \quad M_{3,4} = -\frac{mn}{\alpha}, \quad M_{3,5} = -in(1 - 2\nu_1), \quad M_{3,6} = -in(1 - 2\nu_1)$$

Für Zweischichtsysteme gilt:

$$M_{3,7} = M_{3,8} = M_{3,9} = 0$$

Für Dreischichtsysteme gilt:

$$M_{3,7} = M_{3,8} = M_{3,9} = M_{3,10} = M_{3,11} = M_{3,12} = M_{3,13} = M_{3,14} = M_{3,15} = 0$$

Die Komponenten der vierten Zeile der Koeffizientenmatrix lauten

(Kontinuität von σ_{zz} an der Schichtgrenze 1)

für Zwei- und Dreischichtsysteme:

$$\begin{aligned} M_{4,1} &= \alpha^2 e^{-\alpha d_1}, & M_{4,2} &= \alpha^2 e^{\alpha d_1}, & M_{4,3} &= (2im(1-\nu_1) - imd_1\alpha) e^{-\alpha d_1}, \\ M_{4,4} &= (2im(1-\nu_1) + imd_1\alpha) e^{\alpha d_1}, & M_{4,5} &= (2\alpha(1-\nu_1) + d_1\alpha^2) e^{-\alpha d_1}, \\ M_{4,6} &= (-2\alpha(1-\nu_1) + d_1\alpha^2) e^{\alpha d_1}, & M_{4,7} &= -\alpha^2 e^{-\alpha d_1}, & M_{4,8} &= (-2im(1-\nu_2) + imd_1\alpha) e^{-\alpha d_1}, \\ M_{4,9} &= (-2\alpha(1-\nu_2) - d_1\alpha^2) e^{-\alpha d_1} \end{aligned}$$

Für Dreischichtsysteme gilt:

$$\begin{aligned} M_{4,10} &= -\alpha^2 e^{\alpha d_1}, & M_{4,11} &= (-2im(1-\nu_2) - imd_1\alpha) e^{\alpha d_1}, & M_{4,12} &= (2\alpha(1-\nu_2) - d_1\alpha^2) e^{\alpha d_1} \\ M_{4,13} &= M_{4,14} = M_{4,15} = 0 \end{aligned}$$

Die Komponenten der fünften Zeile der Koeffizientenmatrix lauten

(Kontinuität von σ_{zy} an der Schichtgrenze 1)

für Zwei- und Dreischichtsysteme:

$$\begin{aligned} M_{5,1} &= -in\alpha e^{-\alpha d_1}, & M_{5,2} &= in\alpha e^{\alpha d_1}, & M_{5,3} &= \left(\frac{mn}{\alpha} - mnd_1\right) e^{-\alpha d_1}, & M_{5,4} &= \left(-\frac{mn}{\alpha} - mnd_1\right) e^{-\alpha d_1}, \\ M_{5,5} &= (-in(1-2\nu_1) - ind_1\alpha) e^{-\alpha d_1}, & M_{5,6} &= (-in(1-2\nu_1) + ind_1\alpha) e^{\alpha d_1}, & M_{5,7} &= in\alpha e^{-\alpha d_1}, \\ M_{5,8} &= \left(-\frac{mn}{\alpha} + mnd_1\right) e^{-\alpha d_1}, & M_{5,9} &= (in(1-2\nu_2) + ind_1\alpha) e^{-\alpha d_1} \end{aligned}$$

Für Dreischichtsysteme gilt:

$$\begin{aligned} M_{5,10} &= -in\alpha e^{\alpha d_1}, & M_{5,11} &= \left(\frac{mn}{\alpha} + mnd_1\right) e^{\alpha d_1}, & M_{5,12} &= (in(1-2\nu_2) - ind_1\alpha) e^{\alpha d_1} \\ M_{5,13} &= M_{5,14} = M_{5,15} = 0 \end{aligned}$$

Die Komponenten der sechsten Zeile der Koeffizientenmatrix lauten

(Kontinuität von σ_{zx} an der Schichtgrenze 1)

für Zwei- und Dreischichtsysteme:

$$\begin{aligned} M_{6,1} &= -im\alpha e^{\alpha d_1}, & M_{6,2} &= im\alpha e^{\alpha d_1}, & M_{6,3} &= (-2\alpha(1-\nu_1) - \frac{m^2}{\alpha} - m^2 d_1) e^{\alpha d_1}, \\ M_{6,4} &= (2\alpha(1-\nu_1) + \frac{m^2}{\alpha} - m^2 d_1) e^{-\alpha d_1}, & M_{6,5} &= (-im(1-2\nu_1) - imd_1\alpha) e^{-\alpha d_1}, \end{aligned}$$

$$M_{6,6} = (-im(1-2\nu_1) + imd_1\alpha)e^{\alpha d_1}, \quad M_{6,7} = im\alpha e^{-\alpha d_1}, \quad M_{6,8} = (-2\alpha(1-\nu_2) - \frac{m^2}{\alpha} - m^2d_1)e^{-\alpha d_1},$$

$$M_{6,8} = (im(1-2\nu_2) + imd_1\alpha)e^{-\alpha d_1}$$

Für Dreischichtsysteme gilt:

$$M_{6,10} = -im\alpha e^{\alpha d_1}, \quad M_{6,11} = (2\alpha(1-\nu_2) + \frac{m^2}{\alpha} + m^2d_1)e^{\alpha d_1}, \quad M_{6,12} = (im(1-2\nu_2) - imd_1\alpha)e^{\alpha d_1}$$

$$M_{6,13} = M_{6,14} = M_{6,15} = 0$$

Die Komponenten der siebten Zeile der Koeffizientenmatrix lauten

(Kontinuität von u_x an der Schichtgrenze 1)

für Zwei- und Dreischichtsysteme:

$$M_{7,1} = \frac{im}{2G_1} e^{-\alpha d_1}, \quad M_{7,2} = \frac{im}{2G_1} e^{\alpha d_1}, \quad M_{7,3} = \frac{2\alpha(1-2\nu_1) + m^2d_1}{2G_1\alpha} e^{-\alpha d_1}, \quad M_{7,4} = \frac{2\alpha(1-2\nu_1) - m^2d_1}{2G_1\alpha} e^{\alpha d_1},$$

$$M_{7,5} = \frac{imd_1}{2G_1} e^{-\alpha d_1}, \quad M_{7,6} = \frac{imd_1}{2G_1} e^{\alpha d_1}, \quad M_{7,7} = \frac{-im}{2G_2} e^{-\alpha d_1},$$

$$M_{7,8} = \frac{-2\alpha(1-2\nu_2) - m^2d_1}{2G_2\alpha} e^{-\alpha d_1}, \quad M_{7,9} = \frac{-im}{2G_2} e^{\alpha d_1},$$

Für Dreischichtsysteme gilt:

$$M_{7,10} = -\frac{imd_1}{2G_2} e^{\alpha d_1}, \quad M_{7,11} = \frac{-2\alpha(1-2\nu_2) + m^2d_1}{2G_2\alpha} e^{\alpha d_1}, \quad M_{7,12} = -\frac{imd_1}{2G_2} e^{\alpha d_1}$$

$$M_{7,13} = M_{7,14} = M_{7,15} = 0$$

Die Komponenten der achten Zeile der Koeffizientenmatrix lauten

(Kontinuität von u_y an der Schichtgrenze 1)

für Zwei- und Dreischichtsysteme:

$$M_{8,1} = \frac{in}{2G_1} e^{-\alpha d_1}, \quad M_{8,2} = \frac{in}{2G_1} e^{\alpha d_1}, \quad M_{8,3} = \frac{mnd_1}{2\alpha G_1} e^{-\alpha d_1}, \quad M_{8,4} = \frac{-mnd_1}{2\alpha G_1} e^{\alpha d_1}, \quad M_{8,5} = \frac{ind_1}{2G_1} e^{-\alpha d_1},$$

$$M_{8,6} = \frac{ind_1}{2G_1} e^{\alpha d_1}, \quad M_{8,7} = \frac{-in}{2G_2} e^{-\alpha d_1}, \quad M_{8,8} = -\frac{mnd_1}{2\alpha G_2} e^{-\alpha d_1}, \quad M_{8,9} = \frac{-in}{2G_2} e^{\alpha d_1}$$

Für Dreischichtsysteme gilt:

$$M_{8,10} = -\frac{in}{2G_2} e^{\alpha d_1}, \quad M_{8,11} = \frac{mnd_1}{2\alpha G_2} e^{\alpha d_1}, \quad M_{8,12} = -\frac{ind_1}{2G_2} e^{\alpha d_1}$$

$$M_{8,13} = M_{8,14} = M_{8,15} = 0$$

Die Komponenten der neunten Zeile der Koeffizientenmatrix lauten

(Kontinuität von u_z an der Schichtgrenze 1)

für Zwei- und Dreischichtsysteme:

$$\begin{aligned} M_{9,1} &= -\frac{\alpha}{2G_1} e^{-\alpha d_1}, & M_{9,2} &= \frac{\alpha}{2G_1} e^{\alpha d_1}, & M_{9,3} &= \frac{-im + imd_1\alpha}{2\alpha G_1} e^{-\alpha d_1}, & M_{9,4} &= \frac{im + imd_1\alpha}{2\alpha G_1} e^{\alpha d_1}, \\ M_{9,5} &= \frac{-(3-4\nu_1) - d_1\alpha}{2G_1} e^{-\alpha d_1}, & M_{9,6} &= \frac{-(3-4\nu_1) + d_1\alpha}{2G_1} e^{\alpha d_1}, & M_{9,7} &= \frac{\alpha}{2G_2} e^{-\alpha d_1}, \\ M_{9,8} &= \frac{-\alpha}{2G_2} e^{\alpha d_1}, & M_{9,9} &= -\frac{mnd_1}{2\alpha G_2} e^{-\alpha d_1} \end{aligned}$$

Für Dreischichtsysteme gilt:

$$M_{9,10} = \frac{-im - imd_1}{2\alpha G_2} e^{\alpha d_1}, \quad M_{9,11} = \frac{(3-4\nu_2) + d_1\alpha}{2G_2} e^{-\alpha d_1}, \quad M_{9,12} = \frac{(3-4\nu_2) - d_1\alpha}{2G_2} e^{\alpha d_1}$$

$$M_{9,13} = M_{9,14} = M_{9,15} = 0$$

Die Komponenten der zehnten Zeile der Koeffizientenmatrix für Dreischichtsysteme lauten

(Kontinuität von σ_{zz} an der Schichtgrenze 2)

$$M_{10,1} = M_{10,2} = M_{10,3} = M_{10,4} = M_{10,5} = M_{10,6} = 0$$

$$\begin{aligned} M_{10,7} &= -\alpha^2 e^{-\alpha d_1}, & M_{10,8} &= (-2im(1-\nu_2) + imd_1\alpha) e^{-\alpha d_2}, & M_{10,9} &= (-2\alpha(1-\nu_2) - d_1\alpha^2) e^{-\alpha d_2}, \\ M_{10,10} &= -\alpha^2 e^{\alpha d_2}, & M_{10,11} &= (-2im(1-\nu_2) - imd_1\alpha) e^{\alpha d_2}, & M_{10,12} &= (2\alpha(1-\nu_2) - d_1\alpha^2) e^{\alpha d_2}, \\ M_{10,13} &= \alpha^2 e^{-\alpha d_2}, & M_{10,14} &= -(-2im(1-\nu_2) + imd_1\alpha) e^{-\alpha d_2}, & M_{10,15} &= -(-2\alpha(1-\nu_2) - d_1\alpha^2) e^{-\alpha d_2} \end{aligned}$$

Die Komponenten der elften Zeile der Koeffizientenmatrix für Dreischichtsysteme lauten

(Kontinuität von σ_{zy} an der Schichtgrenze 2)

$$M_{11,1} = M_{11,2} = M_{11,3} = M_{11,4} = M_{11,5} = M_{11,6} = 0$$

$$\begin{aligned} M_{11,7} &= in\alpha e^{-\alpha d_2}, & M_{11,8} &= \left(-\frac{mn}{\alpha} + mnd_1\right) e^{-\alpha d_2}, & M_{11,9} &= (in(1-2\nu_2) + ind_1\alpha) e^{-\alpha d_2}, \\ M_{11,10} &= -in\alpha e^{\alpha d_2}, & M_{11,11} &= \left(\frac{mn}{\alpha} + mnd_1\right) e^{\alpha d_2}, & M_{11,12} &= (in(1-2\nu_2) - ind_1\alpha) e^{\alpha d_2}, \\ M_{11,13} &= -in\alpha e^{-\alpha d_2}, & M_{11,14} &= -\left(-\frac{mn}{\alpha} + mnd_1\right) e^{-\alpha d_2}, & M_{11,15} &= -(in(1-2\nu_2) + ind_1\alpha) e^{-\alpha d_2} \end{aligned}$$

Die Komponenten der zwölften Zeile der Koeffizientenmatrix für Dreischichtsysteme lauten

(Kontinuität von σ_{zx} an der Schichtgrenze 2)

$$M_{12,1} = M_{12,2} = M_{12,3} = M_{12,4} = M_{12,5} = M_{12,6} = 0$$

$$M_{12,7} = im\alpha e^{-\alpha d_2}, \quad M_{12,8} = (-2\alpha(1-\nu_2) - \frac{m^2}{\alpha} - m^2 d_1) e^{-\alpha d_2}, \quad M_{12,9} = (im(1-2\nu_2) + imd_1\alpha) e^{-\alpha d_2},$$

$$M_{12,10} = -im\alpha e^{\alpha d_2}, \quad M_{12,11} = (2\alpha(1-\nu_2) + \frac{m^2}{\alpha} + m^2 d_1) e^{\alpha d_2}, \quad M_{12,12} = (im(1-2\nu_2) - imd_1\alpha) e^{\alpha d_2},$$

$$M_{12,13} = -im\alpha e^{-\alpha d_2}, \quad M_{12,14} = -(-2\alpha(1-\nu_2) - \frac{m^2}{\alpha} - m^2 d_1) e^{-\alpha d_2},$$

$$M_{12,15} = -(im(1-2\nu_2) + imd_1\alpha) e^{-\alpha d_2}$$

Die Komponenten der dreizehnten Zeile der Koeffizientenmatrix für Dreischichtsysteme lauten

(Kontinuität von u_x an der Schichtgrenze 2)

$$M_{13,1} = M_{13,2} = M_{13,3} = M_{13,4} = M_{13,5} = M_{13,6} = 0$$

$$M_{13,7} = \frac{im}{2G_2} e^{-\alpha d_2}, \quad M_{13,8} = \frac{2\alpha(1-2\nu_2) + m^2 d_2}{2G_2 \alpha} e^{-\alpha d_2}, \quad M_{13,9} = \frac{imd_2}{2G_2} e^{-\alpha d_2},$$

$$M_{13,10} = \frac{im}{2G_2} e^{\alpha d_2}, \quad M_{13,11} = \frac{2\alpha(1-2\nu_2) - m^2 d_2}{2G_2 \alpha} e^{\alpha d_2}, \quad M_{13,12} = \frac{imd_2}{2G_2} e^{\alpha d_2},$$

$$M_{13,13} = \frac{-im}{2G_3} e^{-\alpha d_2}, \quad M_{13,14} = \frac{-2\alpha(1-2\nu_3) - m^2 d_2}{2G_3 \alpha} e^{-\alpha d_2}, \quad M_{13,15} = \frac{-imd_2}{2G_3} e^{-\alpha d_2}$$

Die Komponenten der vierzehnten Zeile der Koeffizientenmatrix für Dreischichtsysteme lauten

(Kontinuität von u_y an der Schichtgrenze 2)

$$M_{14,1} = M_{14,2} = M_{14,3} = M_{14,4} = M_{14,5} = M_{14,6} = 0$$

$$M_{14,7} = \frac{in}{2G_2} e^{-\alpha d_2}, \quad M_{14,8} = \frac{mnd_2}{2\alpha G_2} e^{-\alpha d_2}, \quad M_{14,9} = \frac{ind_2}{2G_2} e^{-\alpha d_2},$$

$$M_{14,10} = \frac{in}{2G_2} e^{\alpha d_2}, \quad M_{14,11} = \frac{-mnd_2}{2\alpha G_2} e^{\alpha d_2}, \quad M_{14,12} = \frac{ind_2}{2G_2} e^{\alpha d_2},$$

$$M_{14,13} = \frac{-in}{2G_3} e^{-\alpha d_2}, \quad M_{14,14} = \frac{-mnd_2}{2\alpha G_3} e^{-\alpha d_2}, \quad M_{14,15} = \frac{-ind_2}{2G_3} e^{-\alpha d_2}$$

Die Komponenten der fünfzehnten Zeile der Koeffizientenmatrix für Dreischichtsysteme lauten
(Kontinuität von u_z an der Schichtgrenze 2)

$$M_{15,1} = M_{15,2} = M_{15,3} = M_{15,4} = M_{15,5} = M_{15,6} = 0$$

$$M_{15,7} = \frac{-\alpha}{2G_2} e^{-\alpha d_2}, \quad M_{15,8} = \frac{-im + imd_2}{2\alpha G_2} e^{-\alpha d_2}, \quad M_{15,9} = \frac{-(3-4\nu_2) - d_2\alpha}{2G_2} e^{-\alpha d_2},$$

$$M_{15,10} = \frac{\alpha}{2G_2} e^{\alpha d_2}, \quad M_{15,11} = \frac{im + imd_2}{2\alpha G_2} e^{\alpha d_2}, \quad M_{15,12} = \frac{-(3-4\nu_2) + d_2\alpha}{2G_2} e^{\alpha d_2},$$

$$M_{15,13} = \frac{\alpha}{2G_3} e^{-\alpha d_2}, \quad M_{15,14} = \frac{im - imd_2}{2\alpha G_3} e^{-\alpha d_2}, \quad M_{15,15} = \frac{(3-4\nu_2) + d_2\alpha}{2G_3} e^{-\alpha d_2}$$

Anhang 14:Laplace Gleichung

Die Entwicklung von des räumlichen Potentials mit sechs Nachbarpunkten kann mittels einer dreidimensionalen Taylor Reihe 2ter Ordnung wie folgt angenähert werden:

$$\varphi(x_{i+1}, y_j, z_k) = \varphi(x_i, y_j, z_k) + \frac{1}{1!} \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial \varphi(x_i, y_j, z_k)}{\partial x_i} + \frac{1}{2!} \cdot \Delta x^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j, z_k)}{\partial x_i^2} + \dots (9.130 \text{ a.})$$

$$\varphi(x_{i-1}, y_j, z_k) = \varphi(x_i, y_j, z_k) - \frac{1}{1!} \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial \varphi(x_i, y_j, z_k)}{\partial x_i} + \frac{1}{2!} \cdot \Delta x^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j, z_k)}{\partial x_i^2} + \dots (9.130 \text{ b.})$$

$$\varphi(x_i, y_{j+1}, z_k) = \varphi(x_i, y_j, z_k) + \frac{1}{1!} \cdot \Delta y \cdot \frac{\partial \varphi(x_i, y_j, z_k)}{\partial y_j} + \frac{1}{2!} \cdot \Delta y^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j, z_k)}{\partial y_j^2} + \dots (9.130 \text{ c.})$$

$$\varphi(x_i, y_{j-1}, z_k) = \varphi(x_i, y_j, z_k) - \frac{1}{1!} \cdot \Delta y \cdot \frac{\partial \varphi(x_i, y_j, z_k)}{\partial y_j} + \frac{1}{2!} \cdot \Delta y^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j, z_k)}{\partial y_j^2} + \dots (9.130 \text{ d.})$$

$$\varphi(x_i, y_j, z_{k+1}) = \varphi(x_i, y_j, z_k) + \frac{1}{1!} \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial \varphi(x_i, y_j, z_k)}{\partial z_k} + \frac{1}{2!} \cdot \Delta z^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j, z_k)}{\partial z_k^2} + \dots (9.130 \text{ e.})$$

$$\varphi(x_i, y_j, z_{k-1}) = \varphi(x_i, y_j, z_k) - \frac{1}{1!} \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial \varphi(x_i, y_j, z_k)}{\partial z_k} + \frac{1}{2!} \cdot \Delta z^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j, z_k)}{\partial z_k^2} + \dots (9.130 \text{ f.})$$

Die Addition der rechten und linken Seiten ergibt:

$$\begin{aligned} & \varphi(x_{i-1}, y_j, z_k) + \varphi(x_{i+1}, y_j, z_k) + \varphi(x_i, y_{j-1}, z_k) + \varphi(x_i, y_{j+1}, z_k) + \varphi(x_i, y_j, z_{k-1}) + \varphi(x_i, y_j, z_{k+1}) \\ &= 6 \cdot \varphi(x_i, y_j, z_k) + \left(\frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j, z_k)}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j, z_k)}{\partial y_j^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j, z_k)}{\partial z_k^2} \right) \end{aligned} \quad (9.131)$$

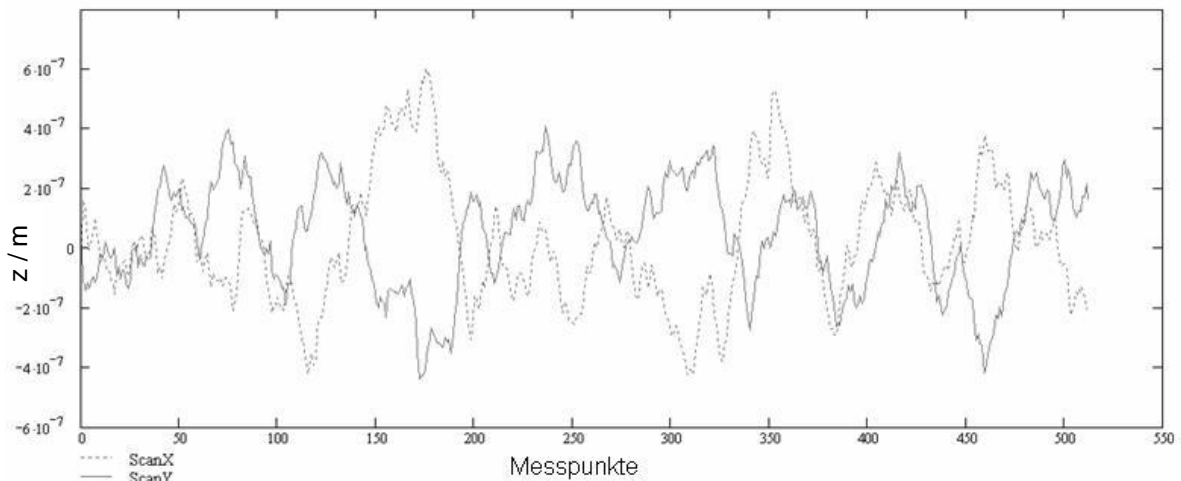
Unter Beachtung der Laplace Gleichung (6.212) folgt:

$$\varphi(x_i, y_j, z_k) = \frac{\varphi(x_{i-1}, y_j, z_k) + \varphi(x_{i+1}, y_j, z_k) + \varphi(x_i, y_{j-1}, z_k) + \varphi(x_i, y_{j+1}, z_k) + \varphi(x_i, y_j, z_{k-1}) + \varphi(x_i, y_j, z_{k+1})}{6} \quad (6.213)$$

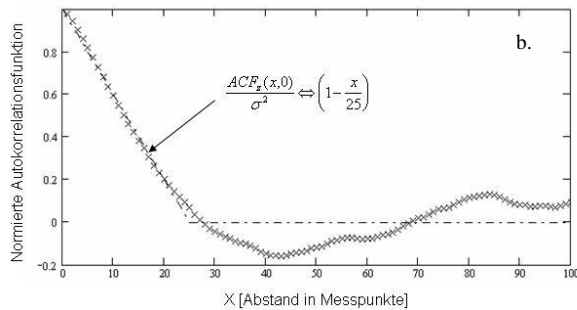
Anhang 15: Kennwerte simulierter und gemessener Oberflächen

Ergänzungen zu Abbildung 7.2

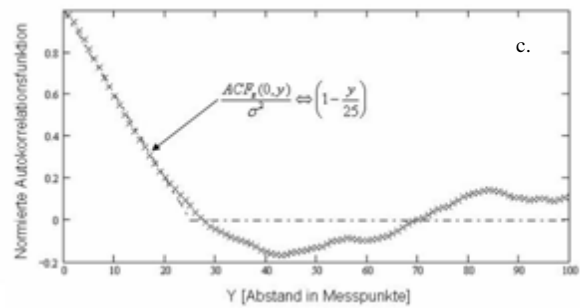
Simulierte fraktale (isotrope) Oberfläche



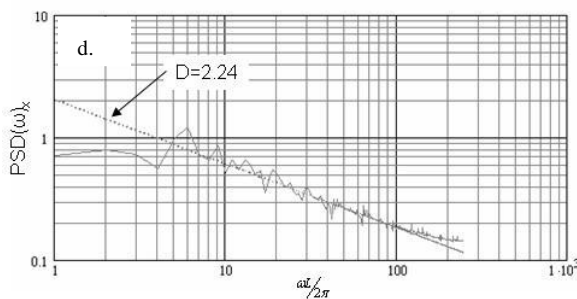
a.: Linienscan in x- bzw. y-Richtung.



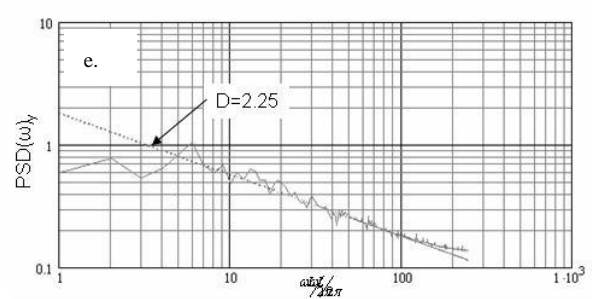
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.



d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.

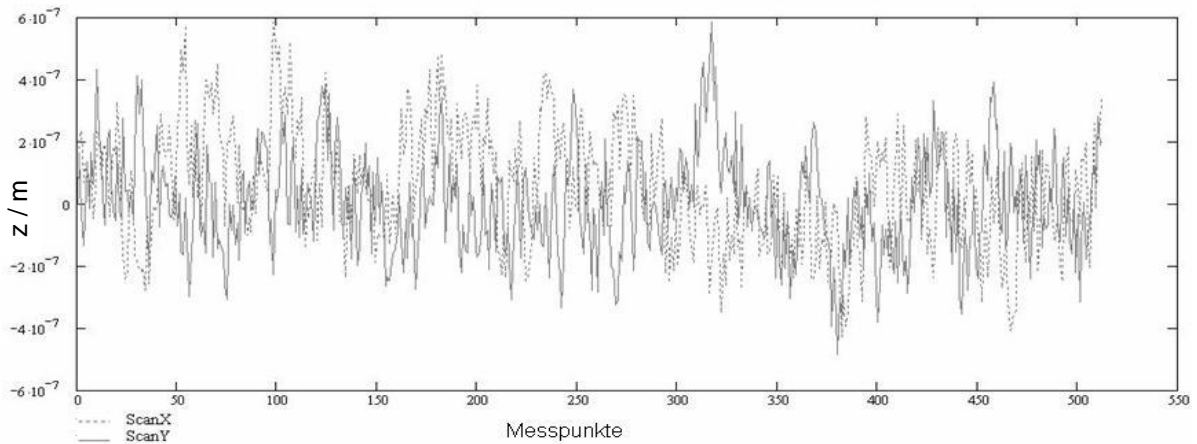


e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

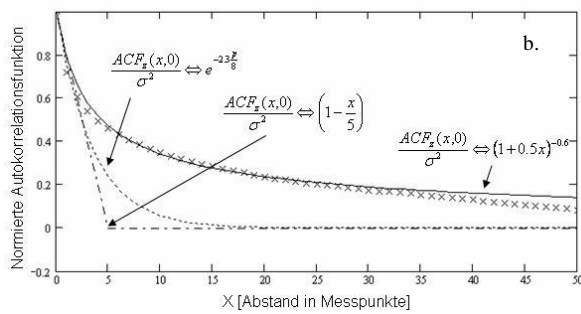
Abbildung 9.4 a – e: Simulierte fraktale isotrope Oberfläche gemäß Ausloos Berman (512 x 512 Pkt).

Ergänzungen zu Abbildung 7.3

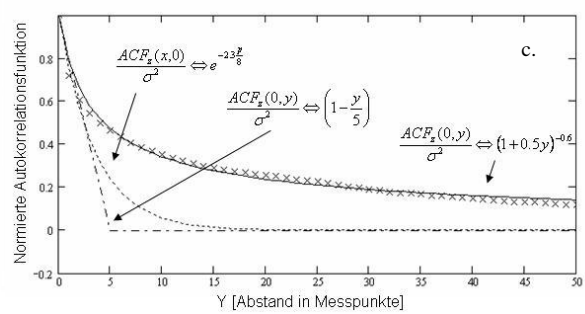
Geschwindigkeitsoptimiertes Simulationsmodell



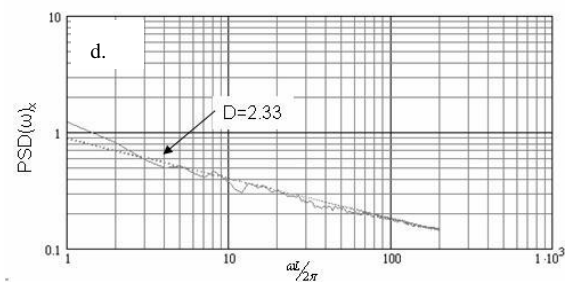
a.: Linienscan in x- bzw. y-Richtung.



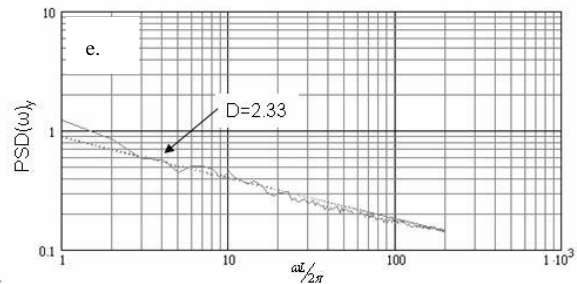
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.



d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.

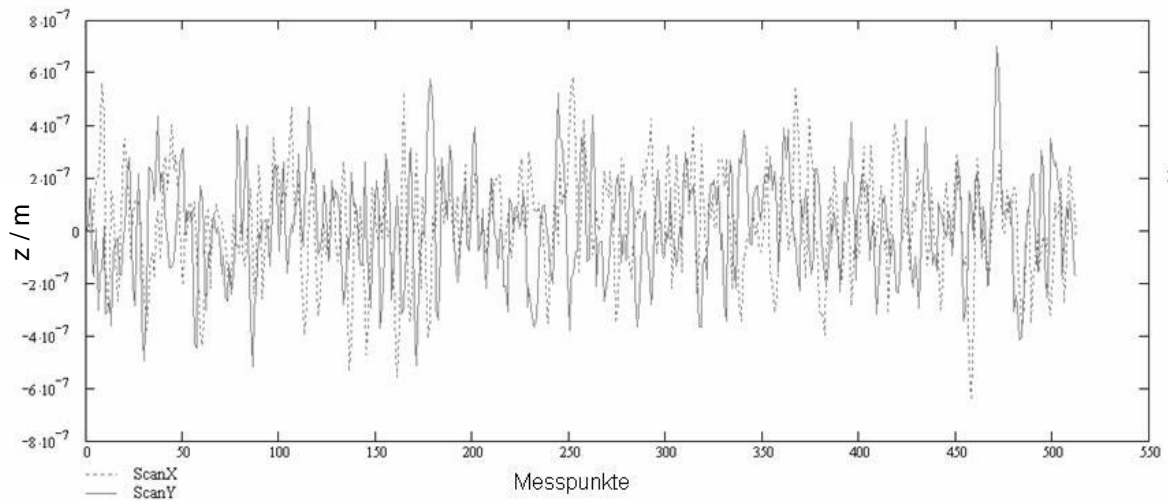


e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

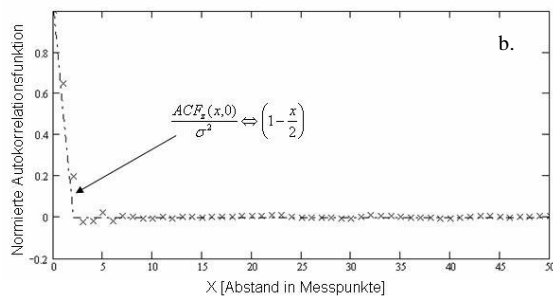
Abbildung 9.5 a – e: Simulierte fraktale Oberfläche gemäß Kapitel 6.1.4 (512 x 512 Pkt).

Ergänzungen zu Abbildung 7.4

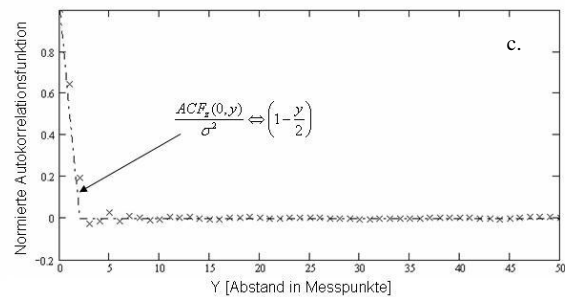
Simulierte isotrope Oberfläche gemäß Kapitel 6.1.3



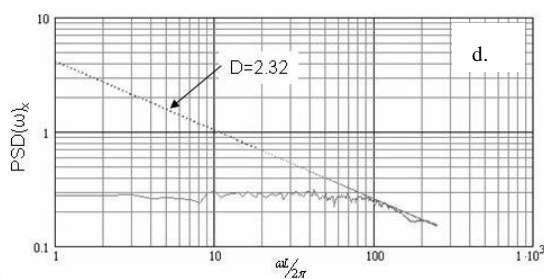
a.: Linienscan in x- bzw. y-Richtung.



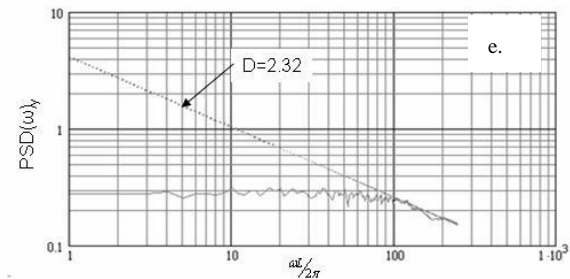
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.



d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.

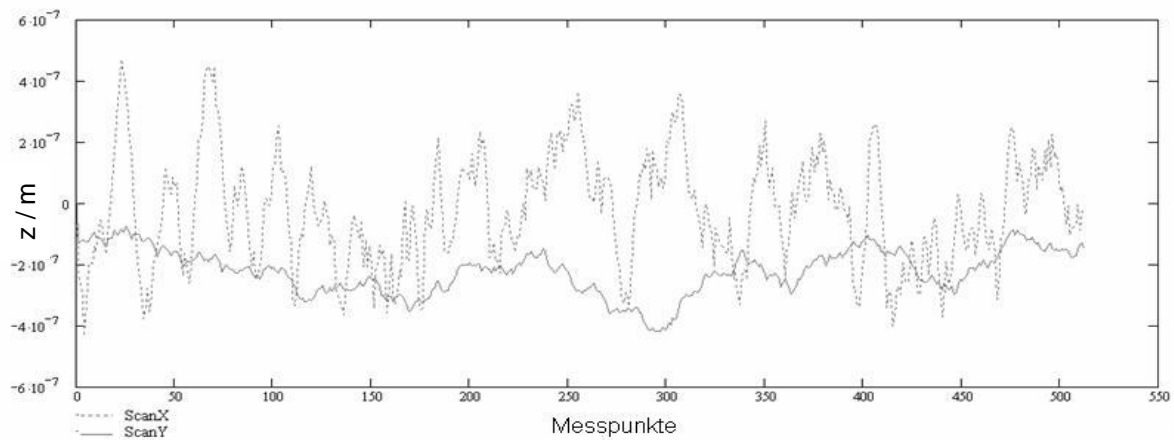


e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

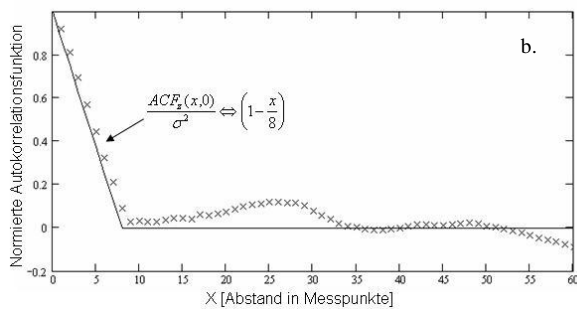
Abbildung 9.6 a –e: Simuliert isotrope Oberfläche (512 x 512 Pkt).

Ergänzungen zu Abbildung 7.5

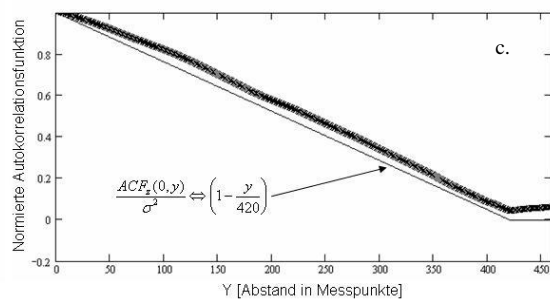
Simulierte anisotrope Oberfläche gemäß Kapitel 6.1.3



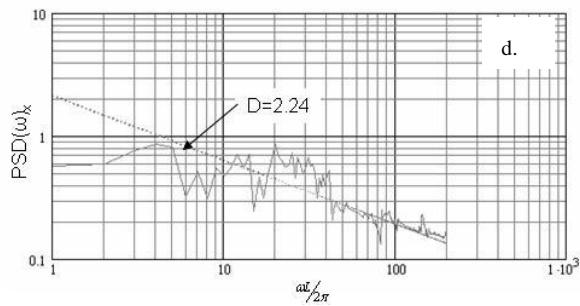
a.: Linienscan in x- bzw. y-Richtung.



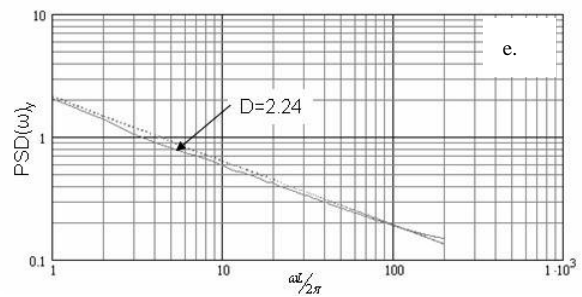
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.



d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.

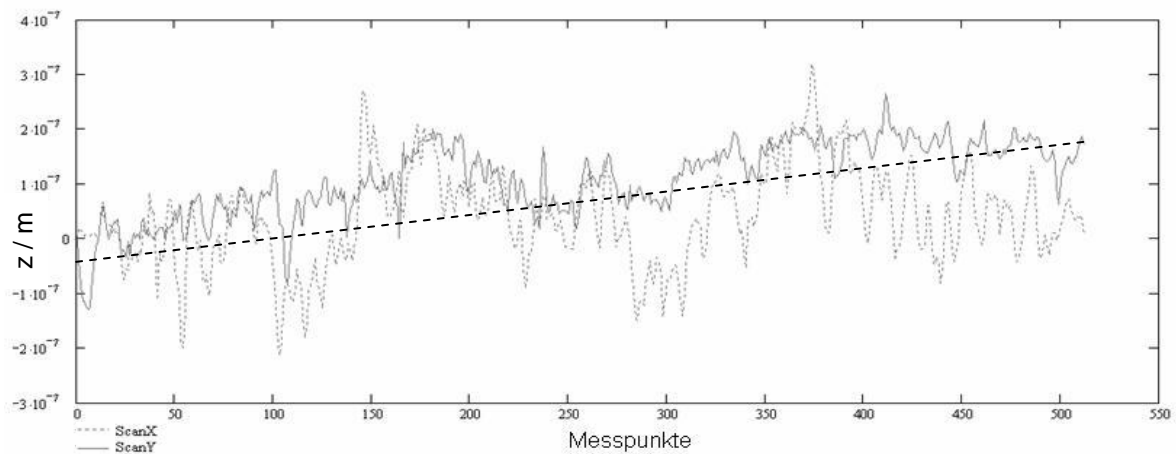


e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

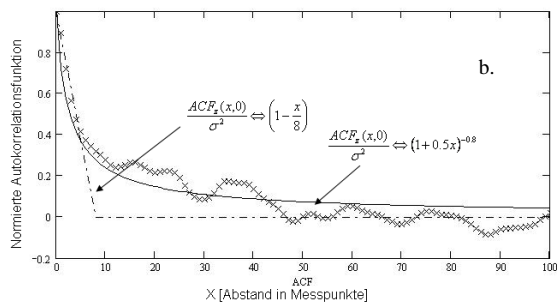
Abbildung 9.7 a – e: Simulierte anisotrope Oberfläche (512 x 512 Pkt.).

Ergänzungen zu Abbildung 7.6

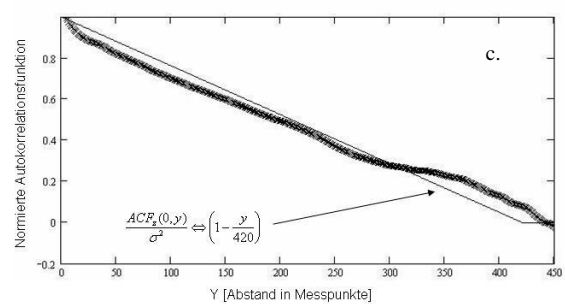
Gemessene anisotrope Oberfläche



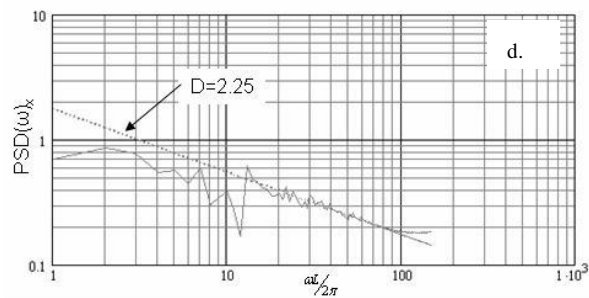
a.: Linienscan in x- bzw. y-Richtung.



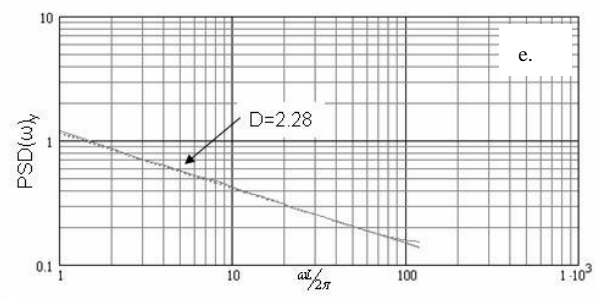
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.

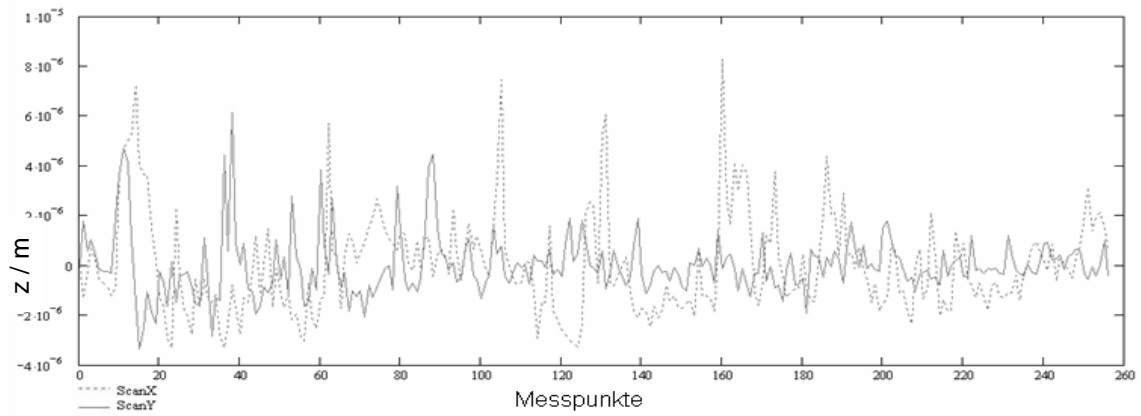


d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.

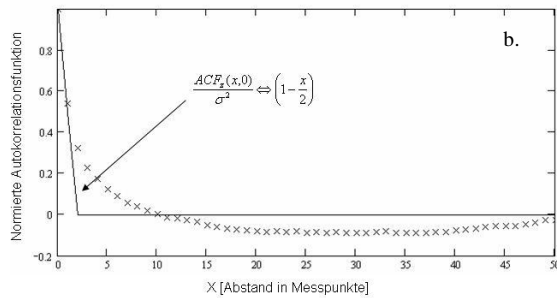


e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

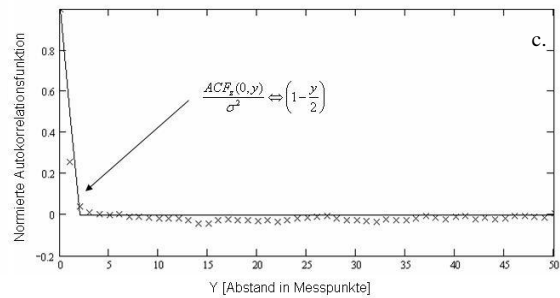
Abbildung 9.8 a – e: Gemessene stark anisotrope Oberfläche (512 x 512 Pkt.; x/y-Auflösung 1.5625 µm).

Gemessener belasteter Zinn-Kontaktpunkt

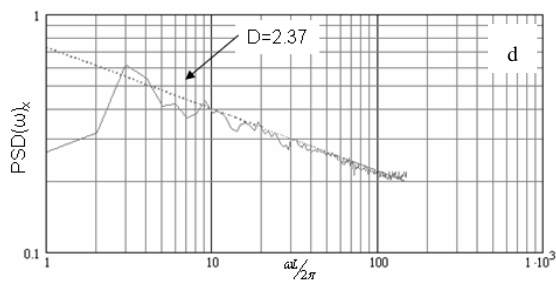
a.: Linienprofil in x- bzw. y-Richtung.



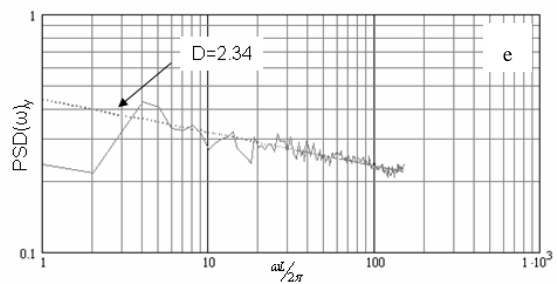
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.



d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.

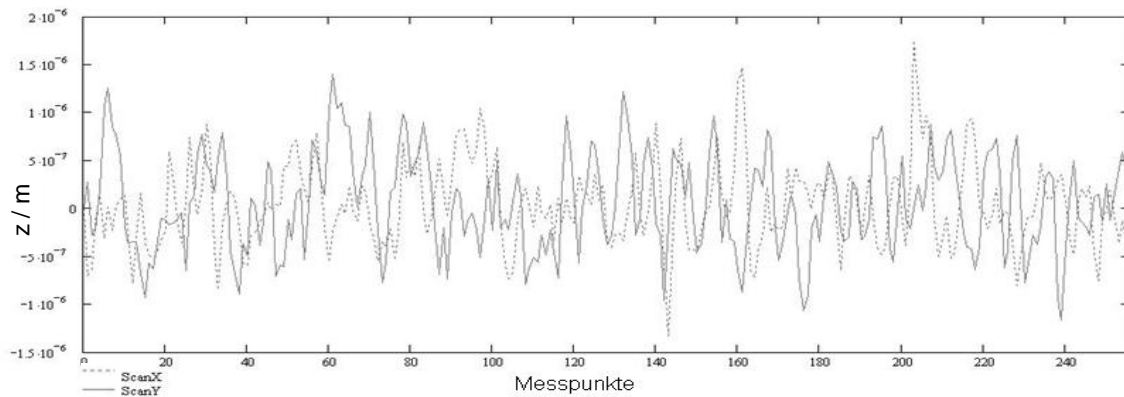


e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

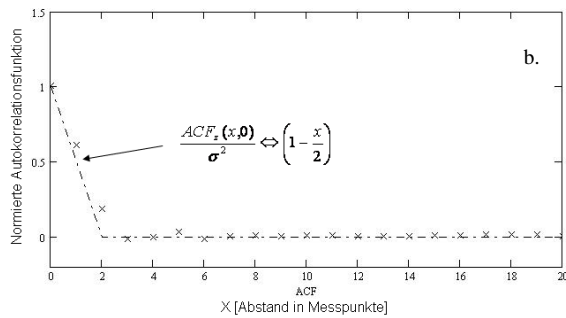
Abbildung 9.9 a – e: Gemessene isotrope Oberfläche (256 x 256 Pkt.; Auflösung 1.5625 μm).

Ergänzungen zu Abbildung 7.9

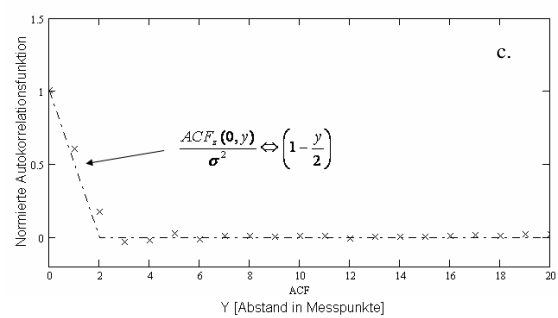
Simulierter unbelasteter Zinn-Kontaktpunkt



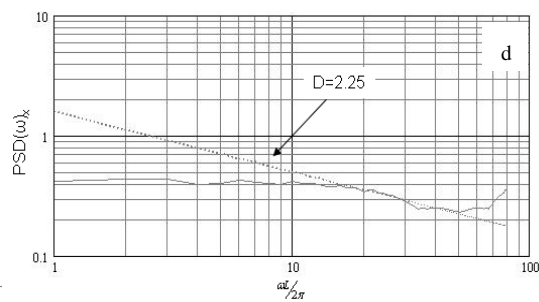
c.: Linienprofil in x- bzw. y-Richtung.



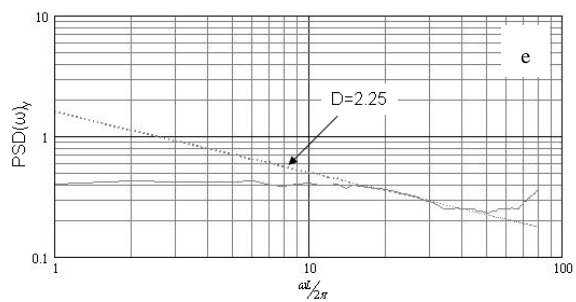
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.



d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.

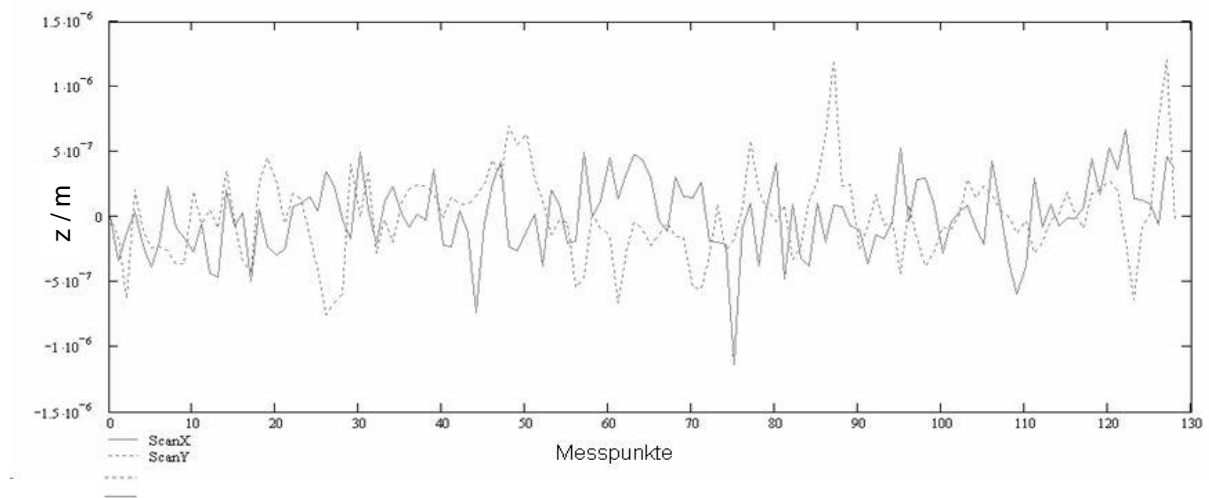


e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

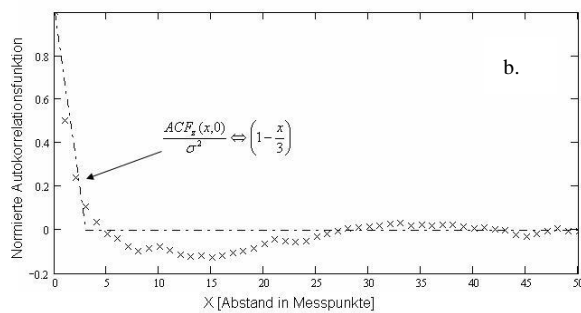
Abbildung 9.10 a.-e.: Simulierte isotrope Topographie mit nachträglich deformierter z-Werte-Verteilung.

 $\sigma = 0,51 \mu\text{m}$, $\beta_x = \beta_y = 2$ (256 x 256 Pkt.)

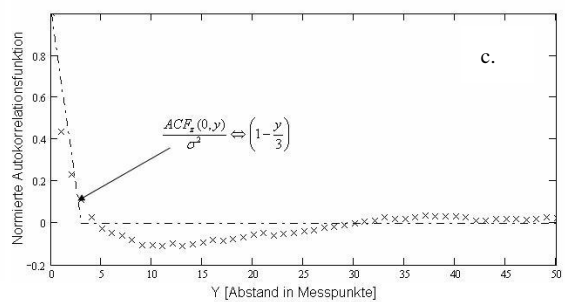
Ergänzungen zu Abbildung 7.10

Gemessener belasteter Zinn-Kontaktpunkt

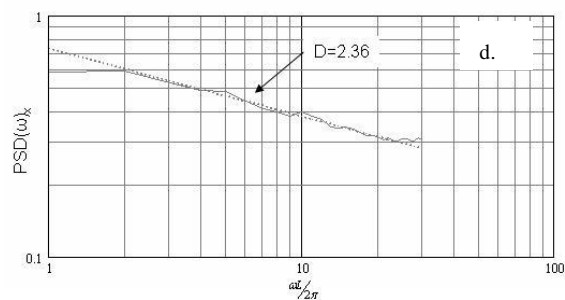
a.: Linienscan in x- bzw. y-Richtung.



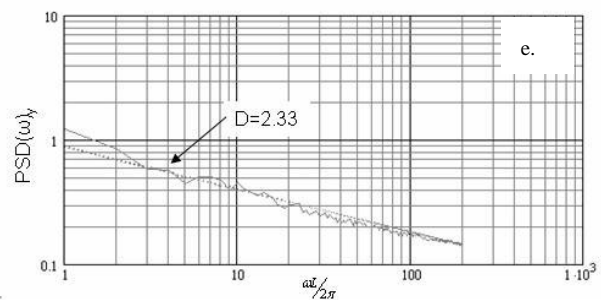
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.



d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.

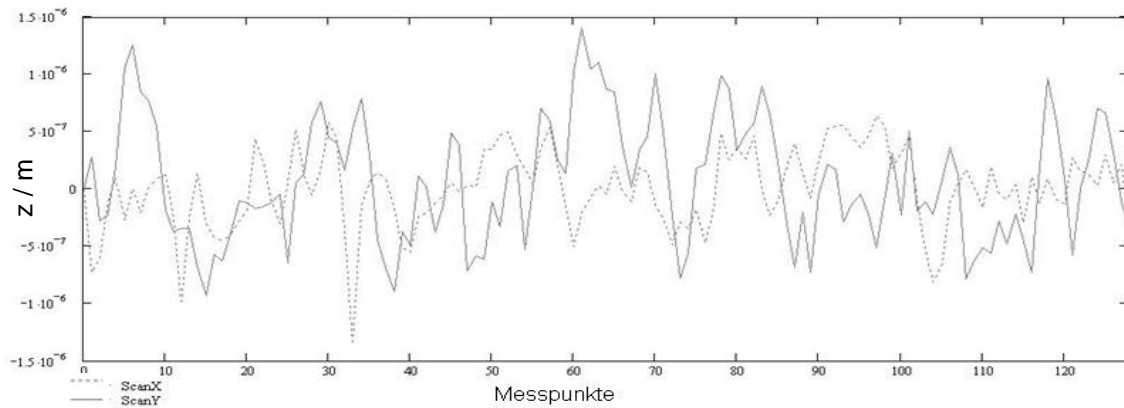


e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

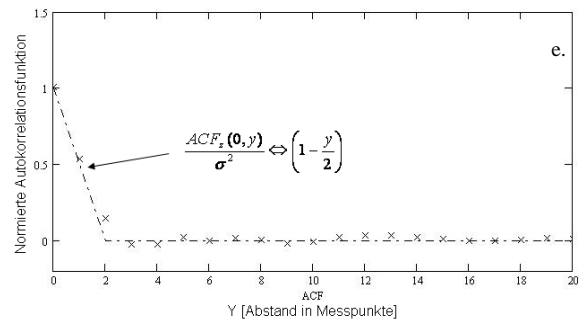
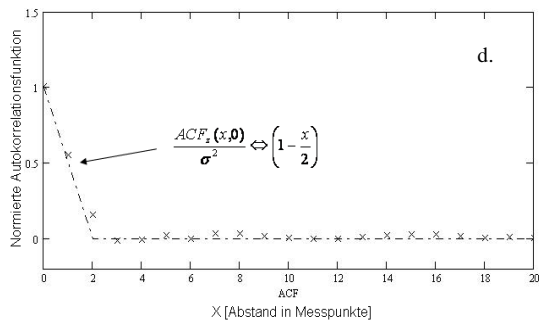
Abbildung 9.11 a – e: Gemessene Topographie eines Steckverbinder Kontaktpunktes (128 x 128 Pkt. Auflösung 1.5625 μm).

Ergänzungen zu Abbildung 7.11

Simulierter belasteter Zinn-Kontaktpunkt

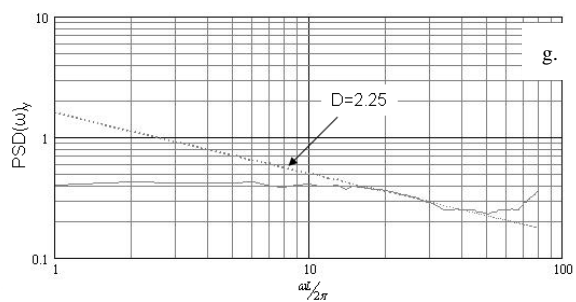
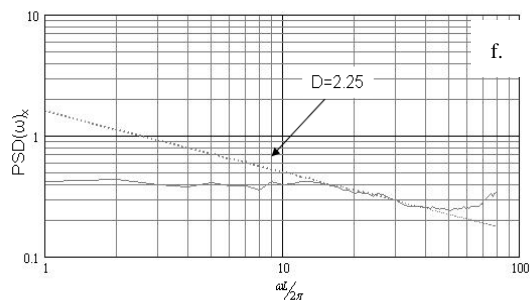


a.: Linienscan in x- bzw. y-Richtung.



b.: Autokorrelation in x-Richtung.

c.: Autokorrelation in y-Richtung.



d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.

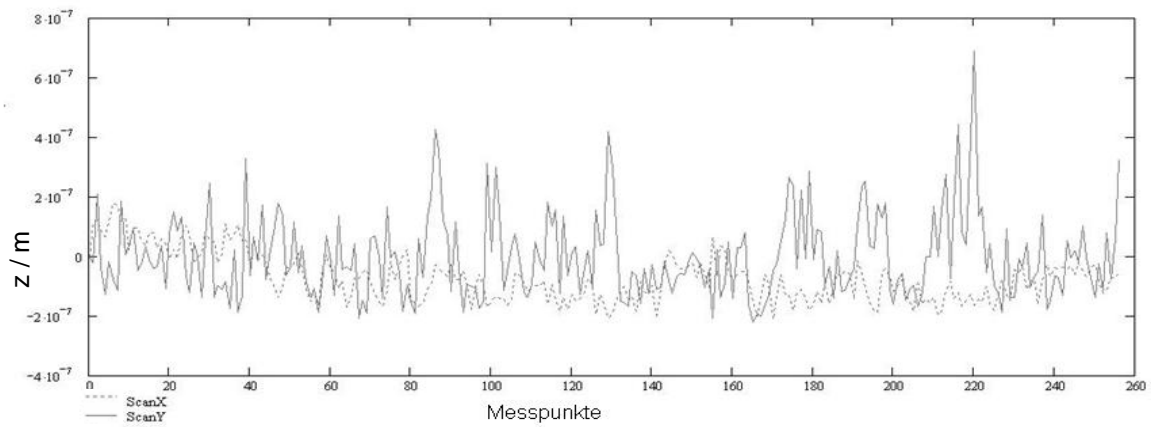
e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

Abbildung 9.12 a.- e.: Simulierte isotrope Topographie mit nachträglich deformierter z-Werte-Verteilung.

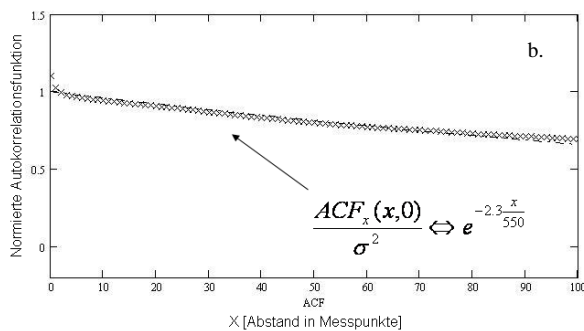
$$\sigma = 0,46 \mu\text{m}, \quad \beta_x = \beta_y = 2 \quad (128 \times 256 \times 128.)$$

Ergänzungen zu Abbildung 7.12

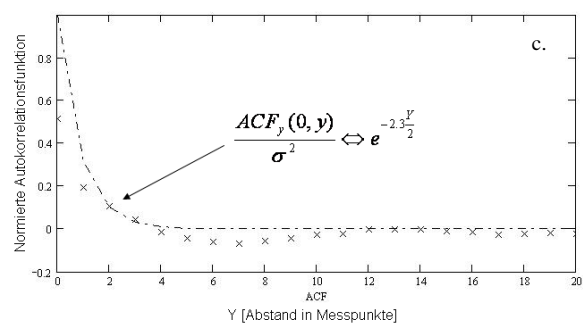
Gemessene geschliffene Oberfläche



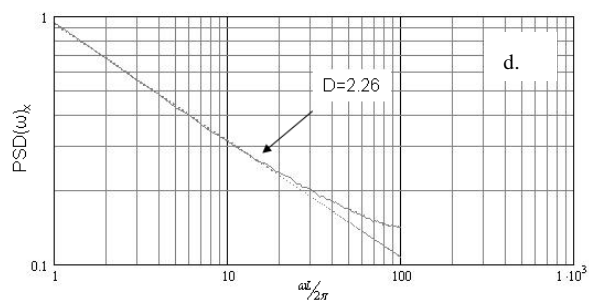
a.: Linienscan in x- bzw. y-Richtung.



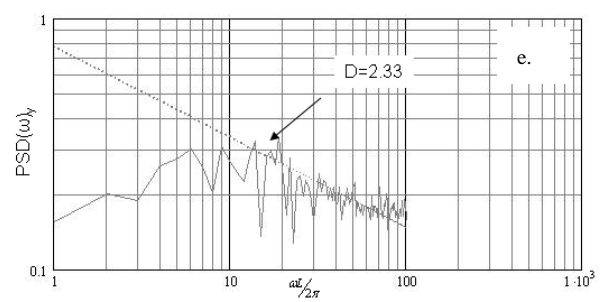
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.



e.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.

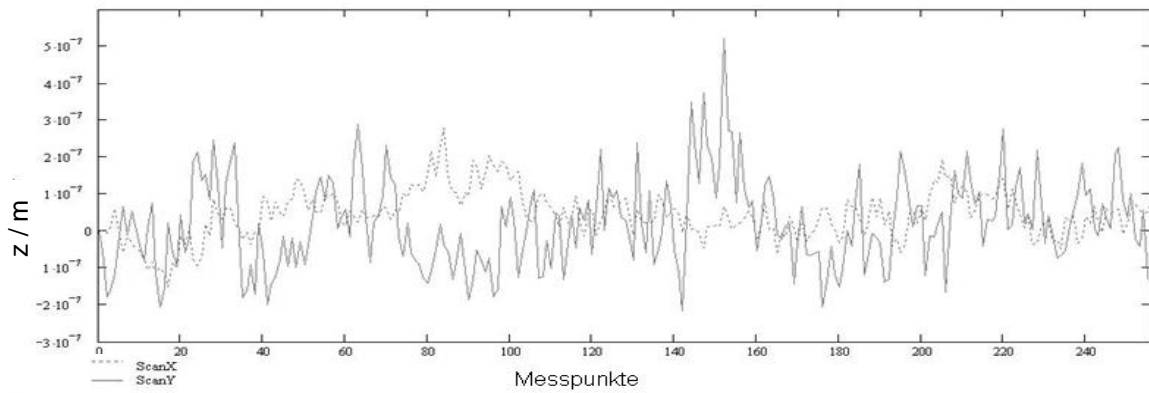


e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

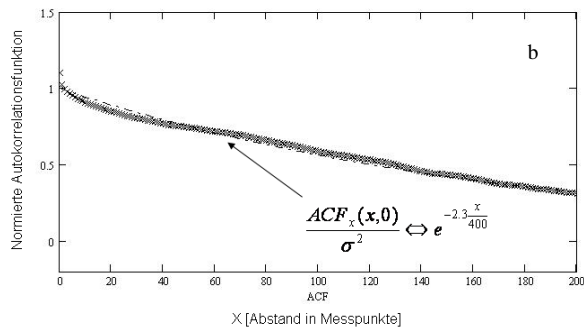
Abbildung 9.13 a – e: Gemessene Topographie einer durch Schleifprozesse erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 μm).

Ergänzungen zu Abbildung 7.13

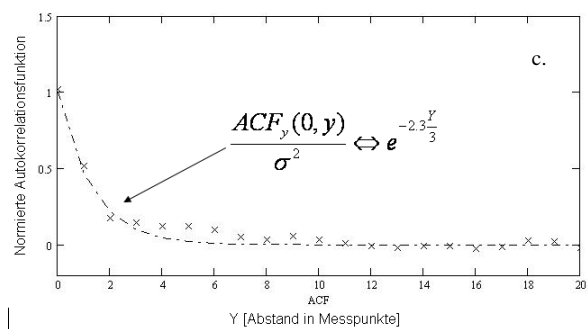
Simulierte geschliffene Oberfläche



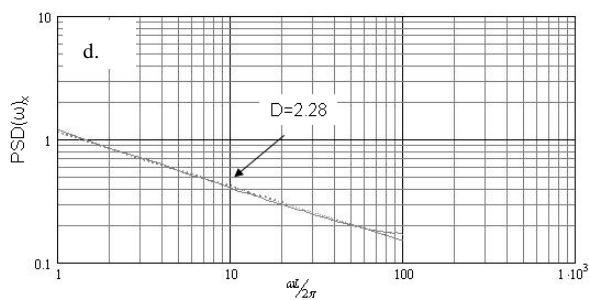
a.: Linienscan in x- bzw. y-Richtung.



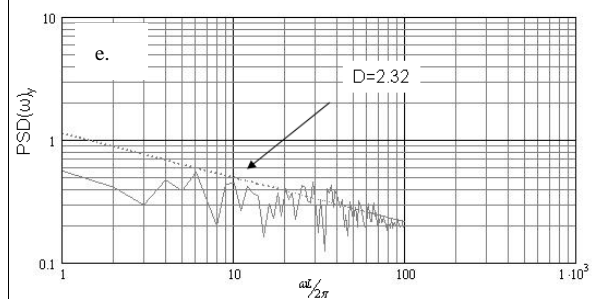
b.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.



c.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.



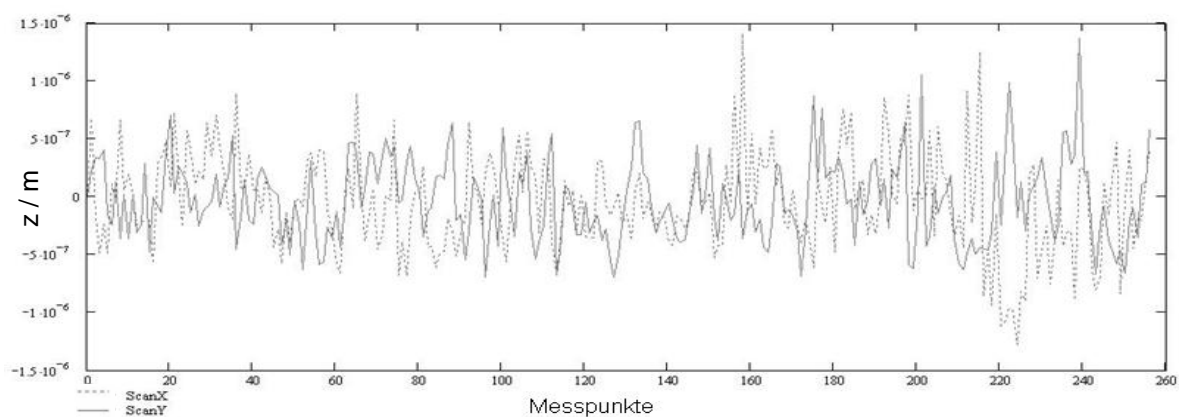
d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.



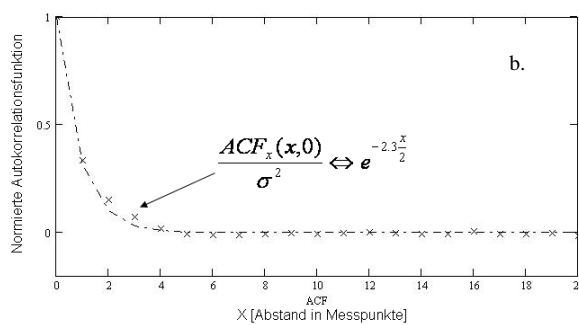
e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

Abbildung 9.14 a – e: Simulierte Topographie einer durch Schleifprozesse erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 μm).

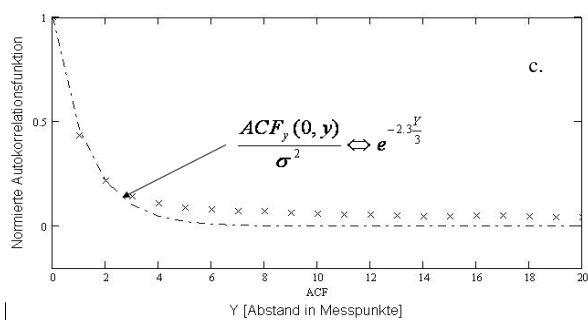
Ergänzungen zu Abbildung 7.14

Gemessene drahtgeschnittene (fein) Oberfläche

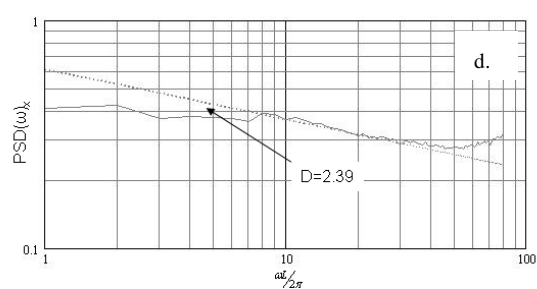
a.: Linienscan in x- bzw. y-Richtung.



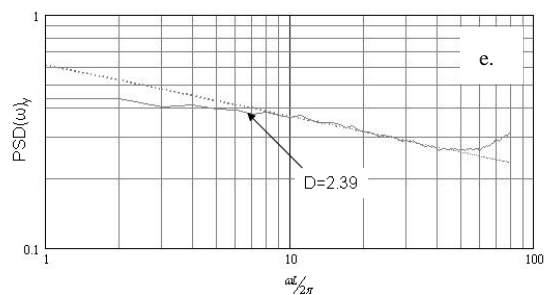
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.



d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.

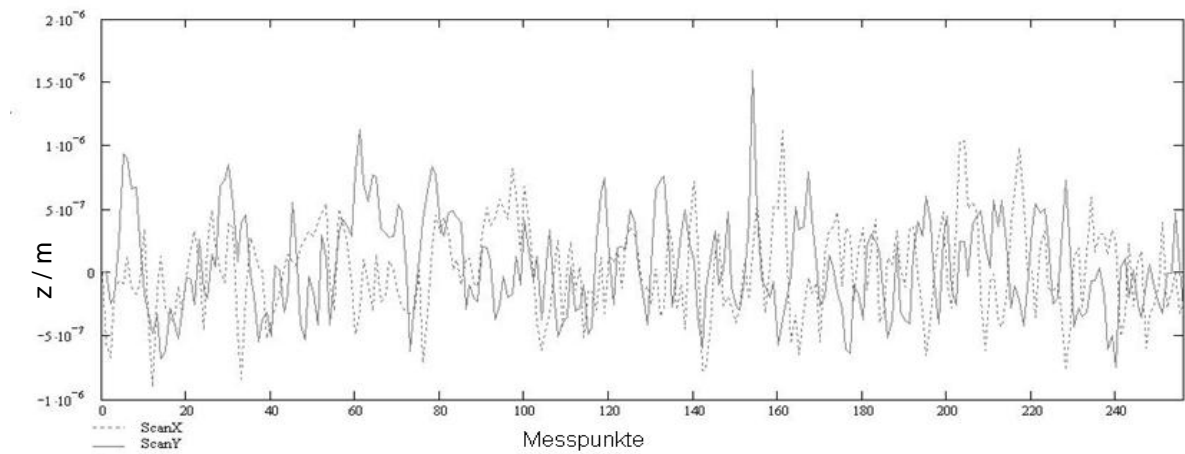


e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

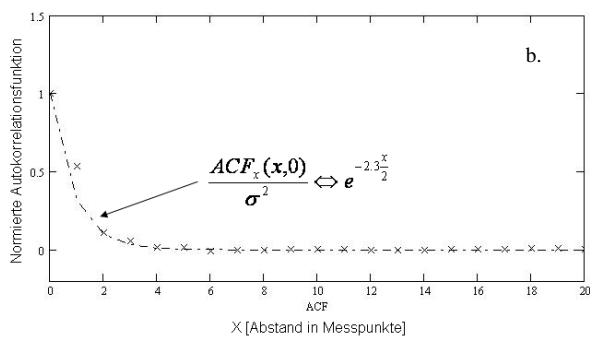
Abbildung 9.15 a – e: Gemessene Topographie einer durch Drahtschneiden (fein) erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 μm).

Ergänzungen zu Abbildung 7.15

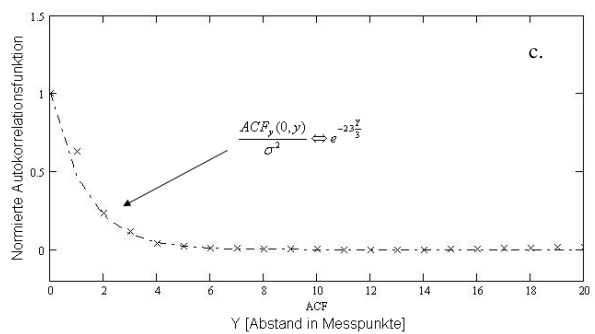
Simulierte drahtgeschnittene (fein) Oberfläche



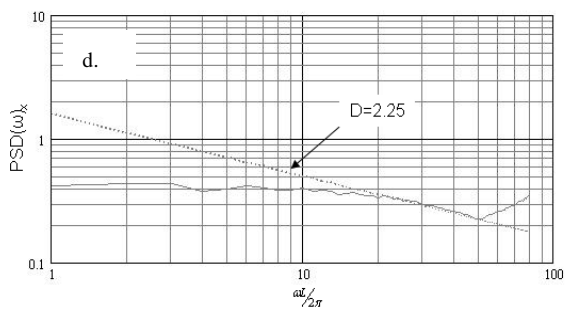
a.: Linienprofil in x- bzw. y-Richtung.



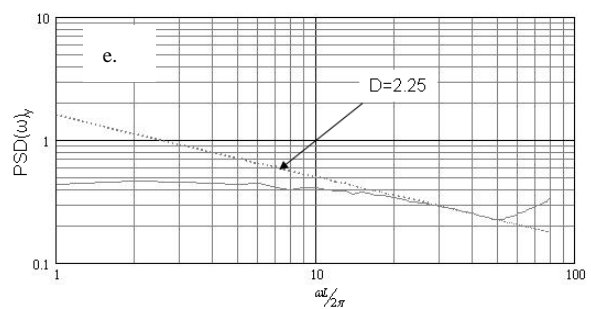
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.



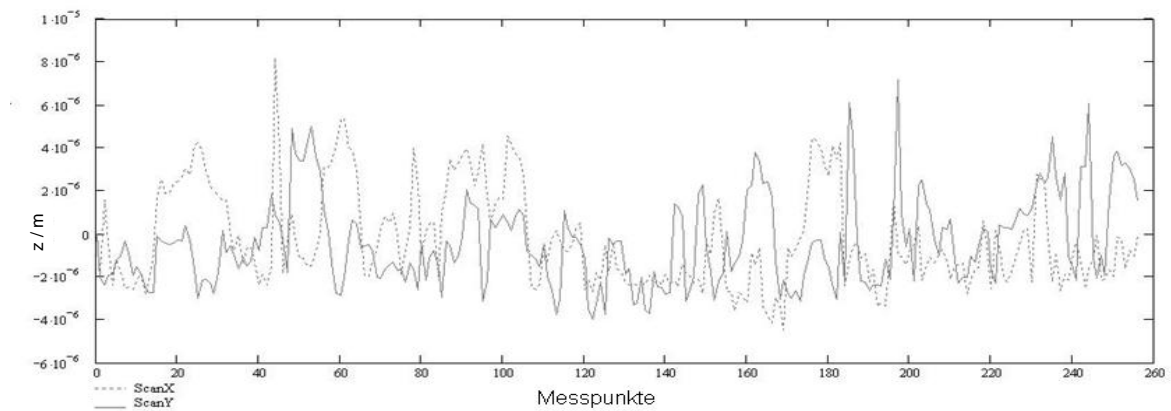
d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.



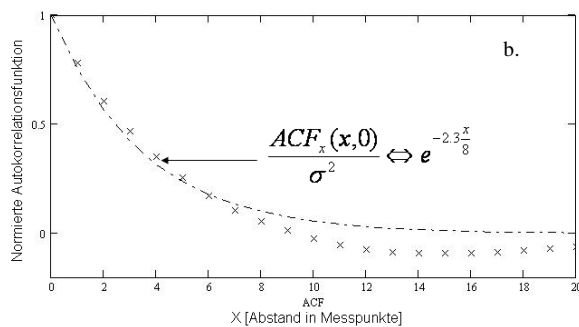
e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

Abbildung 9.16 a – e: Simulierte Topographie einer durch Drahtschneiden (fein) erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 µm).

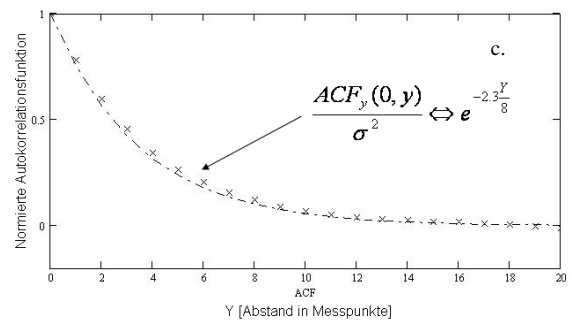
Ergänzung zu Abbildung 7.16

Gemessene drahtgeschnittene (grob) Oberfläche

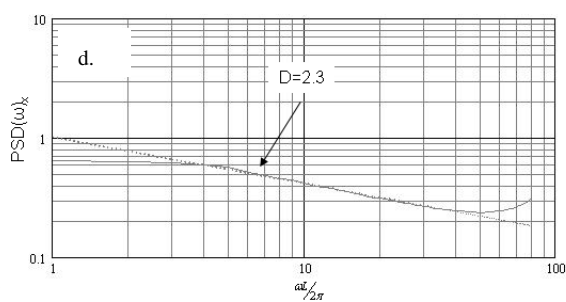
a.: Linienprofil in x- bzw. y-Richtung.



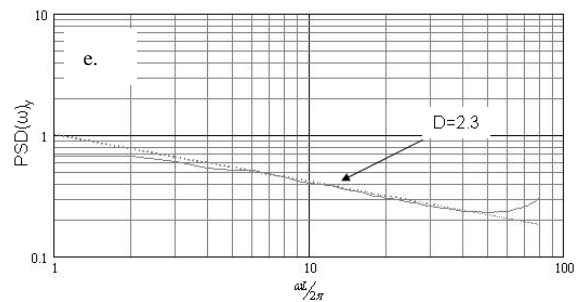
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.



d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.

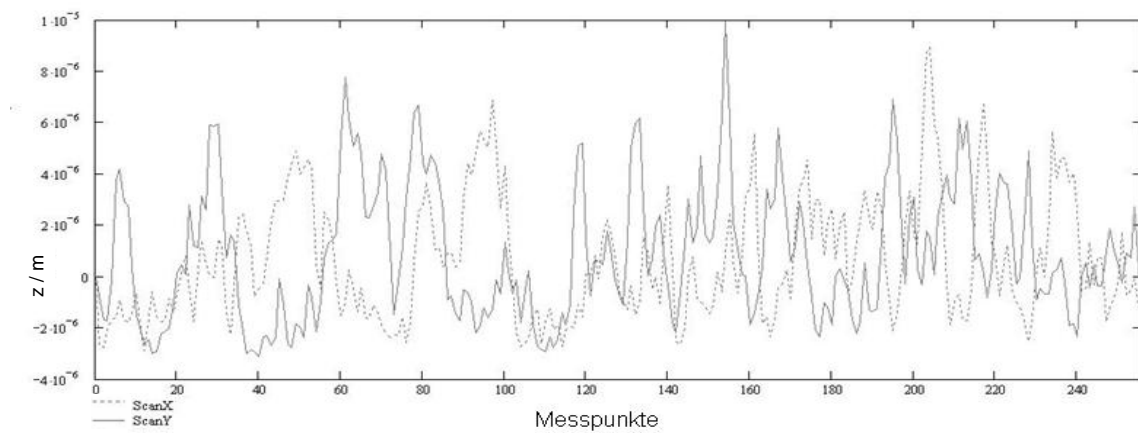


e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

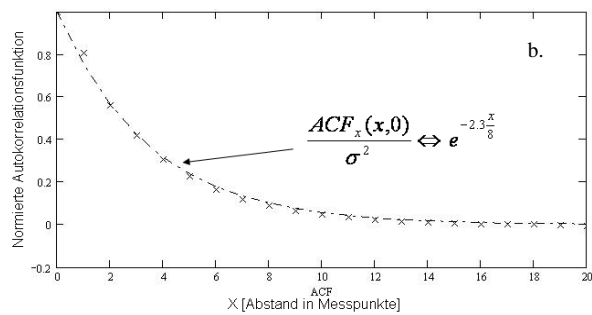
Abbildung 9.17 a – e: Gemessene Topographie einer durch Drahtschneiden (grob) erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 µm).

Ergänzungen zu Abbildung 7.17

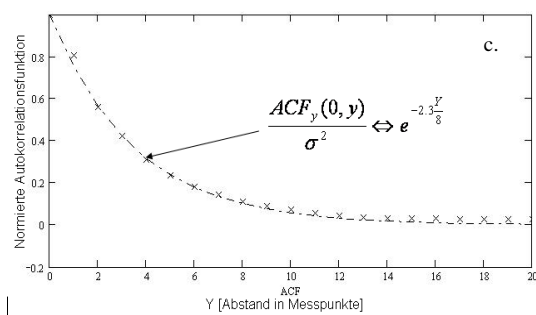
Simulierte drahtgeschnittene (grob) Oberfläche



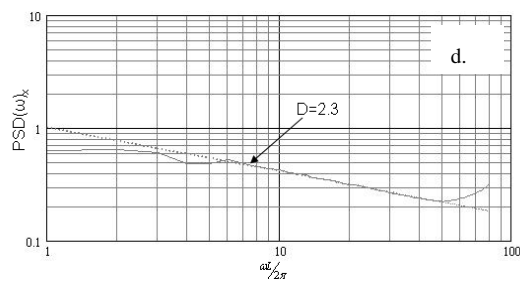
a.: Linienprofil in x- bzw. y-Richtung.



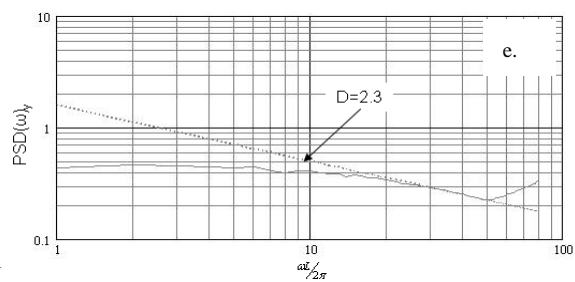
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.



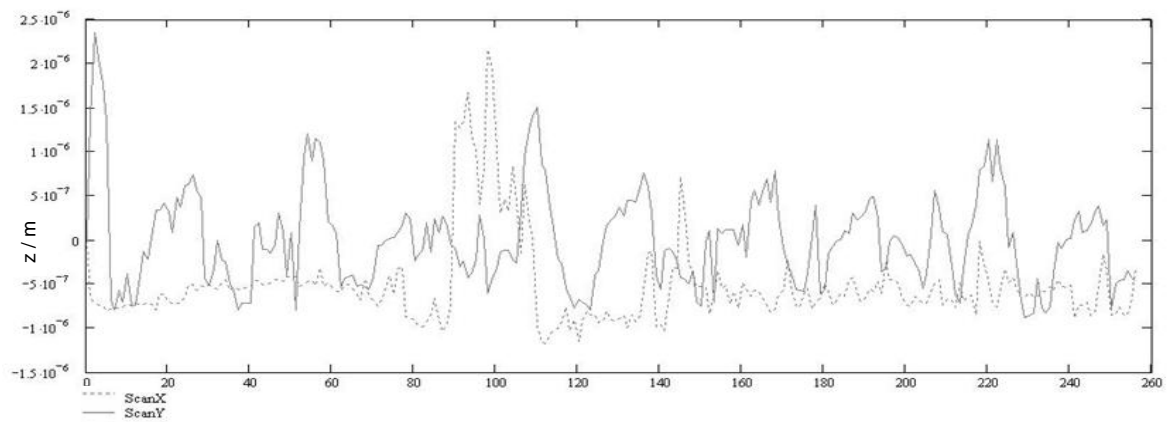
d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.



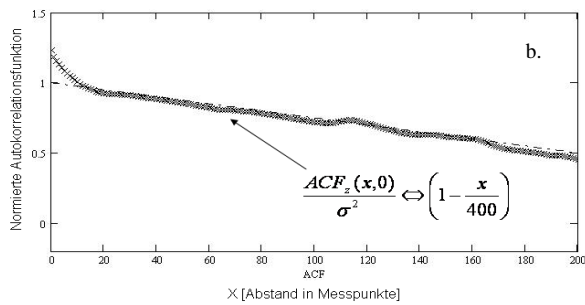
e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

Abbildung 9.18 a – e: Simuliert Topographie einer durch Drahtschneiden (grob) erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 μm).

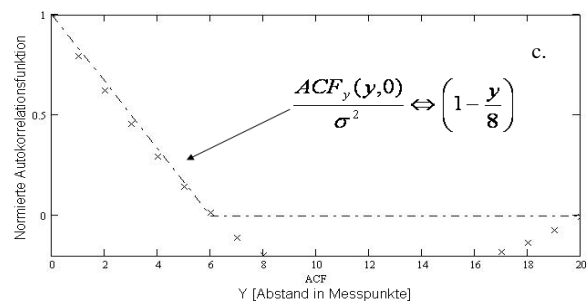
Ergänzungen zu Abbildung 7.18

Gemessene gedrehte Oberflächen (außen)

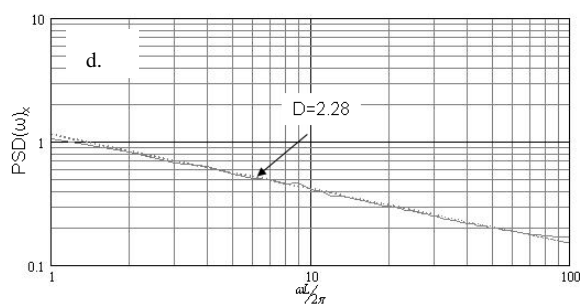
a.: Linienprofil in x- bzw. y-Richtung.



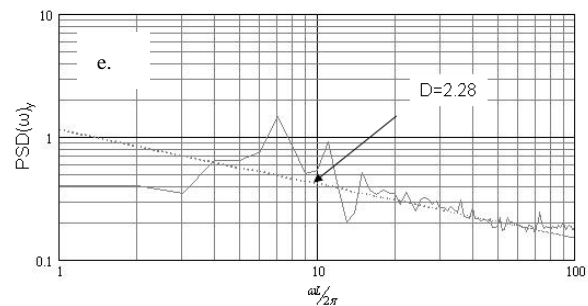
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.



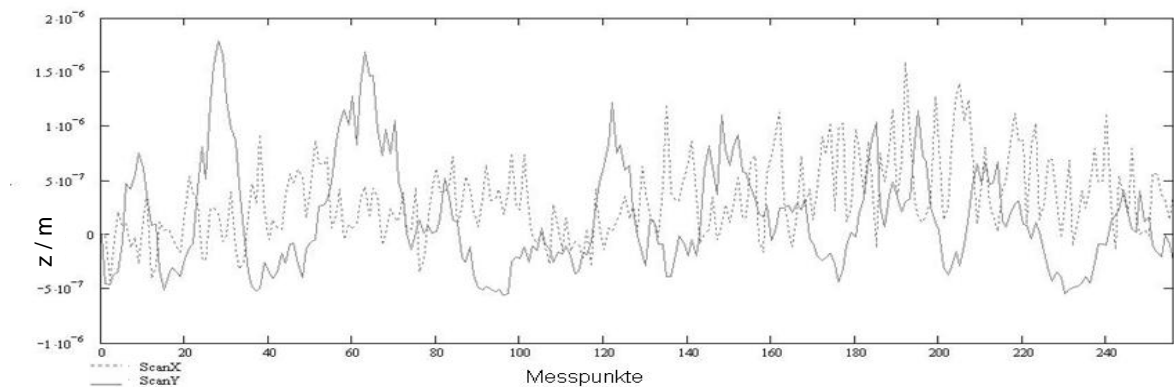
d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.



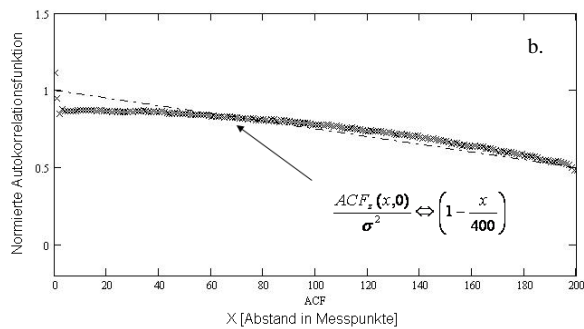
e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

Abbildung 9.19 a – e: Gemessene Topographie einer durch Drehen (außen) erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 µm).

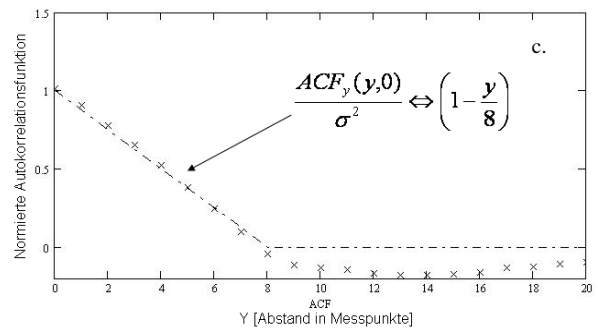
Ergänzungen zu Abbildung 7.19

Simulierte gedrehte Oberfläche (außen)

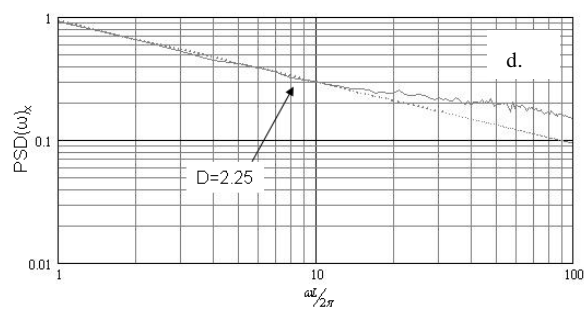
a.: Linienprofil in x- bzw. y-Richtung.



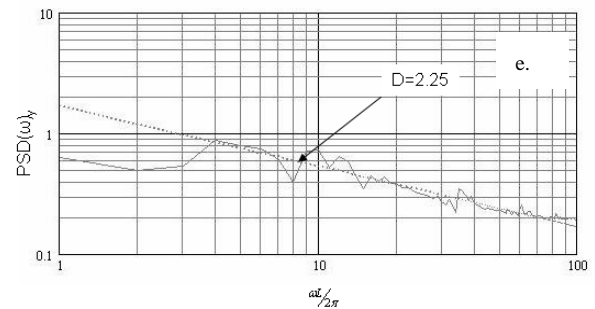
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.



d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.

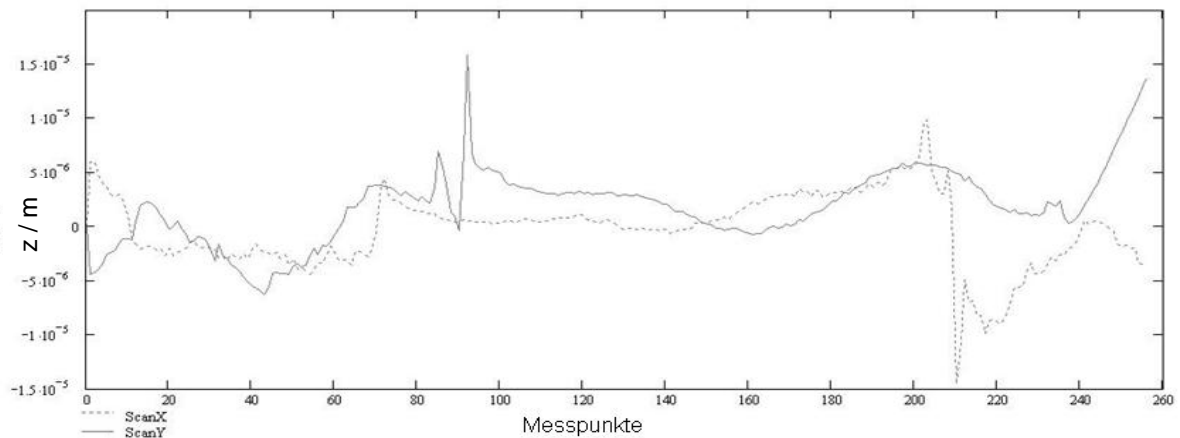


e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

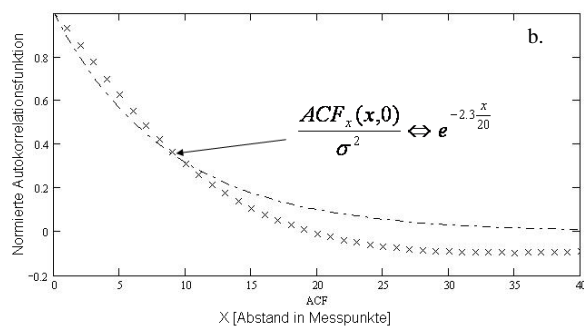
Abbildung 9.20 a – e: Simulierte Topographie einer durch Drehen (Außenbereich) erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 μm).

Ergänzungen zu Abbildung 7.20

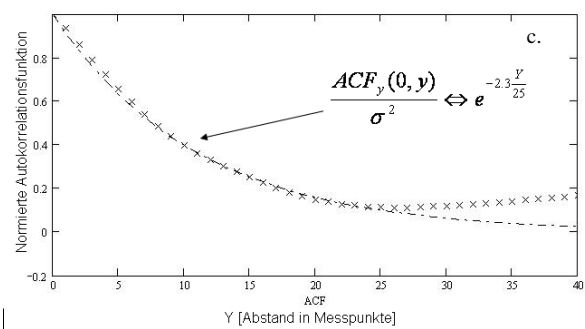
Gemessene gedrehte Oberflächen (innen)



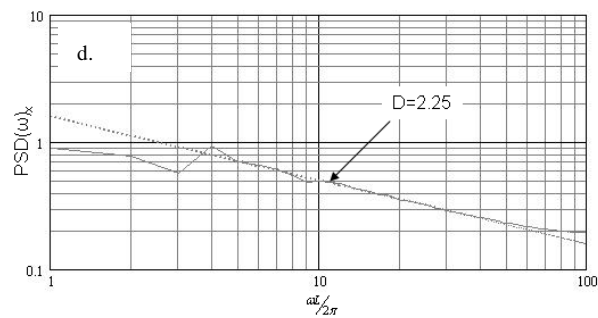
a.: Linienprofil in x- bzw. y-Richtung.



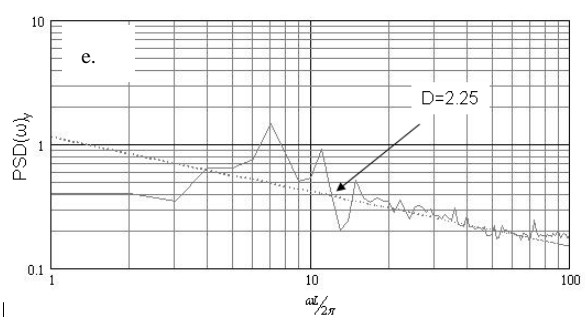
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.



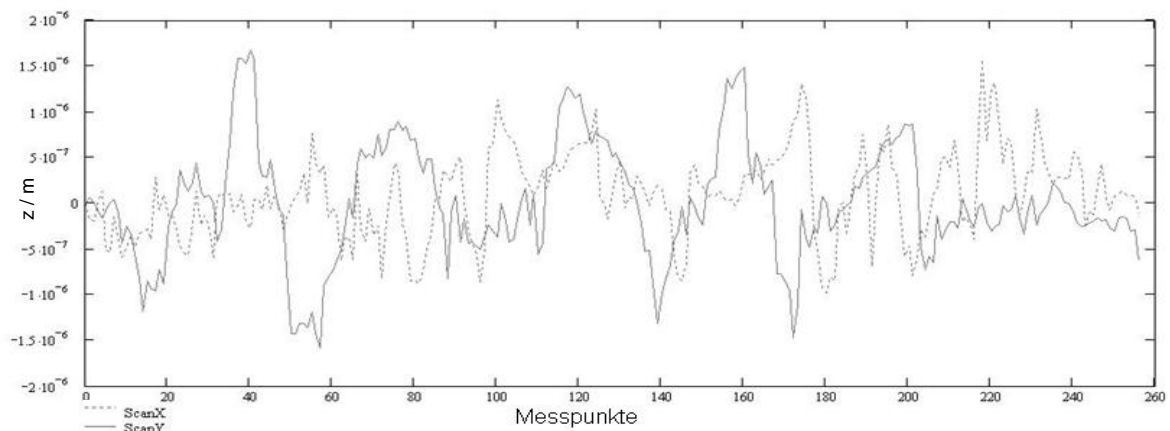
d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.



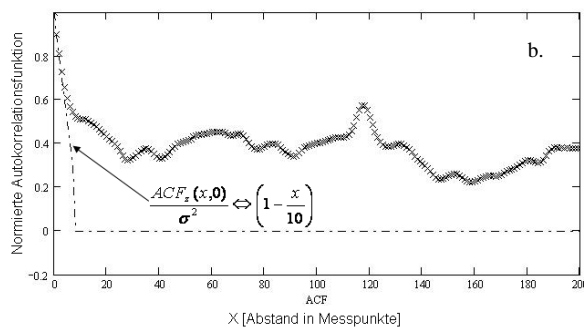
e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

Abbildung 9.21 a – e: Gemessene Topographie einer durch Drehen erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 μm). Dargestellt ist der Bereich um die Drehachse.

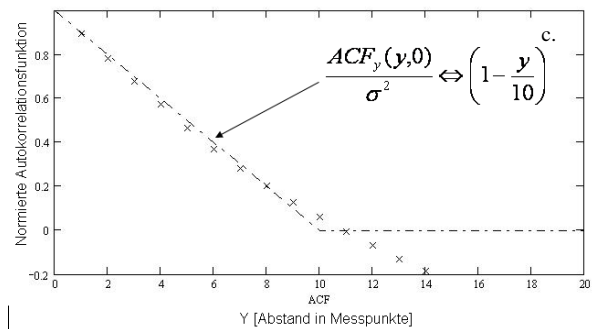
Ergänzungen zu Abbildung 7.22

Gemessene (doppelt) gefräste Oberfläche

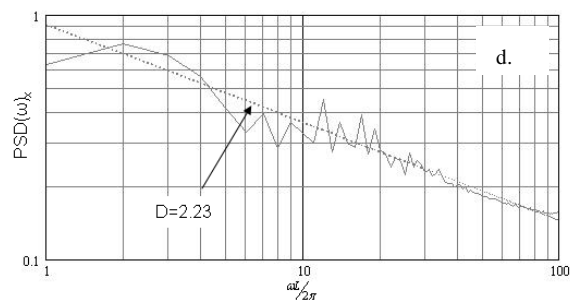
a.: Linienprofil in x- bzw. y-Richtung.



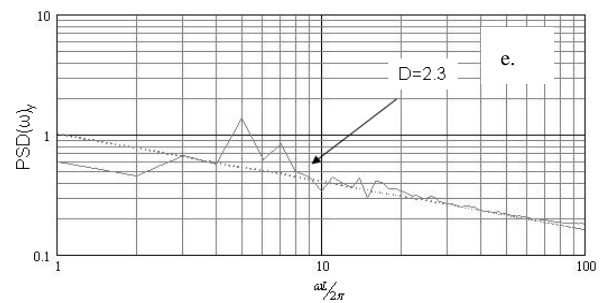
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.



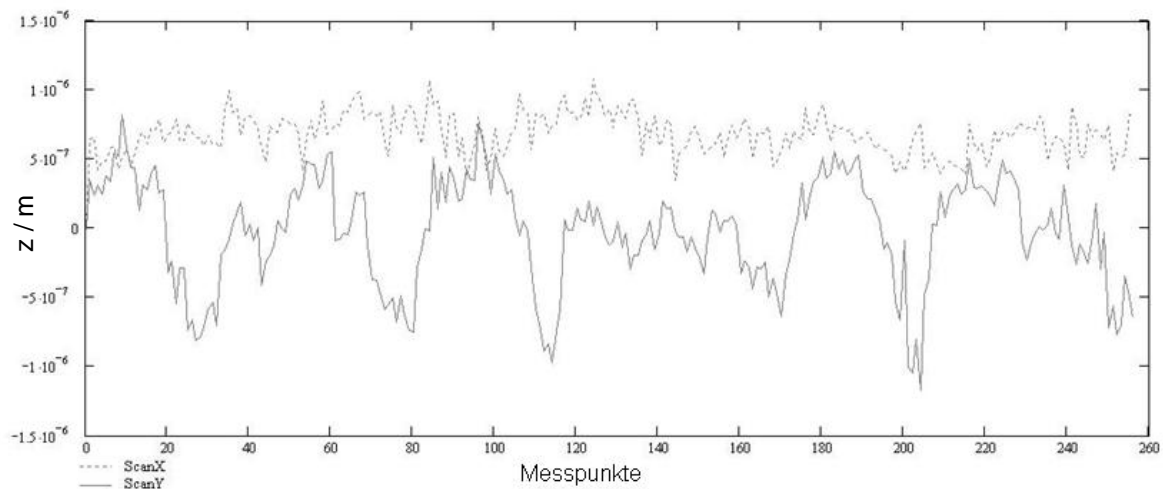
d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.



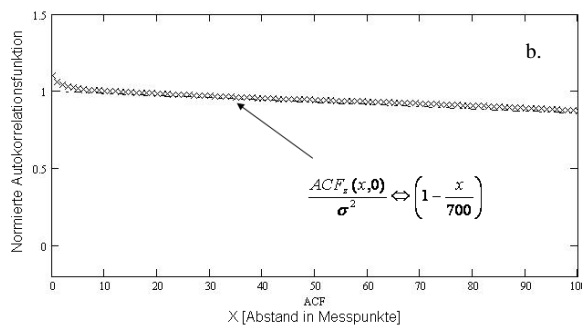
e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

Abbildung 9.22 a – e: Gemessene Topographie einer durch Fräsen (grob) erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 µm).

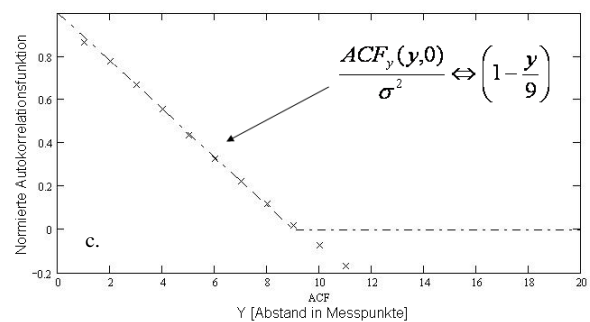
Ergänzungen zu Abbildung 7.23

Gemessene (einfach) gefräste Oberfläche

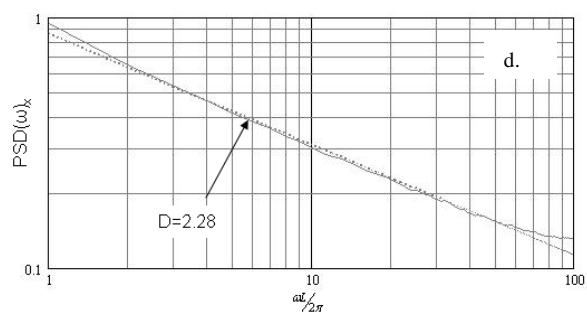
a.: Linienprofil in x- bzw. y-Richtung.



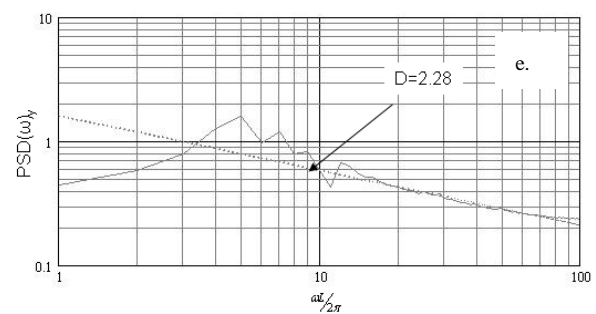
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.



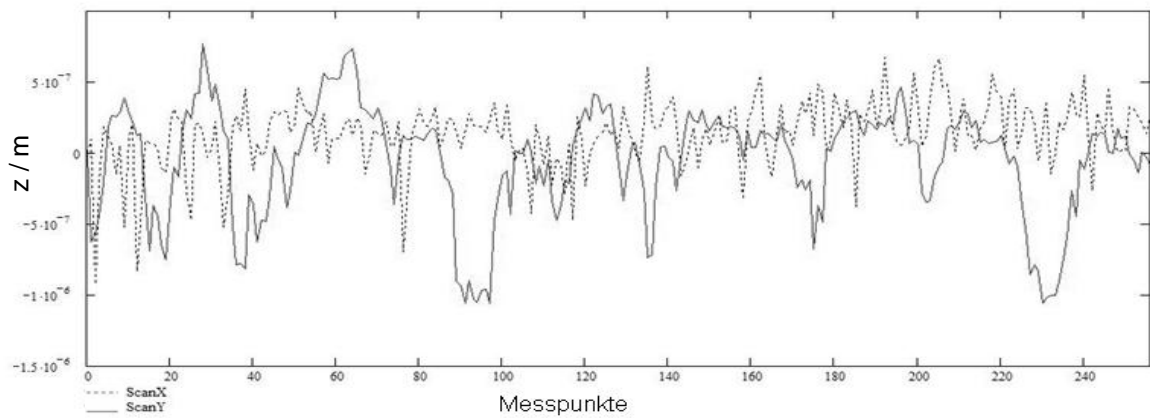
d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.



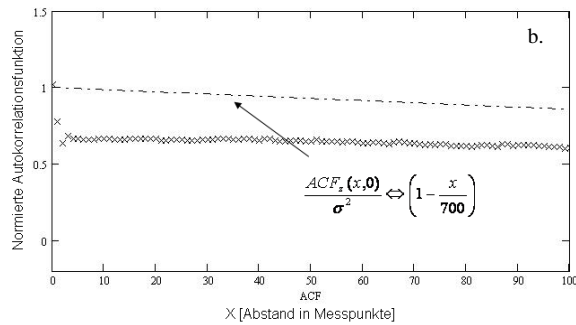
e.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.

Abbildung 9.23 a – e: Gemessene Topographie einer durch Fräsen (fein) erzeugten Stahl- Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 µm).

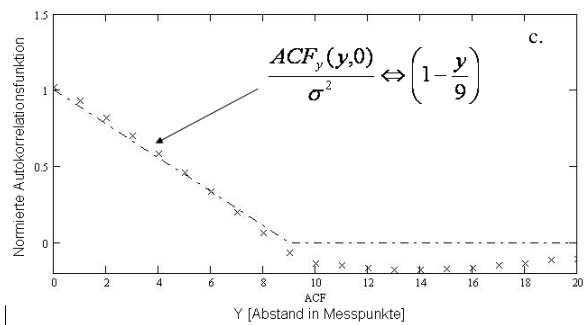
Ergänzungen zu Abbildung 7.24

Simulierte (einfach) gefräste Oberfläche

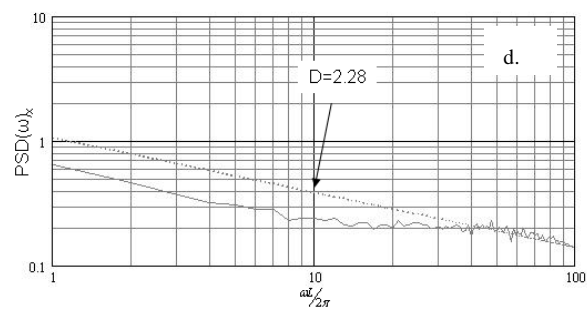
a.: Linienprofil in x- bzw. y-Richtung.



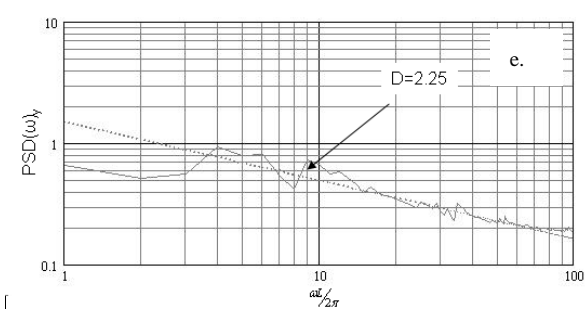
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.



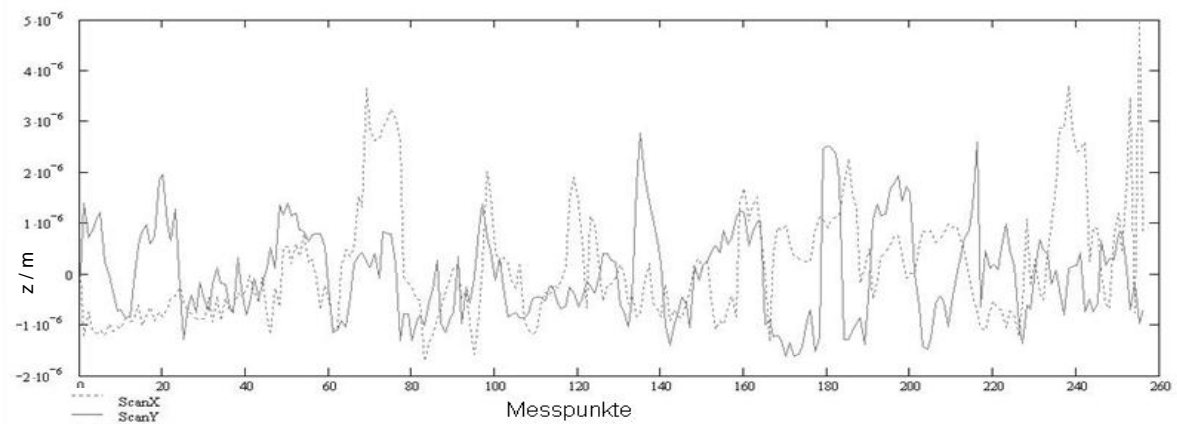
d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.



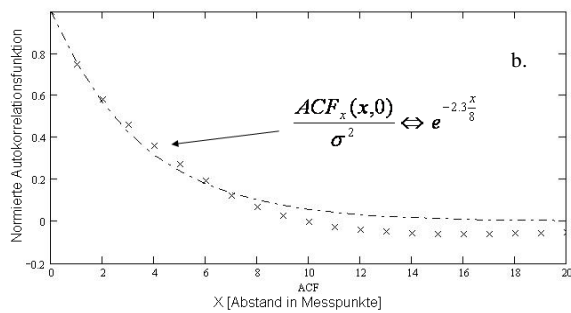
e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

Abbildung 9.24 a – e: Simulierte Topographie einer durch Fräsen (fein) erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 μm).

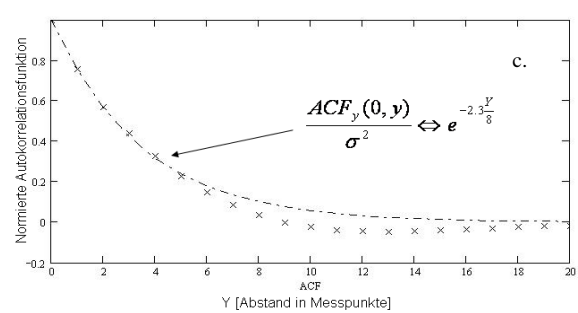
Ergänzungen zu Abbildung 7.25

Gemessene senkerodiert (fein) Oberfläche

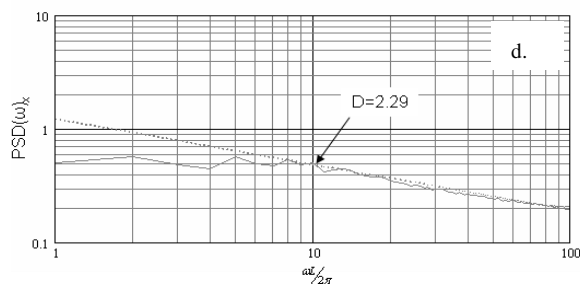
a.: Linienprofil in x- bzw. y-Richtung.



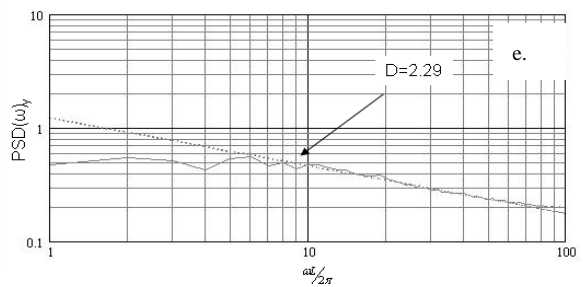
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.



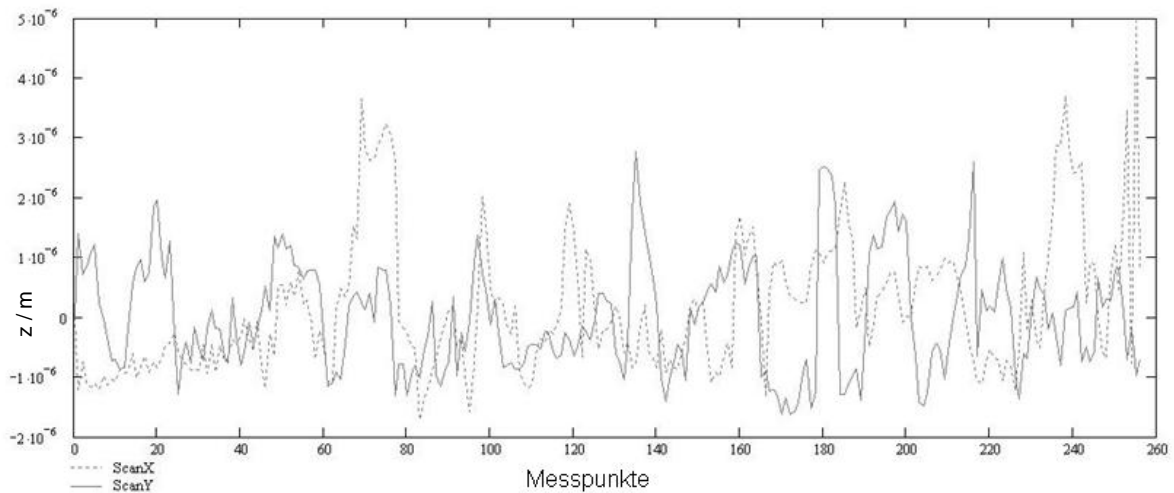
d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.



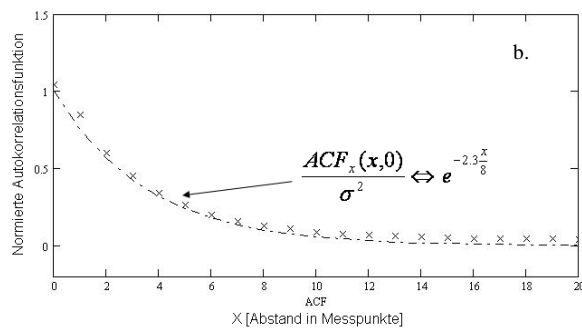
e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

Abbildung 9.25 a – e: Gemessene Topographie einer durch Senkerodieren (fein) erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 µm).

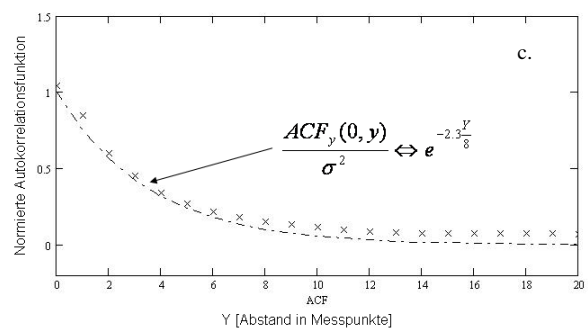
Ergänzungen zu Abbildung 7.26

Simuliert senkerodiert (fein) Oberfläche

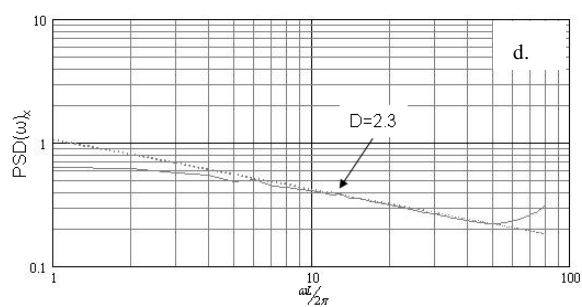
a.: Linienprofil in x- bzw. y-Richtung.



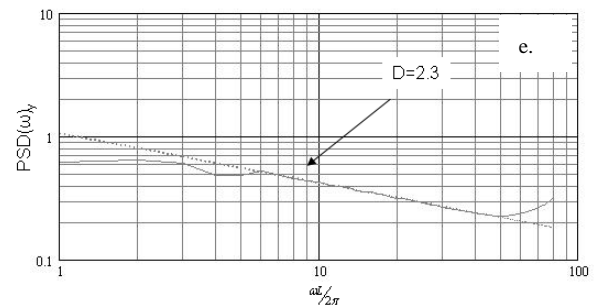
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.



d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.

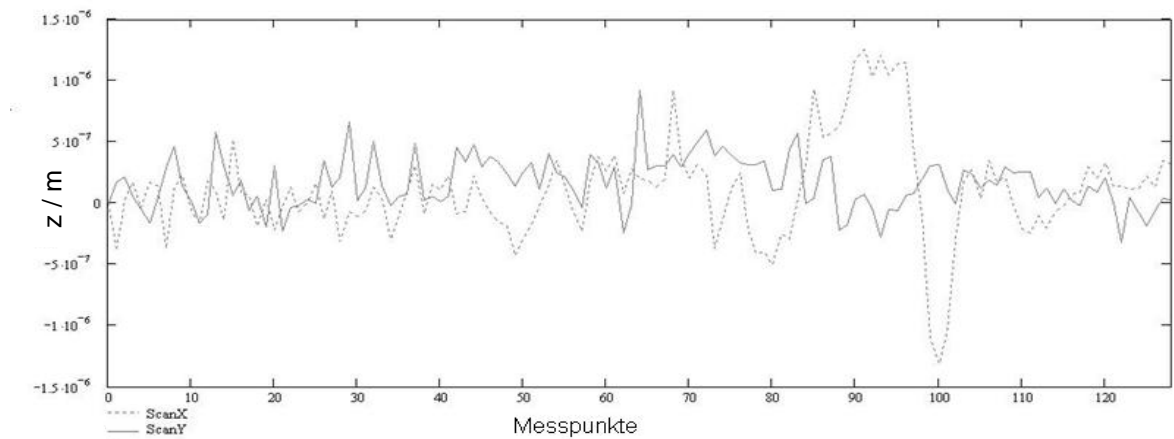


e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

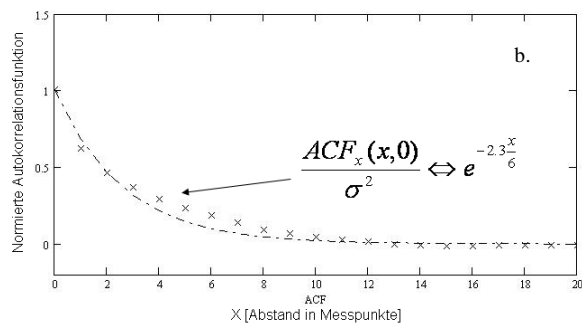
Abbildung 9.26 a – e: Simuliert Topographie einer durch Senkerodieren (fein) erzeugten Stahl-Oberfläche (256 x 256 Pkt. Auflösung 1,5625 μm).

Ergänzungen zu Abbildung 7.27

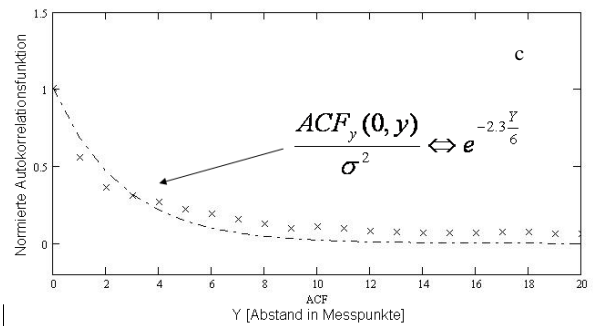
Gemessene Au-Sonde



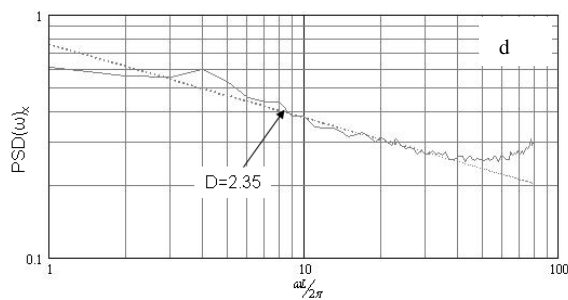
a.: Linienprofil in x- bzw. y-Richtung.



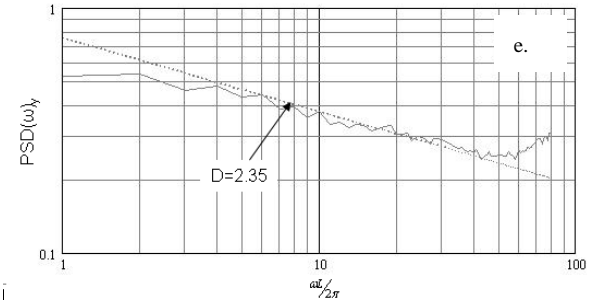
b.: Autokorrelation in x-Richtung.



c.: Autokorrelation in y-Richtung.



d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.

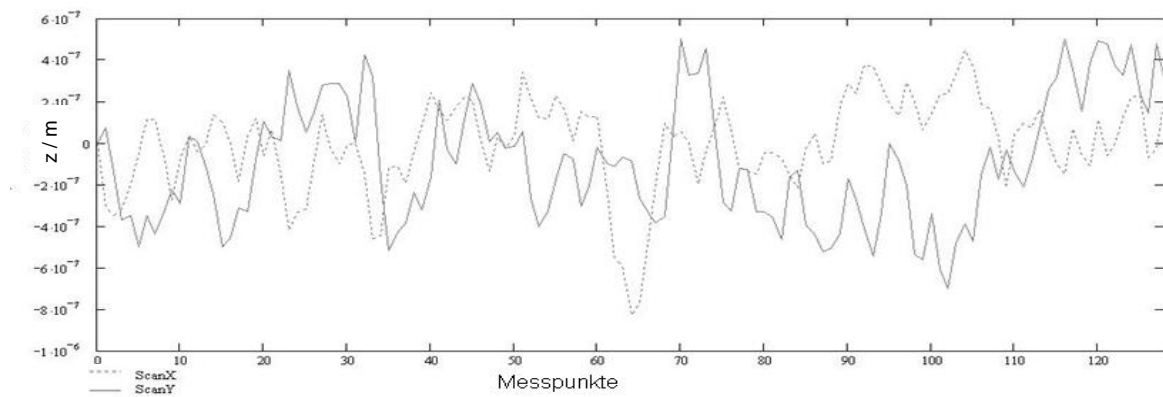


e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

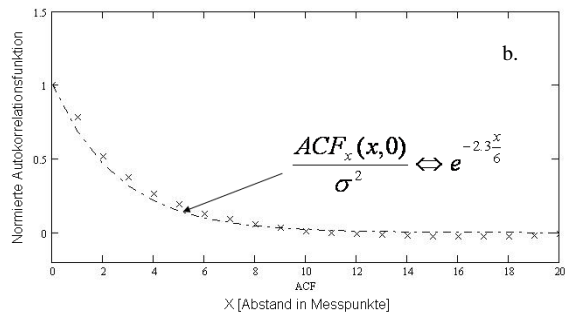
Abbildung 9.27 a. – e.: Gemessene Topographie der Au-Sonde (128 x 128 Pkt. Auflösung 1,5625 μm).

Ergänzungen zu Abbildung 7.28

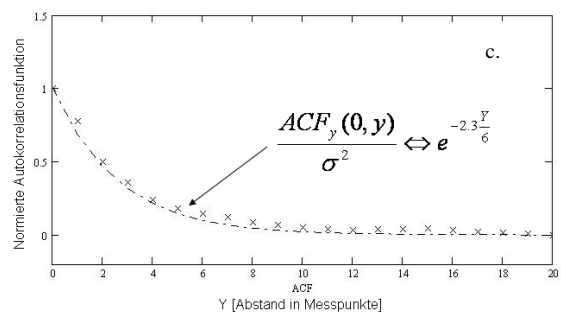
Simulierte Au-Sonde



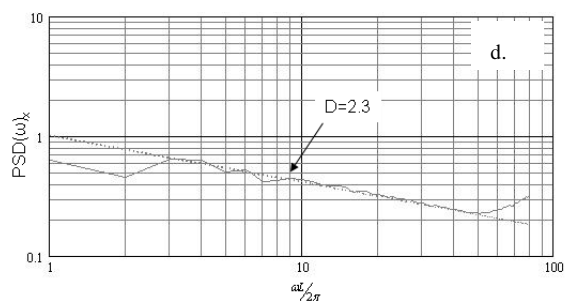
a.: Linienprofil in x- bzw. y-Richtung.



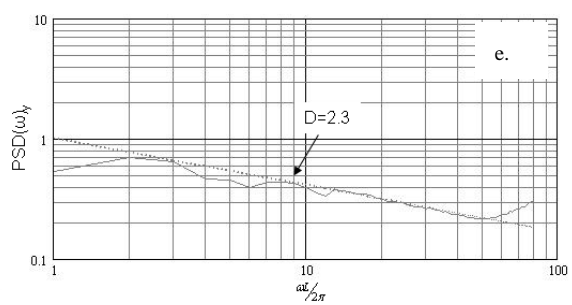
b: Autokorrelation in x-Richtung.



c: Autokorrelation in y-Richtung.



d.: Spektrale Leistungsdichte in x-Richtung.



e.: Spektrale Leistungsdichte in y-Richtung.

Abbildung 9.28 a – e: Simulierte Topographie der Au-Sonde (128 x 128 Pkt. Auflösung 1,5625 µm).

Anhang 16: Software „FirstContact“

Nachfolgend soll hier die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Software „FirstContact“ kurz beschrieben werden. Die Software wurde mit dem Ziel entwickelt, dass nach der erstmaligen Definition eines Parametersatzes sehr schnell eine ganze Simulationsfolge generiert werden kann. Beim Abspeichern einer Simulation werden sowohl die Datenmatrizen in separaten Dateien abgespeichert, als auch sämtliche relevanten berechneten Kennwerte in eine Access-Datenbank geschrieben. Parallel hierzu werden sämtliche Rechenparameter mit übergeben. Dadurch kann durch ein Filtern der Datenbank die zu untersuchenden Abhängigkeiten herausgearbeitet und als Datensatz in eine Tabellenkalkulation übergeben werden. Weiterhin ergibt sich hierdurch die Möglichkeit, durch Einladen der Datensätze einer gespeicherten Simulation und Variation einzelner Parameter Simulationsfolgen zu generieren, ohne jedes Mal einen kompletten Parametersatz eingeben zu müssen. Hierdurch wird auch die Fehlerrate auf Grund der Eingabe falscher Parameter auf ein Minimum reduziert, bzw. durch das anschließende Filtern der Datenbank gänzlich ausgeschlossen. Als Entwicklungsumgebung diente der Turbo C++ Explorer der Firma Borland. Es wurde bewusst die lizenzfreie Explorer-Version gewählt, um eine Weitergabe und Bearbeitung des Quellcodes auf andere Windows Rechner zu erleichtern. Hierdurch war es jedoch nötig, Software-Komponenten (Packages) die nicht in der Explorer-Version integriert waren, erst zur Laufzeit des Programms einzubinden. Zur dreidimensionalen Visualisierung der Daten wurden das ebenfalls lizenzfrei verfügbare „Visual Toolkit“ der Firma Kitware [5][132] in der Version 5.0 verwendet. Da die Auswertung der Daten vornehmlich auf Firmenrechnern stattfinden soll, auf denen standardmäßig MS Office Professionell installiert ist, wurde die Datenbankschnittstelle kompatibel zu MS–Access programmiert. Hierdurch ist eine einfache Anbindung zur Office-Welt gegeben.

Nach Start des Programms erscheint das in Abbildung 9.29 gezeigte Bild. In linken oberen Bereich befinden sich Registerkarten mit den Angaben der Kontaktparameter wie Schichtfolge, Schichtdicke und gegebenenfalls Kontaktradien (nur bei simulierten Oberflächen). Darunter befinden sich die Editierfelder für die Auflösungen in x-, y- und z-Richtung. Für jede Schichtfolge muss eine separate z-Auflösung gewählt werden, die standardmäßig auf 8 gesetzt ist und im Allgemeinen deutlich geringer als die x/y-Auflösung gewählt werden kann. Der Chi-Faktor ist auf den Werte 2 festgesetzt und kann derzeit nicht geändert werden. Die x/y-Auflösung lässt sich über die Schalter „/2“ bzw. „*2“ jeweils halbieren beziehungsweise verdoppeln. Der minimale Wert beträgt hierbei 16. Der Maximalwert ist auf 512 Punkte begrenzt. Falls mit rauen Oberflächen gerechnet wird, sollte die x/y-Auflösung nicht kleiner als 32 gewählt werden, da ansonsten keine realistischen Oberflächen generiert werden.

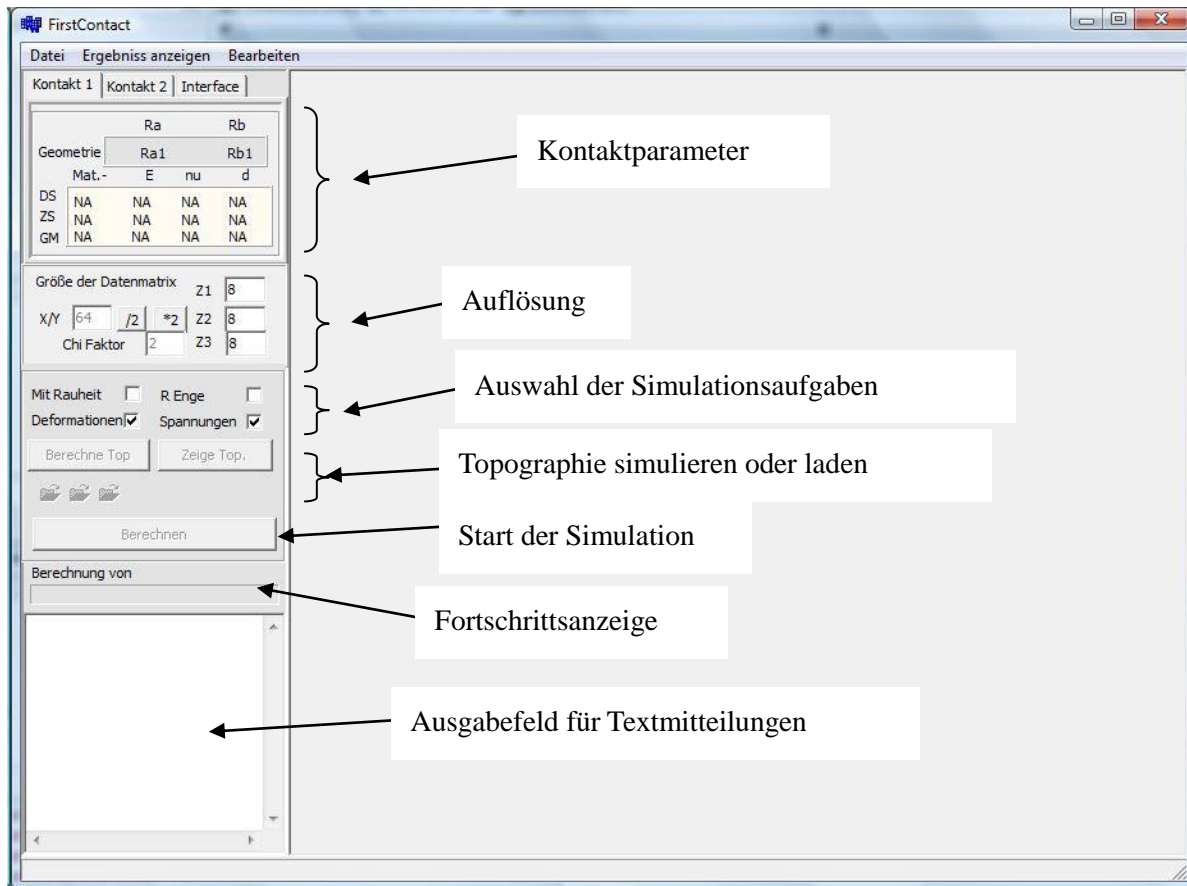


Abbildung 9.29: Startscreen der Simulationssoftware „FirstContact“

Nach dem Bereich der Auflösungseingabe, schließt sich ein Feld mit vier Checkboxes an. Hier kann festgelegt werden, welche Simulationen durchgeführt werden sollen. Neben der Festlegung ob mit oder ohne Rauheit gerechnet wird, lassen sich Engewiderstand, Deformationen und Spannungen getrennt auswählen. Falls mit rauen Oberflächen gerechnet wird, muss je nach Festlegung des Oberflächenmodells (siehe Kapitel 6.1) die Oberfläche simuliert oder geladen werden. Bei den geladenen Topographien ist zu unterscheiden, ob es sich um gemessene Oberflächen handelt, oder um Daten-Files aus gespeicherten Simulationen. Die Schalter „Berechne Top.“ bzw. „Zeige Top.“ werden erst aktiviert, wenn die Auswahlbox „Mit Rauheit“ gesetzt ist. Der Taster „Berechnen“ ist nur dann aktiv, wenn alle notwendigen Parameter für einen Simulationslauf gesetzt sind.

Eine neue Simulation wird, wie in Abbildung 9.30 dargestellt, unter dem Menüpunkt „Datei Neu“ initialisiert. Hierbei kann zwischen 6 Optionen gewählt werden. Die Optionen „Hertz“, „Zweischicht System“ bzw. „Dreischicht System“ erfordern die Definition sämtlicher benötigter Rechenparameter.

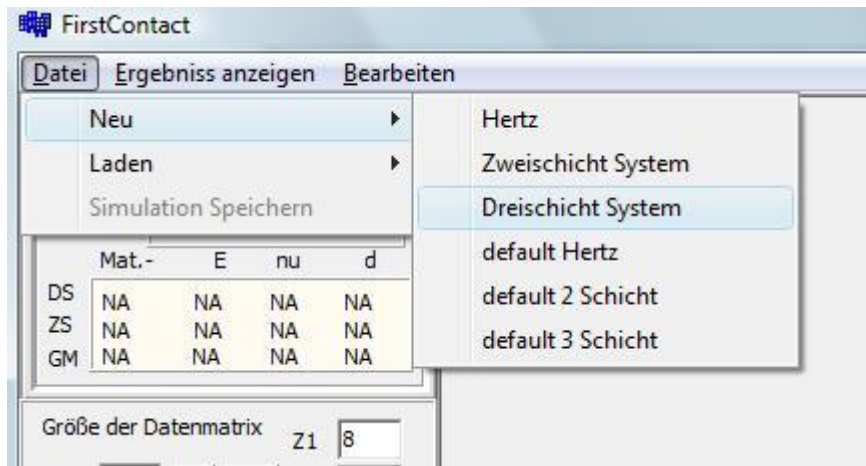


Abbildung 9.30: Definieren einer neuen Simulation.

Die drei entsprechenden mit default gekennzeichneten Optionen erlauben die Initiierung einer Simulation mit voreingestellten Werten. Diese Defaultparameter werden im Folgenden bei der jeweiligen Beschreibung gesondert angegeben. Durch Anwahl des Menüpunktes „Bearbeiten“ / „Werte ändern“ (Abbildung 9.31) können dann einzelne Parameter nachträglich geändert werden.

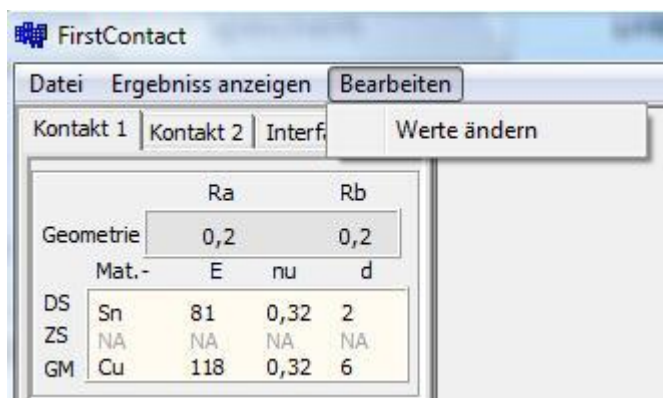


Abbildung 9.31: Ändern der Parameter einer bestehenden Simulation.

Nach der Auswahl eines nicht mit „default“ gekennzeichneten Kontaktmodells bzw. „Bearbeiten“ / „Werte ändern“ (Kontaktmodell muss zuvor ausgewählt sein), öffnet sich das in Abbildung 9.32 gezeigte Daten-Interface. Das Interface besitzt vier Hauptregisterkarten, die jeweils in eine oder mehrere Unterregisterkarten gegliedert sind. Je nach Wahl des Kontaktmodells „Hertz“, „Zweischicht System“ oder „Dreischicht System“ stehen für die Hauptregisterkarten „Kontakt 1“ bzw. „Kontakt 2“ eine unterschiedliche Anzahl Unterregister zu Verfügung. Wird die Option „Hertz“ gewählt, steht nur die Registerkarte „Grundmaterial“ zur Verfügung. Bei der Option „Zweischicht System“ werden nur die Register „Deckschicht“ und „Grundmaterial“ aktiviert. Bei einem Dreischichtmodell stehen die Register „Grundmaterial“, „Zwischenschicht“ und „Deckschicht“ zur Verfügung. Unabhängig vom ausgewählten Hauptregister ist am linken Rand des Fensters eine mit Scrollbalken versehene Materialliste implementiert. Durch das Anklicken eines Eintrages werden die in einer Datenbank hinterlegten Materialparameter für die jeweils aktuell ausgewählte Kontaktschicht in das entsprechende Registerblatt übernommen. Neben der Materialbezeichnung sind die Parameter „E-Modul“, „Poisson“ (Querkontraktionszahl) und „Yield“ (Yield Strength) hinterlegt. Der Parameter „Schichtdicke“ (Zwischenschicht und Deckschicht) ist selbsterklärend. Der Parameter „Tiefe“ (Grundmaterial) gibt an, bis in welche Tiefe die Dehnungen und Spannungen im Grundmaterial berechnet werden. „Schichtdicke“

und „Tiefe“ sind nicht in der Datenbank hinterlegt und müssen bei der Initialisierung einer neuen Simulation (gilt nicht für geladen Simulationen) manuell definiert werden. Das Gleiche gilt für die Kontaktradien „Ra“ und „Rb“. Diese Editierfelder stehen nur im Register „Grundmaterial“ zur Verfügung.

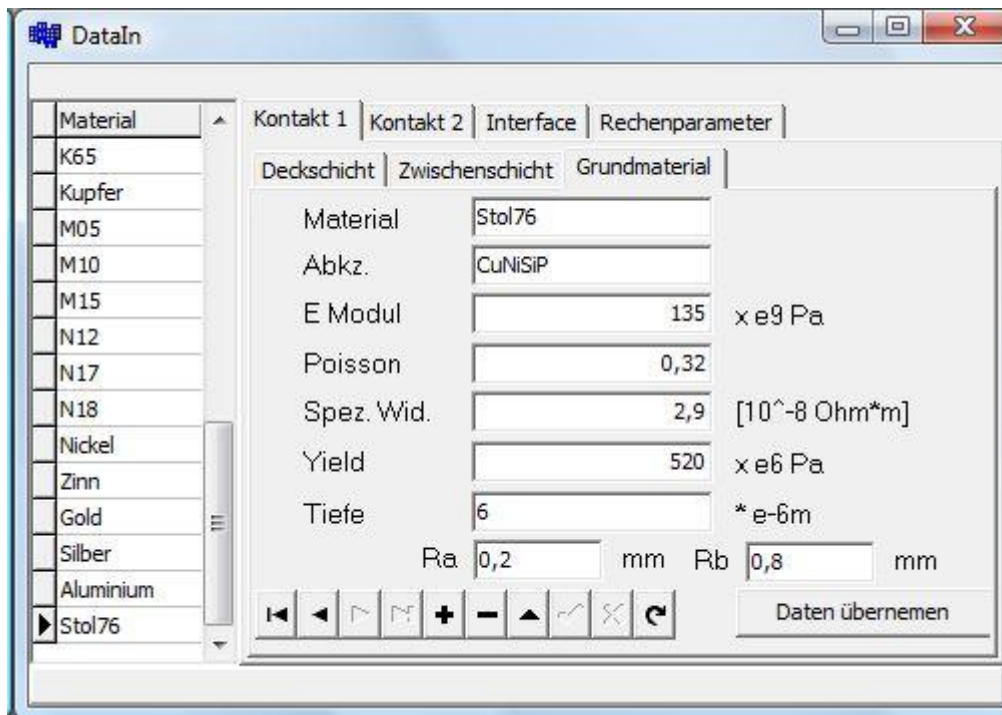


Abbildung 9.32: Einlesen der Materialparameter aus einer editierbaren Datenbank.

Gespeicherte Simulationen können über den Menüpunkt „Datei“ / „Laden“ / „Aus_Datenbank“ eingelesen werden (Abbildung 9.33).

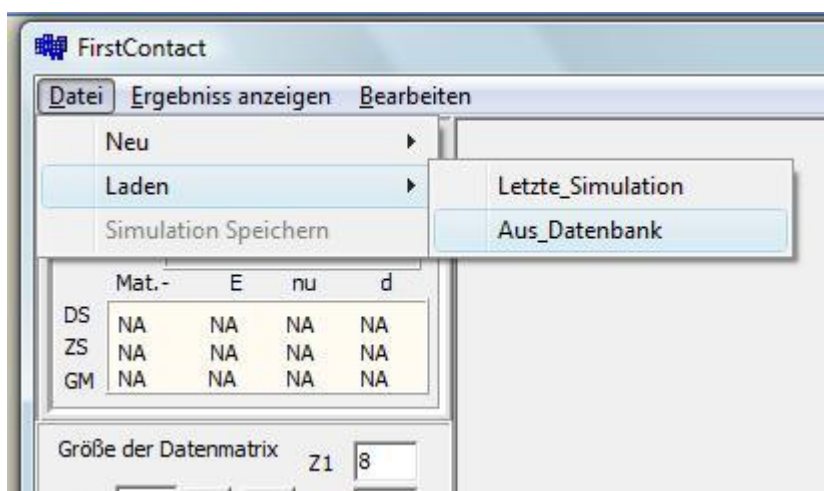


Abbildung 9.33: Laden einer gespeicherten Simulation.

Hierbei werden sämtliche Rechenparameter die bei der gespeicherten Simulation gesetzt waren, übernommen. Weiterhin wird die Pfadangabe übergeben, unter welcher die während dieser Simulation generierten 3D-Datendateien gespeichert sind. Neben der erneuten Darstellung der 3D-Daten, kann durch gezieltes ändern einzelner Parameter und starten eines neuen Rechenlaufes, Simulationsreihen zur Darstellung bestimmter Abhängigkeiten generiert werden. Nach der Auswahl dieses Menüpunktes erscheint das in Abbildung 9.34 gezeigte Datenbankfenster. Durch die Navigatortasten kann zwischen

den gespeicherten Rechenläufen gewechselt werden. Das Löschen einzelner Datensätze ist ebenfalls möglich. Im linken Bereich des Datenfensters sind die Reiterkarten mit den berechneten Kennwerten zu sehen. Neben globalen Ergebnissen wie zum Beispiel der Engwiderstand oder die Anzahl der a-Spots, können Unterregister gewählt werden, die im Falle von „Kontakt 1“ bzw. „Kontakt 2“ wiederum in Unterregister für die entsprechenden Kontaktschichten unterteilt sind. Hier sind dann die entsprechenden Kennwerte wie z.B. maximaler von Mises Stress usw. zu finden.

Im mittleren Bereich des Fensters sind die Berechnungs-Parameter der jeweiligen Simulationen aufgelistet, wie sie in Kapitel 6.2 und Kapitel 6.3 dargestellt sind. Neben der Auflösung des gespeicherten Simulationslaufes befinden sich in dieser Spalte die Hertz'schen Kontaktradien. Weiterhin sind hier die Parameter zur Simulation der elektrischen und mechanischen Kennwerte gelistet. In der rechten Spalte befinden sich ebenfalls durch Reiterkarten unterteilt, die Kennwerte der jeweiligen Beschichtungsmaterialien. Im Falle simulierter Topographien sind am unteren Ende der Spalte, in einem Listenfeld die Eingangsparameter der entsprechenden Simulationsverfahren aufgeführt.

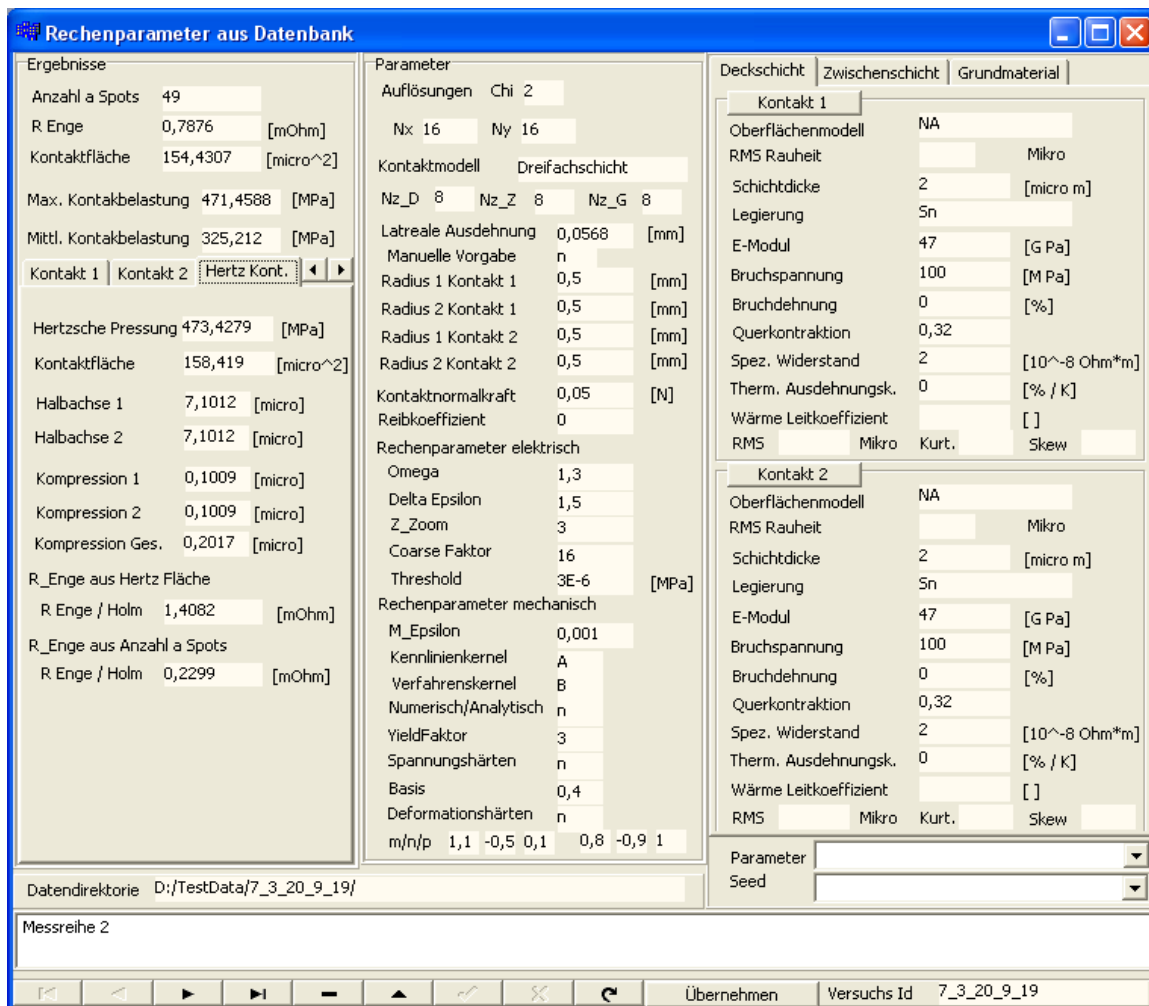


Abbildung 9.34: Datenbankinterface

Die Auswahl der Verfahren zur Simulation der Oberflächentopographien befinden sich auf der Reiterkarte „Interface“ des Eingabemoduls, das durch den Befehl „Datei“ / „Neu“ (siehe Abbildung 9.30) bzw. „Bearbeiten“ / „Werte ändern“ (Abbildung 9.31) aufgerufen wird. Im oberen Bereich befinden sich die Felder zur Vorgabe der Kontaktnormalkraft und des Reibkoeffizienten. Die Auswahlbox „L vorgeben“ wird deshalb eingeführt, damit bei einer Simulationsfolge mit z.B. variabler Kontaktnor-

malkraft, immer die gleiche laterale Ausdehnung der simulierten Topographien gegeben bleibt. Ansonsten normiert die Software die Oberflächenausdehnung immer so, dass sich die doppelte Größe des maximalen Hertz'schen Radius ergibt²⁸. Im Mittleren horizontalen Bereich des Eingabefensters befinden sich die Checkboxes für die Rauheit der unterschiedlichen Kontaktschichten (D/S = Deckschicht; Z/S = Zwischenschicht; G/M = Grundmaterial). Als Eingabeparameter dient die RMS-Rauheit σ in Mikrometer. Zum derzeitigen Stand dieser Arbeit wird die Topographie für jede Schicht gleich belassen (siehe Abbildung 6.29). Eine Auswahl mehrerer Schichtrauheiten erlaubt jedoch wie später gezeigt, eine Superposition der einzelnen Schichten. So kann wie z.B. in Kapitel 6.1.3 (Statistische Modelle) dargestellt, eine langwellige isotrope Topographie mit einer kurzwelligen anisotropen Topographie kombiniert werden. Eine Kombination unterschiedlicher Simulationsalgorithmen ist ebenfalls möglich. Dies geschieht durch die Auswahlsschalter in der unteren Ebene des Eingabefensters. Mit dem Schalter „Daten übernehmen“ werden sämtliche Einstellungen übernommen.

Die Auswahl des Reiters „Rechenparameter“ öffnet ein Eingabefenster, welches wiederum in drei Unterregister unterteilt ist. Hier kann zwischen den Parametereingaben zur Simulation der Topographien, der mechanischen und elektrischen Eigenschaften des untersuchten Kontaktpunktes gewählt werden.

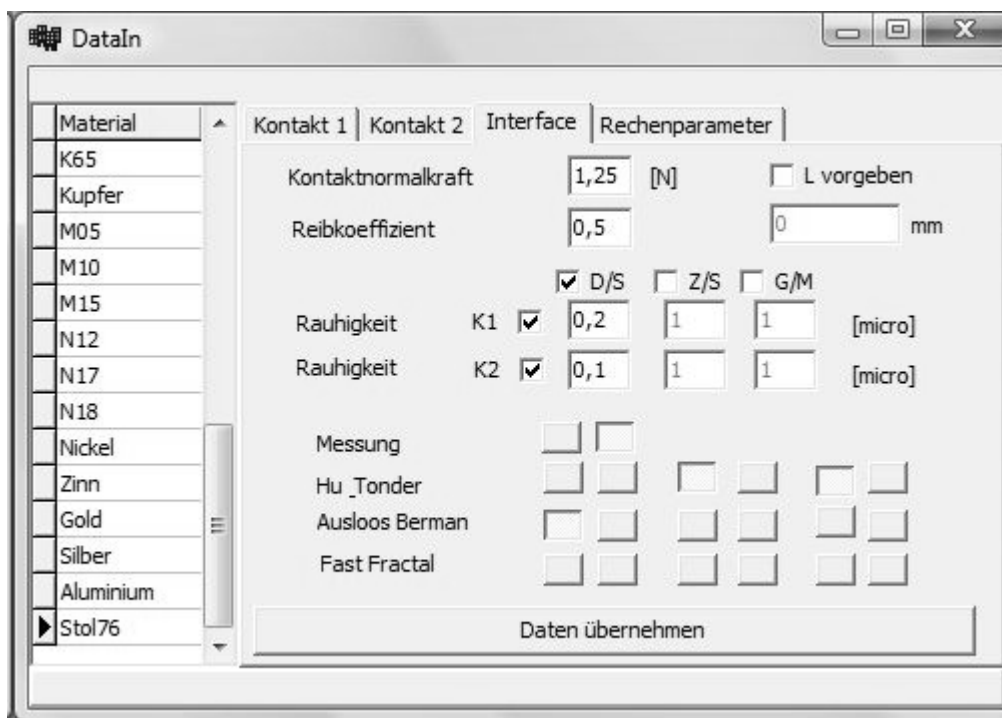


Abbildung 9.35: Festlegung der Oberflächentopographie

Abbildung 9.36 zeigt die Schnittstelle, in welcher die Parameter der jeweils ausgewählten Topographie-Simulationsalgorithmen gesetzt werden können. Der erste horizontale Block ist mit „Hu_Tonder“ gekennzeichnet. Hier werden im oberen Teil die so genannten „Sub Sizes“ vergeben. Diese Werte werden falls aktiviert, stets um eine ganzes Vielfaches von zwei kleiner als die lateralen

²⁸ Zu Beginn jeder Simulation mit simulierten Oberflächen wird immer zuerst der Hertz'sche Kontaktfall gerechnet. D.h. keine Rauheit; keine Schichten; rein elastischer Fall.

Auflösungen N_x bzw. N_y gewählt. Hierdurch werden wie in Kapitel 6.1.3 gezeigt, Topographien mit einer langwelligeren Grundrauheit erzeugt. Weiterhin werden hier die Autokorrelationslängen in x- und y-Richtung vorgegeben. Die Autokorrelationslängen können für jeden Kontakt und die entsprechenden Schichten gewählt werden. Hierbei gilt jedoch das Gleiche wie bereits zuvor erwähnt (Superposition mehrerer Topographien). Der zweite horizontale Parameterblock ist mit „Random“ gekennzeichnet. Hier werden die Parameter für den geschwindigkeitsoptimierten Algorithmus gemäß Kapitel 6.1.4 vorgegeben. Der mit „Mandelbrot“ gekennzeichnet Block dient zur Parametrisierung der fraktalen Simulationsalgorithmen analog zu Kapitel 6.1.2. Der letzte Parameterblock mit der Kennzeichnung „Seed Value“ dient zur Erzeugung unterschiedlich normalverteilter Zufallszahlenfolgen. Eine Auswahl des Registers „Dehnung/Spannung“ öffnet das in Abbildung 9.37 gezeigte Fenster.

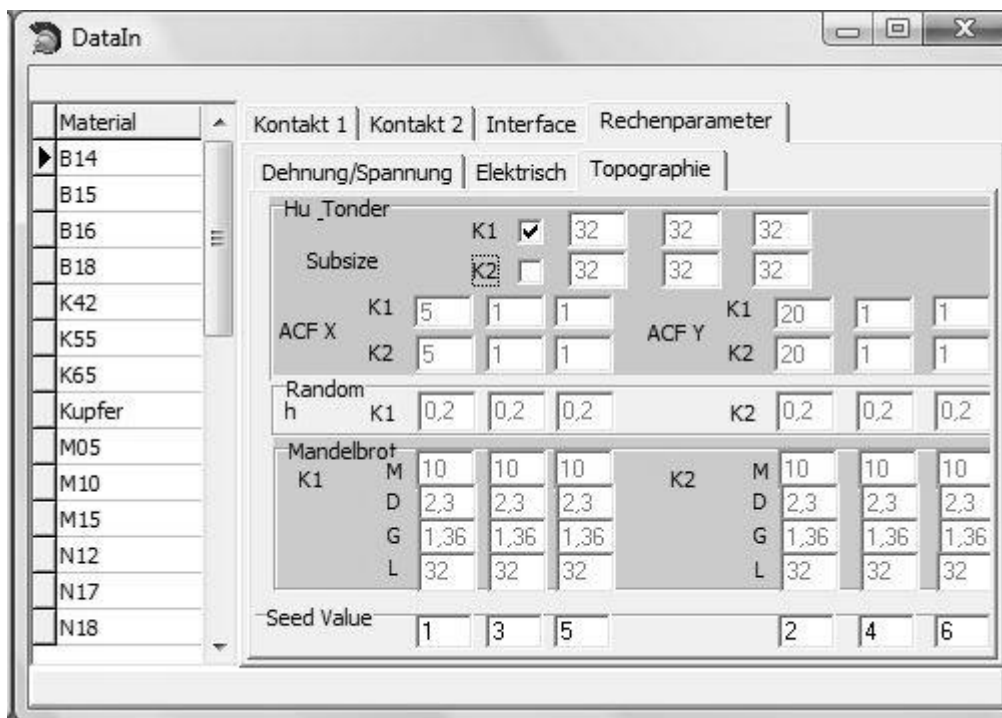


Abbildung 9.36: Parametrisierung der Oberflächen Simulationsalgorithmen

Hier werden in erster Linie die zu jeweiligen Simulation verwendeten Verfahren ausgewählt. Das Editierfeld „Epsilon“ dient zur Vorgabe des Abbruchkriteriums des CG-Iterationsalgorithmus gemäß Glg. (6.135). Dieser Wert ist standardmäßig mit dem Wert $\epsilon^{\text{itera}} = 0,001$ vorgegeben. Darunter befinden sich der Auswahlbereich der in Kapitel 6.2.4.2 dargestellten Härtekennlinien. Das hier enthaltene Editierfeld dient zur Änderung der Parameters Yield_Faktor, welcher den Defaultwert 3 besitzt. Rechts dieser Auswahlgruppe befindet sich die Parametrisierung der gewählten Härtekennlinien. Ist weder „Spannungshärten“ noch „Deformationshärten“ gewählt, so wird standardmäßig die Härtekurve gemäß Glg. (7.16) verwendet. Die Checkbox „Deformationshärten“ wählt die Härtekennlinie analog zu Glg. (6.115). Die entsprechende Parametrisierung erfolgt über die darunter liegenden Editierfelder. Die Auswahl von „Spannungshärten“ aktiviert die Härtekennlinie gemäß Glg. (6.114).

Innerhalb der Auswahlgruppe „Berechnungsverfahren“ erfolgt die Auswahl, welche Methode zur Berechnung der Deformationen innerhalb des CG-Verfahrens (siehe Kapitel 6.2.4.3) verwendet wird. Hierbei steht „Boussinesq“ für die direkte Matrixmultiplikation, „FFT“ für das DC-FFT-Verfahren und „MultiGrid“ für den geschwindigkeitsoptimierten Algorithmus gemäß Kapitel 6.2.4.1. Hierbei sei

noch einmal angemerkt, dass nur das DC-FFT-Verfahren den Schichtaufbau der Kontakte berücksichtigt. Die Checkbox „itera Speichern“ kann aktiviert werden, wenn die Zwischenschritte des CG-Iterationsalgorithmus auf Festplatte gespeichert werden sollen. Die Dateien werden in einem „MathCad“-kompatiblen Format geschrieben. Die Checkbox „FFT/Analytisch Liu“ führt dazu, dass die Deformationen und Spannungen gemäß der analytischen Lösung von Liu et al. [87] berechnet werden. Diese Methode ist jedoch nur für Zweischichtsysteme anwendbar. Die restlichen vier Checkboxes sind selbsterklärend und schalten die entsprechenden Berechnungen an oder ab. Standardmäßig sind alle Felder gesetzt.

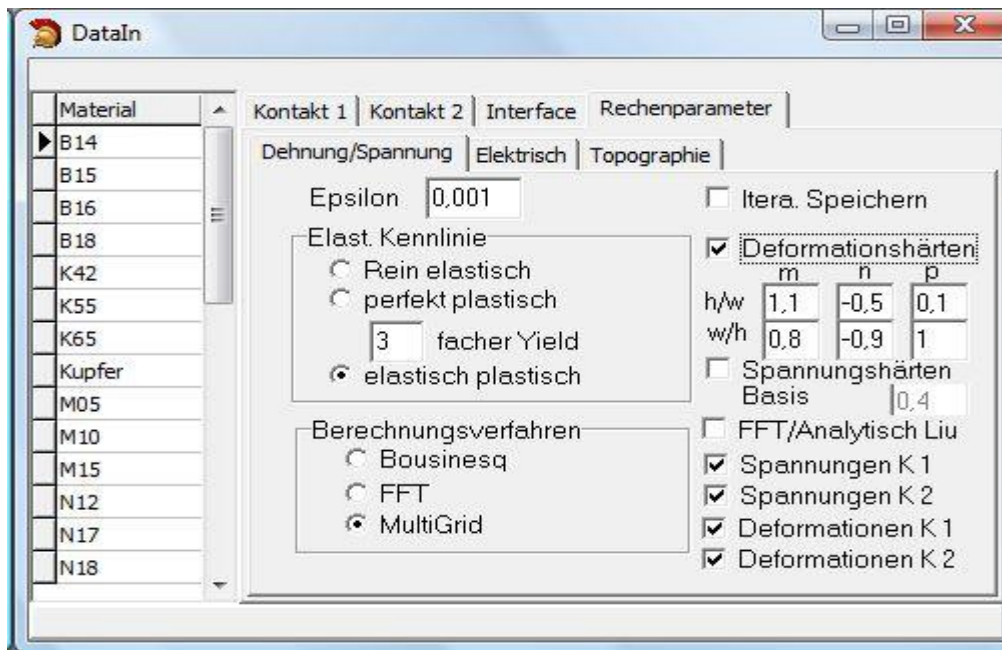


Abbildung 9.37: Parametrisierung der mechanischen Berechnungen.

Die Registerkarte „Elektrisch“ erlaubt die Änderung der in Tabelle 7.19 aufgeführten Parameter zur Berechnung der elektrischen Kennwerte.

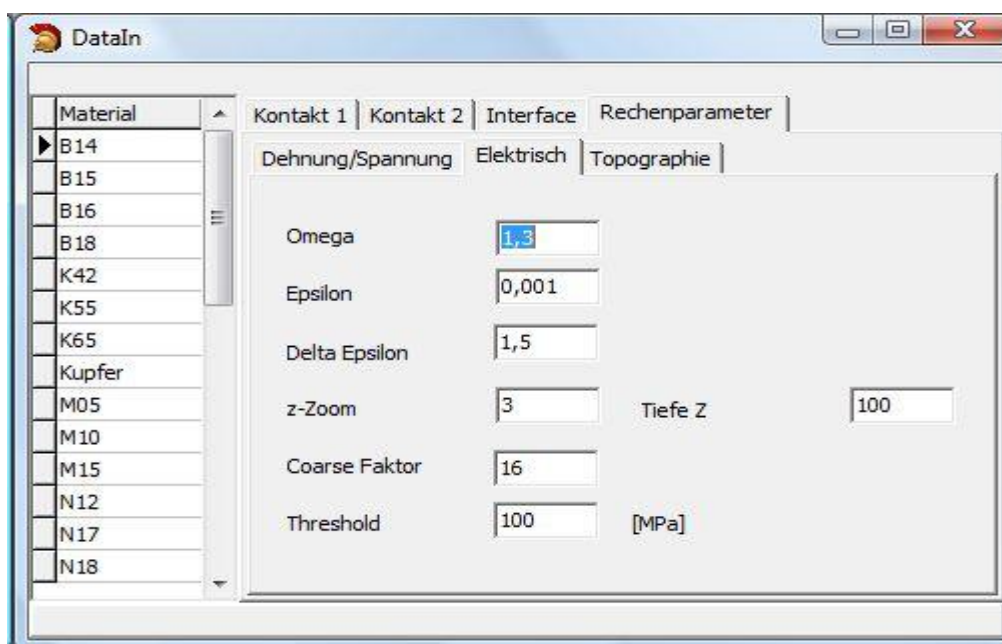


Abbildung 9.38: Parametrisierung zur Simulation der elektrischen Kennwerte.

Sind alle notwendigen Rechenparameter definiert und ist die Checkbox „Mit Rauheit“ gesetzt, so werden im Falle von simulierten Oberflächen die Tasten „Berechne Top.“ und „Zeige Top.“ aktiviert. Bei der Vorgabe auf gemessene Oberflächenprofile zurückzugreifen, werden die entsprechenden „Datei laden“ Symbole für „Kontakt 1“ bzw. „Kontakt 2“ aktiviert. Beim Laden einer gemessenen Oberfläche kann zwischen 4 Dateitypen unterschieden werden.

1. .prn → Mathcad Dateiformat (nur z-Werte keine x/y-Daten)
2. .asc → Nanofocus Matrix (x/y/z in Matrixform)
3. .dat → Nanofocus Tabelle (x/y/z in Tabellenform)
4. .vee → Veeco Tabelle

Nach der Auswahl eines Datenfiles öffnet sich ein weiteres Fenster (siehe Abbildung 9.39). Je nach Vorgabe der x/y-Auflösung ändert sich die Größe des hervorgehobenen einzulesenden Bereichs. Durch Betätigung der Pfeiltaster kann dieser Bereich beliebig auf der Oberfläche verschoben werden. Hierdurch können gezielt Bereiche aus der Gesamtopographie ausgewählt werden. Durch Anwahl der Lupensymbole werden die z-Werte jeweils um den Faktor 2 erhöht oder verringert. Bei der Verwendung des Mathcad-Datenformates sind keine x/y-Werte hinterlegt. Diese werden nachträglich generiert, indem die eingeleseene Fläche auf die doppelte Größe der theoretischen Hertz'schen Kontaktfläche skaliert wird.

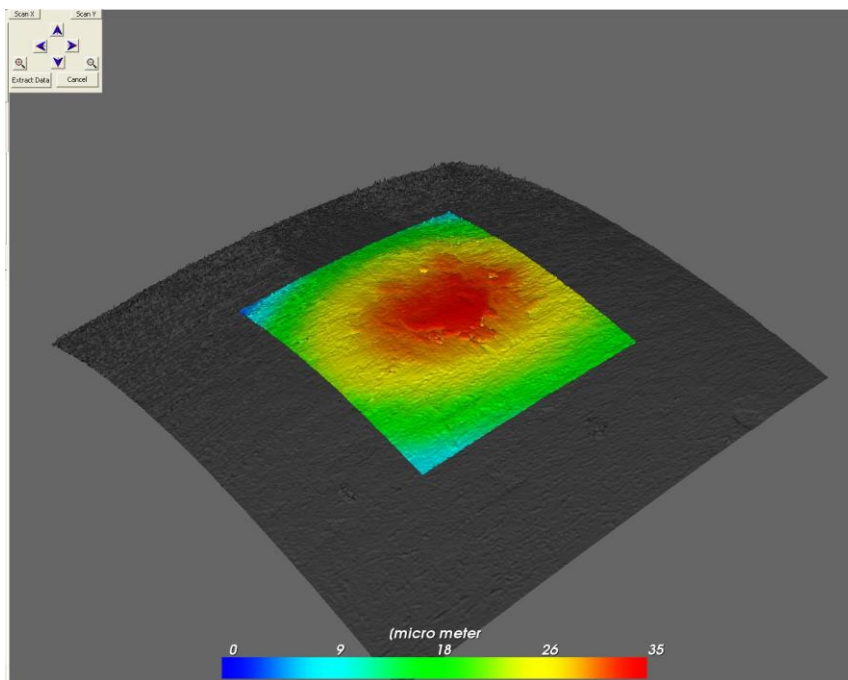


Abbildung 9.39: Einlesen eines Datenfiles

Sind die Topographien berechnet bzw. eingeladen, so kann durch Betätigung des Tasters „Zeige Top.“ das in Abbildung 9.40 gezeigte Fenster geöffnet werden. Im linken oberen Bereich des Fensters kann die Topographie der jeweiligen Schicht (falls in der Parametrisierung definiert) beider Kontakte ausgewählt werden. Die entsprechenden Rechenparameter werden in einem Ausgabebereich direkt darunter angezeigt. Der Taster „Topographie kumm.“ addiert die Topographien der einzelnen Schichten. In der eigentlichen Simulation wird, wie in Abbildung 6.29 gezeigt, nur mit einer Topographie je Kontakt gerechnet (hier Topographie der Deckschicht). Die Anwahl des Schalters „Filtern“ erzeugt

die drei Felder im rechten Fensterbereich, die bei der Normal-Ansicht nicht dargestellt werden. Über die Schalter „Orig.“, „Rau“ und „Glatt“ wird die hinsichtlich Kontaktradius und Rauheit gefilterte Topographie im Hauptfeld des Fensters dargestellt. Die Filterung erfolgt durch zwei unterschiedliche Arten. Bei gemessenen und simulierten Oberflächen erfolgt die Filterung, indem die Topographie mittels einer FFT transformiert wird. Über den im rechten unteren Bereich dargestellten Schieberegler werden Frequenzbereiche definiert, aus welchen durch Rücktransformation die Rauheit und die makroskopische Oberflächenstruktur (Kontaktradien) erzeugt wird. Bei simulierten Oberflächen können die Kontaktradien explizit durch Subtraktion von der Ausgangsoberfläche herausgefiltert werden. Die hinsichtlich Kontaktradius gefilterte Struktur kann dann, mittels den unter dem Register „Verteilung ändern“ zur Verfügung gestellten Optionen, modifiziert werden (siehe hierzu auch Kapitel 6.1.5: Erzeugen nicht normalverteilter Oberflächen). Des Weiteren stehen Funktion zum Ausrichten, und Filtern von Fehlstellen usw. zur Verfügung.

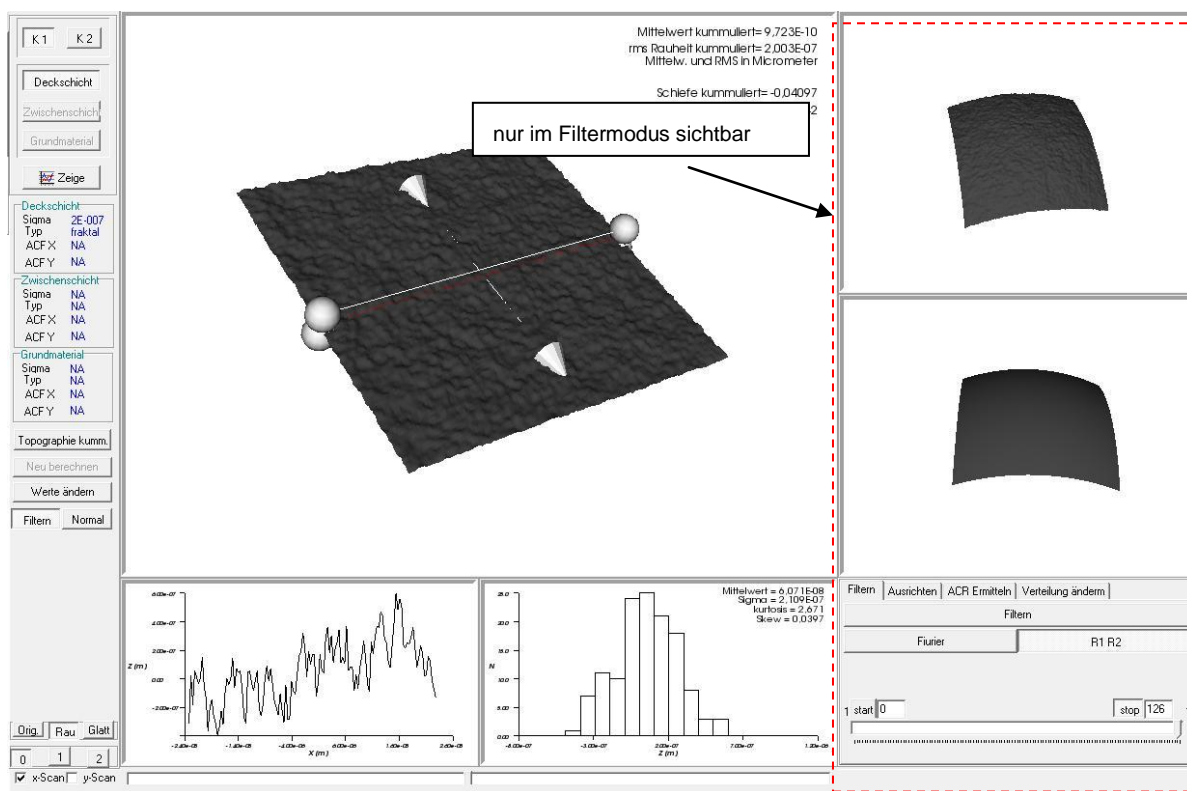


Abbildung 9.40: Interface zum Analysieren, Filtern und ändern von Oberflächentopographien (gezeigt ist der Filtermodus)

Sind alle zur Simulation notwendigen Parameter gesetzt und die Oberflächentopographien definiert, so wird der Taster „Berechnen“ (siehe Abbildung 9.29) aktiviert. Während der Berechnung wird der Status des jeweiligen Schrittes in Form eines Fortschrittsbalken visualisiert. Zwischenergebnisse bzw. jeweils durchgeführte Threads werden in einer Listbox ausgegeben. Nach Beendigung der Berechnungen wird der Menüpunkt „Simulation Speichern“ (siehe Abbildung 9.30) aktiv. Die Speicherung sämtlicher Parametersätze und Ergebnisse erfolgt nach Quittierung des in Abbildung 9.41 gezeigten Eingabefensters. Hier können zusätzliche Informationen wie z.B. die gerade durchgeführte Simulationsreihe oder Besonderheiten eingegeben werden.

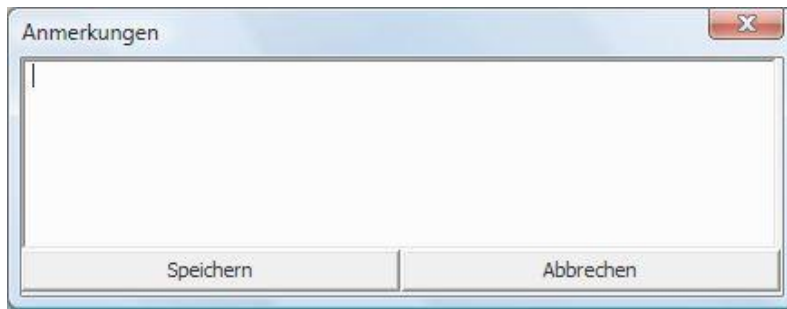


Abbildung 9.41: Fenster zu Eingabe von zusätzlichen Informationen

Der Menüpunkt „Ergebnis anzeigen“ / „Stresskomponenten“ öffnet das in Abbildung 9.42 zu sehende Fenster. Das Fenster besteht aus fünf Bereichen. Einem ausblendbaren Steuerungsfeld, einem Hauptdarstellungsbereich und drei weiteren Visualisierungsfeldern. Das im linken oberen Bereich zu sehende Steuerungsfeld ist wiederum in drei Bereiche unterteilt. Das obere Schalterfeld dient zur Auswahl der darzustellenden Wertefelder. In der ersten Schalterzeile kann die Auswahl getroffen werden, ob die Rechengitter der individuellen Kontakte oder des Kontaktpaares dargestellt werden. Darunter befindet sich ein Block von drei mal drei Auswahlschaltern. Die Diagonale und die darüber liegenden Auswahlschalter stehen für die sechs unabhängigen Komponenten des Spannungstensors. Die drei Schalter unterhalb der Diagonalen sind mit den Eigenwerten des Spannungstensors verknüpft. Der mit Mises gekennzeichnete größte Schalter steht für die von-Mises-Spannungen analog Glg. (7.21).

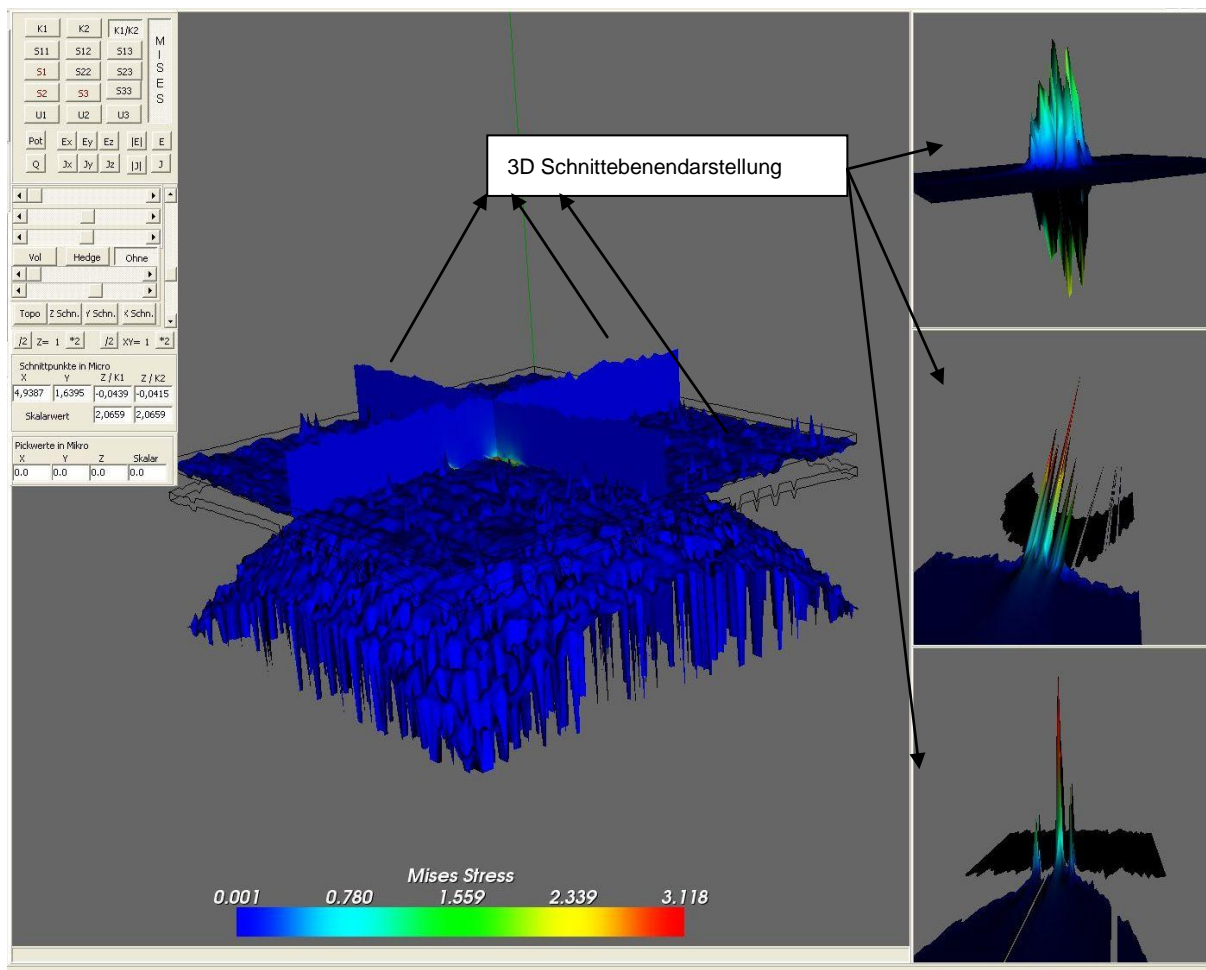


Abbildung 9.42: Fenster zu Visualisierung der Ergebnisse. Ausgewählt sind die von-Mises-Spannungen eines Kontaktpaares.

Unter der Gruppe mit den Auswahlaltern der Spannungskomponenten folgen drei Schalter für die drei Komponenten des Deformationsvektors. Daran schließt sich eine Gruppe von zwölf Auswahlaltern zur Darstellung der elektrischen Charakteristika eines Kontaktpunktes an. Hier kann zwischen den Vektorkomponenten des Elektrischen Feldes, der Stromdichte und deren Betragsdarstellung gewählt werden. Der mit „Pot“ gekennzeichnete Schalter zeigt die Potentialverteilung innerhalb der Kontakte und ist am besten geeignet, den Einfluss der individuellen a-Spots zu demonstrieren. Der mit „Q“ gekennzeichnete Schalter zeigt die Verteilung der im Kontakt generierten Wärmeenergie. Weiterhin ist die Darstellung der Vektoren des elektrischen Feldes und der Stromdichte möglich. Diese Darstellung ist jedoch nur für sehr grobe Gitter geeignet.

Der mittlere Teil des Steuerungsfeldes enthält mehrere Schieberegler. Mit den drei oberen horizontal ausgerichteten Reglern lassen sich die drei orthogonalen Schnittebenen positionieren. Der vertikale Schieberegler bietet die Möglichkeit, die z-Werte des dargestellten Rechengitters zu zoomen. Die Form des ungestreckten Gitters wird, wie in Abbildung 9.42 gezeigt, durch eine entsprechende Umrisslinie gekennzeichnet. Unter den Reglern der Schnittebenen befinden sich drei Optionsschalter, die die Darstellung der Rechengitter vorgeben. Der mit „Vol“ gekennzeichnete stellt das Rechengitter als Folge von x/y-Schnitten dar. Hierbei wird die Transparenz der Raumpunkte als Funktion des jeweiligen skalaren Wertes berechnet. Diese Darstellung ist sehr speicherintensiv. Weniger rechenintensiv ist die Darstellung bei Aktivierung des Schalters „Hedge“. Hier werden ebenfalls alle Punkte des Rechengitters dargestellt. Die Farbe der Raumpunkte entspricht dem jeweiligen skalaren Wert, der aus der Legende am unteren Bildrand des Hauptfeldes entnommen werden kann. Bei der Auswahl des Optionsschalters „Ohne“ erfolgte keine Darstellung der Gitterpunkte und es werden nur die drei orthogonalen Schnittebenen dargestellt. Die beiden unteren Schieberegler dienen der Skalierung der Farbdarstellung. Hier werden die minimalen (oberer Regler) bzw. maximalen Skalarwerte (unterer Regler) hinsichtlich einer frei wählbaren Grenze mit der jeweiligen Extremwertfarbe (blau / rot) dargestellt. Die Auswahlaltern „Topo“, „x-Schn.“, „y-Schn.“ und „z-Schn.“ zeigen die 3D-Darstellungen der entsprechenden Schnittebenen im Hauptfeld des Visualisierungsfensters. Bei sehr hohen Auflösungen stehen die vier Taster mit der Kennzeichnung „/2“ bzw. „*2“ zur Verfügung. Bei der Betätigung dieser Taster wird die dargestellte Auflösung der Rechengitter jeweils in z- oder x/y-Richtung verdoppelt oder halbiert. Der untere Bereich des Steuerungsfeldes dient zum Auslesen der Werte des per Mauscursor gewählten, bzw. aus dem Schnittpunkt der drei Schnittebenen bestimmten, Raumpunktes.

Danksagung

An erster Stelle sei Prof. Dr. Helmut Schlaak zu danken. Seine Bereitschaft mich als externen Doktoranden anzunehmen, bedeutete auch für ihn einen nicht unerheblichen Arbeitsaufwand. Gerade für die mehrfache Durchsicht der umfangreichen Arbeit, opferte er seine persönliche Freizeit und auch Urlaubstage.

Meinen besonderen Dank gilt an dieser Stelle Herrn Dr. Helge Schmidt, durch dessen Fürsprache diese Arbeit erst möglich gemacht wurde. Herr Dr. Schmidt war ein äußerst kompetenter und unermüdlicher Ratgeber, der durch seine Erfahrung nicht unerheblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat. Des Weiteren muss die Firma Tyco Electronics AMP GmbH erwähnt werden. Durch Tyco Electronics wurde mein Zugang zur hier zitierten Literatur erst möglich. Ebenfalls konnten die Simulationen nur in Zusammenarbeit mit den entsprechenden Stellen in Bensheim und Harrisburg validiert werden.

Weiterhin möchte ich hiermit meiner Familie danken, die während der letzten dreieinhalb Jahre all die langen Abende, Wochenenden, Feiertage und Urlaubstage auf mich verzichten musste. Ihre Hilfe bei der Durchsicht dieser Arbeit musste ich mehr als einmal in Anspruch nehmen.

Lebenslauf

Name.	Michael Gustav Leidner
Ehestand:	Verheiratet, 3 Kinder (21, 13, 11)
Konf.	Römisch katholisch
Geb: 14.10.1962	in Lambrecht Pfalz
1.7.1983	Abitur am Kurfürst Ruprecht Gymnasium Neustadt Weinstrasse
10.1983- 12.1990	Studium: Technische Physik an der Universität Kaiserslautern Nebenfächer: Elektrotechnik (Hauptstudium); Informatik (Grundstudium)
01.1991 – 07.1991	Konzentration auf Triathlon (Ironman)
11. 1991 – 03.1992	Siemens ÖN Betrieb, Werk Speyer (Tätigkeit im Bereich Fertigungstechnik)
03.-1992 – 06.1992	VAC Hanau am Standort Speyer (Qualitätssicherung / Entwicklung Magnetsysteme)
07.1992 – 12.1995	Siemens EC B am Standort Speyer (Projektleiter Siemens Crash Sensor)
09.1992 – 09.1995	Führungsnachwuchskreis Siemens EC
01.1996 – 07.1998	Siemens EC R in USA Marion Ky (Technical Supervisor Relais Fertigung / Linien VKPA, VKP Blinker Mo- dul, VRM)
07.1998	Ernennung zum außertariflichen Mitarbeiter der Siemens AG
08.1998 – 11.1999	Siemens EC B am Standort Speyer (Projektierung und Hochlauf DensiPac Female Fertigungslinie)
12.1999 – heute	Tyco Electronics AMP GmbH Standort Speyer Marketing Advanced Technology GIC EMEA Seit 01.2007 Leiter der Abteilung
2.2008 - heute	Tyco Electronics AMP GmbH Standort Speyer Manager Material Science & Surface Technology PE GAD EMEA

Eidestattliche Erklärung

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Dissertation allein und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur verfasst habe.

Lambrecht, den 6. Dezember 2008

Dipl. Phys. Michael Leidner